11 Vähimruutude meetod

11.1 Lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine

Vaatleme lineaarvõrrandisüsteemi kujul

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \quad Ax = b, \tag{11.1}$$

kus $m \geq n$, A on $(m \times n)$-järku maatriks, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Kui $m > n$, s.t. võrrandeid on rohkem kui tundmatuid, siis võib süsteem olla vastuoluline, s.t. süsteemi ei ole võimalik lahendada. Sellisel juhul räägitakse lahendist vähimruutude mõttes.

Defineerime jääkliikme $R(x) = b - Ax$ ning vaatleme selle normi ruutu

$$\|R(x)\|^2_{l_2^m} = \|b - Ax\|^2_{l_2^m} = \sum_{i=1}^{m} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right)^2 .$$

Definitsioon 11.1

Süsteemi (11.1) lahendiks vähimruutude mõttes nimetatakse elementi $x \in \mathbb{R}^n$, mille korral

$$\|R(x)\|^2 = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \|R(y)\|^2$$

ehk võrrandite vasaku ja parema poole erinevuste ruutude summa on minimaalne.

Definitsioon 11.2

Süsteemi (11.1) normaalvõrrandite süsteemiks nimetatakse süsteemi

$$A^T Ax = A^T b \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik}a_{ij} \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}b_i, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{11.2}$$

Siin $A^T A$ on n-järku ruutmaatriks ja $A^T b \in \mathbb{R}^n$, s.t. võrrandeid on sama palju kui muutujaid.

Teoreem 11.1

Element x on süsteemi (11.1) lahend vähimruutude mõttes parajasti siis, kui x on süsteemi (11.2) lahend.

Teoreem 11.2

Süsteem (11.2) on üheselt lahenduv parajasti siis, kui maatriksi A veerud on lineaarselt sõltumatud.

11.2 Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni f lähendamisel vähimruutude meetodiga on antud argumendi väärtused $x_0, \ldots, x_m$ ning neile vastavad funktsiooni f väärtused $f_0, \ldots, f_m$. Valitakse välja mingid lineaarselt sõltumatud koordinaatfunktsioonid ψ_j, $j = 0, \ldots, n$, $n \leq m$, ning otsitakse funktsiooni f lähendit kujul

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \psi_j(x), \tag{11.3}$$

kus $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, n$, on tundmatud kordajad, mis tuleb määrata tingimustest $g(x_i) = f_i$, $i = 0, \ldots, m$. Kui $n = m$, on tegemist interpoleerimisülesandega, kui $n < m$, on tegemist vähimruutude meetodiga, s.t. süsteem lahendatakse vähimruutude mõttes.

Lähendades polünoomidega, on koordinaatfunktsioonideks

$$\psi_0(x) = 1, \quad \psi_1(x) = x \quad , \ldots, \quad \psi_n(x) = x^n.$$

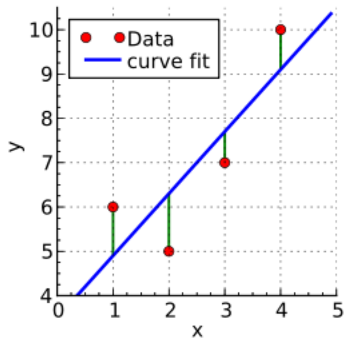
Vastava lineaarvõrrandisüsteemi $g(x_i) = f_i$, $i = 0, \ldots, m$, kordajad on $a_{ij} = \psi_j(x_i) = x_i^j$ ning normaalvõrrandite süsteem esitub kujul

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{m} x_i^{k+j} \right) c_j = \sum_{i=0}^{m} x_i^k f_i, \quad k = 0, \ldots, n. \tag{11.4}$$

Teoreem 11.3
Süsteem (11.4) on üheselt lahenduv parajasti siis, kui sõlmede $x_0, \ldots, x_m$ seas on vähemalt $n + 1$ erinevat.

Märkus 11.1
Süsteem (11.4) on n-järku süsteem $Ac = b$. Mathcadis saab selle lahendada käsuga

lsolve(A,b).



Joonis: Krishnavedala (Wikipedia).

11.3 Ülesanded

Arvestuslik ülesanne 11.1

Tähtaeg: 8. mai 2015. Ööpäevas mõõdeti järgmised temperatuurid

Aeg	0:00	3:00	6:00	9:00	12:00	15:00	18:00	21:00
C°	$-2.2 + \alpha$	$-2.8 + \alpha$	$-6.1 + \alpha$	$-3.9 + \alpha$	$0.0 + \alpha$	$1.1 + \alpha$	$-0.6 + \alpha$	$-1.1 + \alpha$

Kasutades baasfunktsioonidena astmefunktsioone $1, x, \ldots, x^n$, erinevate $n = 1, 3, 5, 7$ korral, leidke vähimruutude meetodiga lähislahend g_n, mis lähendab mõõteandmeid vähimruutude mõttes. Leidke funktsiooni g_n abil temperatuur kell $20 : 15$. Esitage mõned lähendid koos mõõtmeandmetega ühel joonisel.

Vihje: Kellaajad tuleks skaleerida lõigule $[0, 1]$ (0 on siis 0:00 ja 0.5 on siis 12:00). Vähimruutude meetodi jaoks on siin süsteem (11.4), $Ac = b$. Lähislahend $g_n(x)$ tuleks siis kirja panna kujul (11.3).