12 Integreerimine. Trapetsvalem

12.1 Newtoni-Cotesi valemid

Newtoni-Leibnizi valemi põhjal

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

kus F on funktsiooni f algfunktsioon. Kui algfunktsioon ei ole esitatav elementaarfunktsioonide kaudu või integreeritav funktsioon f on esitatud ainult väärtuste tabelina, s.t. teada on vaid lõplik arv funktsiooni väärtusi, tuleb kasutada ligikaudseid meetodeid.

Interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemi saamiseks asendame integreeritava funktsiooni interpolatsioonipolünoomiga. Edaspidi vaatleme ainult võrdsete vahemikega sõlmi.

Definitsioon 12.1

Interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalmeid, milles kaalufunktsioon puudub, s.t. on konstantselt 1 ning sõlmed on võrdsete vahemikega, nimetatakse **Newtoni-Cotesi valemiteks**.

Olgu $x_i = a + i\,h$, $i = 0, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$, siis Lagrange'i polünoom

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot L_{ni}(x)$$

interpoleerib funktsiooni f väärtusi sõlmedes x_i, s.t. $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

Newtoni-Cotesi valemid on kujul

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (P_n(x) + r_n(f,x))\;dx = \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot f(x_i) + R_n(f), \tag{12.1}$$

kus $A_i = \int_a^b L_{ni}(x)\,dx$.

Tähistades $B_i = \frac{A_i}{b-a}$, saame kirja panna kordajate B_i omadused (tõestatakse loengus):

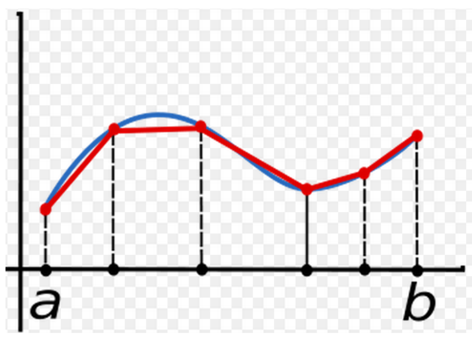
$$1)\ \sum_{i=0}^{n} B_i = 1; \qquad 2)\ B_i = B_{n-i}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

12.2 Trapetsvalem

Olgu $n = 1$, siis $x_0 = a$, $x_1 = b$ ja kehtib

$$B_0 + B_1 = 1,$$
$$B_0 = B_1,$$

s.t. $B_0 = B_1 = \frac{1}{2}$. Kordajad oleks olnud võimalik leida ka otse integreerides



Joonis. Wikipedia.

$$A_0 = \int_a^b L_{n0}(x)\,dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,dx = \frac{1}{a-b}\left(\frac{x^2}{2} - b\,x\right)\Big|_a^b = \frac{1}{a-b}\left(\frac{b^2}{2} - b^2 - \left(\frac{a^2}{2} - ab\right)\right)$$

$$= \frac{-b^2 - a^2 + 2ab}{2(a-b)} = \frac{b-a}{2} = (b-a)B_0 \Rightarrow B_0 = \frac{1}{2},$$

$$A_1 = \int_a^b L_{n1}(x)\,dx = \int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,dx = \frac{b-a}{2} = (b-a)B_1 \Rightarrow B_1 = \frac{1}{2}.$$

Trapetsvalem esitub lihtvalemina kujul

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)). \tag{12.2}$$

Jaotades lõigu $[a, b]$ N võrdseks osalõiguks otspunktidega $x_i = a + i\,h$, $i = 0, \ldots, N$, $h = \frac{b-a}{N}$, ning rakendades igas osalõigus trapetsvalemi lihtvalemit, saame **trapetsvalemi liitvalemina** kujul

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\cdot(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{N-1} + f_N) + R_1(f, N), \tag{12.3}$$

kus $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, N$ ja

$$R_1(f, N) = -h^2 \cdot \frac{b-a}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Praktilistes arvutustes jäetakse loomulikult ära jääkliige R_1.

12.3 Ülesanded

Arvestuslik ülesanne 12.1

Tähtaeg: 8. mai 2015. Jõe ristlõiget läbiva veevoolu maht F (m^3/s) arvutatakse valemiga

$$F = \int_0^\alpha h(x)\,dx,$$

kus α on jõe ristlõike laius (jõe laius) ja $h(x)$ on jõe sügavuse ja voolu kiiruse korrutis kohal x meetrit kaldast. Kasutades järgmisi mõõtmisi, leidke trapetsvalemit kasutades veevoolu maht F:

x m	0.0	$\alpha/8$	$2\alpha/8$	$3\alpha/8$	$4\alpha/8$	$5\alpha/8$	$6\alpha/8$	$7\alpha/8$	α
$h(x)$	0.00	0.59	0.13	0.34	0.76	0.65	0.29	0.07	0.00