14 Numbriline integreerimine. Runge võte

Osalõikude arvu n fikseerimine on küll lihtne moodus, kuid sellega võib halvemal juhtuda nii, et see on kas liiga väike või liiga suur. Kuna ligikaudsel arvutamisel me integraali täpset väärtust ei tea, siis on ka raske otsustada, kas leitud lähiväärtus on piisavalt hea või hoopis üsna kehva tulemus. Integreerimise organiseerimiseks on üks lihtsamaid võtteid Runge võte (saksa matemaatiku Carl David Tolme Runge (1856-1927) järgi.

14.1 Runge võte vea hindamiseks

Olgu integraali täpne väärtus I ning kvadratuurvalemi abil sammu h korral leitud lähisväärtus I_h ja sammu $2h$ korral leitud lähisväärtus I_{2h}. Kui kvadratuurvalemi jääkliige $I - I_h$ esitub kujul

$$I - I_h = \Theta \cdot h^q + O(h^{q+1}),$$

kus $\Theta \cdot h^q$ on jääkliikme peaosa (Θ on h-st sõltumatu, aga funktsioonist f sõltuv konstant). Siis kehtib hinnang

$$I - I_h = \frac{I_h - I_{2h}}{2^q - 1} + O(h^{q+1}). \tag{14.1}$$

Definitsioon 14.1

Seosel (14.1) põhinevat vea ligikaudse hindamise meetodit,

$$I - I_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{2^q - 1},$$

nimetatakse **Runge võtteks**.

Märkus 14.1

Trapetsvalemi ja ristkülikvalemi korral $q = 2$, Simpsoni valemi ja Newtoni 3/8-valemi korral $q = 4$.

14.2 Ristkülikvalem

Ka ristkülikvalemit võib vaadelda mingis mõttes interpolatsioonitüüpi valemina, kus integreeritava funktsiooni f lähendiks võetakse tükiti konstantne funktsioon, mille korral interpolatsioonitingimused on rahuldatud lõigu keskpunktides.

Ristkülikvalem lihtvalemina esitub kujul

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right). \tag{14.2}$$

Ristkülikvalem liitvalemina esitub kujul

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\cdot\left(f\left(a+\frac{h}{2}\right)+f\left(a+\frac{3h}{2}\right)+\cdots+f\left(b-\frac{h}{2}\right)\right)+R_0(f,h), \tag{14.3}$$

$$\text{kus}\quad h=\frac{b-a}{N},\quad R_0(f,h)=h^2\cdot\frac{b-a}{24}\cdot f''(\xi),\quad \xi\in[a,b].$$

14.3 Ülesanded

Arvestuslik ülesanne 14.1

Tähtaeg: 29. mai 2015. Robotkäsi on programmeeritud liikuma trajektooril

$$\left\{\begin{array}{ll} x(t) & = \frac{2\alpha}{3}+0.3\cdot t+3.9\cdot t^2-2.3\cdot t^3 \\ y(t) & = \frac{\alpha}{3}+0.3\cdot t+0.9\cdot t^2-2.7\cdot t^3 \end{array}\right\},$$

kus $t\in[0,2]$ on aeg sekundites. Robotkäe poolt läbitud teepikkus (ajahetkete t_1 ja t_2 vahel) arvutatakse kaare pikkuse valemiga

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt.$$

Kirjutage programm, mis leiab robotkäe poolt läbitud teepikkused (cm) suvalisel ajalõigul $[t_1,t_2]$. Kasutage selleks trapetsmeetodit koos Runge võttega, tehes arvtused täpsusega $\varepsilon=10^{-6}$. Leidke läbitud teepikkused ajavahemikel $t\in[0,0.5]$, $t\in[0.5,1]$, $t\in[1,2]$ ja $t\in[0,2]$. Vastuseks väljastage teepikkus ja kasutatud osalõikude arv.
Lisamõtlemist (mitte arvestuseks): kuidas liigutada robotkätt ühtlase kiirusega, s.t. kuidas arvutada t_1 ja t_2 väärtused, et $v=\frac{s}{t_2-t_1}$ oleks kõikidel ajavahemikel (mingi võrdse ajasammu jaoks) sama?

Arvestuslik ülesanne 14.2

Tähtaeg: 29. mai 2015. Klaasist lääts ehitatakse järgmise mudeli järgi, kus pool ellipsist

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1,\quad x\in[0,A],$$

pöörleb ümber x-telje. Vormitud läätse massikeskme $(\bar{x},0,0)$ koordinaat $\bar{x}$ arvutatakse valemist

$$\bar{x}=\frac{\int_0^A x\cdot y^2\,dx}{\int_0^A y^2\,dx}.$$

Arvutage $\bar{x}$ väärtus (Runge võttega, $\varepsilon=10^{-8}$) trapetsvalemi ja Simpsoni valemi abil, kui

$$A=7,\quad B=\alpha.$$

Esitage mõlema tulemuse jaoks ka kasutatud osalõikude arv n.