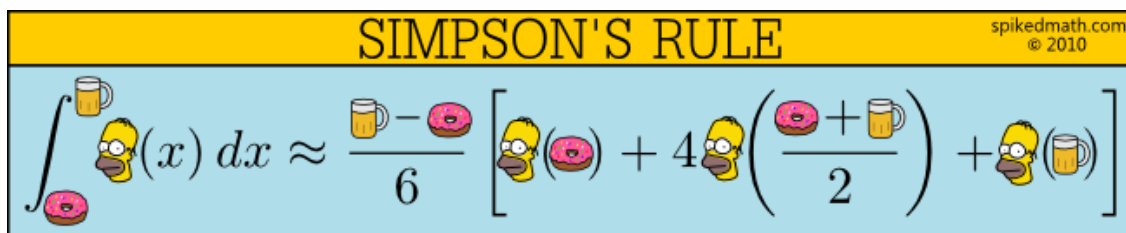


## 13 Numbriline integreerimine. Simpsoni valem

Trapetsvalem oli lihtne tuletada ja kasutada, kuid me oleme huvitatud täpsematest valemitest ja kiiremini koonduvatest meetoditest.



### 13.1 Valemi tuletamine

Olgu  $n = 2$  ja  $x_0 = a$ ,  $x_1 = \frac{a+b}{2}$  ning  $x_2 = b$ . Siis kehtib

$$\begin{aligned} B_0 + B_1 + B_2 &= 1, \\ B_0 &= B_2. \end{aligned}$$

Kolmanda tingimuse saame sellest, et interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalem on täpne iga ülimalt  $n$ -astme polünoomi  $f$  korral. Olgu  $[a, b] = [0, 2]$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  ja  $f(x) = x^2$ . Siis ühelt poolt

$$\int_0^2 f(x) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

ja teiselt poolt

$$\int_0^2 f(x) dx = 2(B_0 f(0) + B_1 f(1) + B_2 f(2)) = 2(B_0 \cdot 0 + B_1 \cdot 1 + B_2 \cdot 4),$$

millest  $B_1 + 4B_2 = \frac{4}{3}$ . Süsteemi lahenditeks on  $B_0 = B_2 = \frac{1}{6}$  ja  $B_1 = \frac{4}{6}$ .

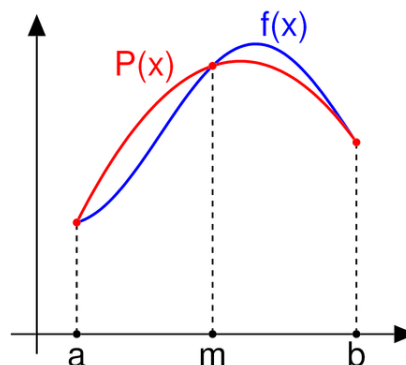
**Simpsoni valem lihtvalemina** esitub kujul

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right). \quad (13.1)$$

Simpsoni meetodis lähendatakse funktsiooni ruutpolünoomiga (läbi kolme punkti).

Valemi nimi tuleb inglise matemaatiku Thomas Simpsoni (1710-1761) järgi.

Joonis. Wikipedia.



## 13.2 Simpsoni valem üldise integraali jaoks

Simpsoni valem on liitvalemina rakendatav, kui lõik on jaotatud **paarisarvuks** osalõikudeks. Jaotades lõigu  $[a, b]$   $N$  võrdseks osalõiguks, kus  $N$  on paarisarv, otspunktidega

$$x_i = a + i h, \quad i = 0, \dots, N, \quad h = \frac{b - a}{N},$$

ning rakendades osadele eraldi Simpsoni valemit, saame järgmise tulemuse.

**Simpsoni valem liitvalemina** esitub kujul

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4 f_1 + 2 f_2 + 4 f_3 + 2 f_4 + \dots + 4 f_{N-1} + f_N) + R_2(f, h), \quad (13.2)$$

kus

$$f_i = f(x_i), \quad i = 0, \dots, N$$

ja

$$R_2(f, h) = -h^4 \frac{b-a}{180} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

## 13.3 Ülesanded

### Arvestuslik ülesanne 13.1

**Tähtaeg: 22. mai 2015.** Kolme mitte niiväga kiirete maratoni jooksja kiirused (km/h) on kirjeldatud järgmiste funktsioonidega

$$v_1(t) = \frac{12}{0.2t + 1}, \quad v_2(t) = 12 e^{-\frac{t}{6}}, \quad v_3(t) = \frac{48}{0.25t^2 + 4}.$$

Läbitud teepikkus arvutatakse kiiruse järgi valemiga

$$s(t) = \int_0^T |v(t)| dt.$$

Kasutades Simpsoni liitvalemit, leidke kõigi kolme jooksja läbitud distantsid esimese  $\frac{\alpha}{8}$  tunni jooksul.

Kasutades Simpsoni liitvalemit, leidke kõigi kolme jooksja kogudistantsi läbimise ajad  $T$  (väheamalt sekundilise täpsusega), kui klassikalise maratoni pikkus on 42.195 kilomeetrit. Esitage leitud ajad „loetaval“ kujul (tunnid, minutid, sekundid).

Vihje: integraali väärtus peab tulema u. 42.195. Üks võimalus on kirjutada mingi sammuga tsükkel, mis hakkab muutma aega  $T$  kuni integraali väärtus on see, mis vaja. Ilmselt on kasulik katse-eksituse meetodil hakata tsükli mitte väärtusest  $T = 0$ , vaid mingist suuremast  $T$  väärtusest. Siinjuures tuleb integraali leidmisel võtta vähemalt niipalju sõlmi, et nende topeldamisel integraali väärtus enam oluliselt ei muutu.