2 Harilik iteratsioonimeetod

Olgu f pidev funktsioon. Vaatleme võrrandeid kujul

$$f(x) = 0.$$

2.1 Skeem

Asendame võrrandi $f(x) = 0$ otsitava lahendi x_* ümbruses samaväärse võrrandiga

$$x = g(x).$$

Seda saab teha mitmel erineval viisil, näiteks võttes $g(x) = x - \psi(x)f(x)$, kus ψ on pidev funktsioon, millel pole lahendi x_* teatavas ümbruses nullkohti. Kõige lihtsam on kasutada konstantset funktsiooni $\psi(x) = \beta = const \neq 0$.

Alglähendist x_0 lähtudes moodustame iteratsioonimeetodi eeskirja

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{2.1}$$

Kui g on pidev ja iteratsioonimeetod koondub, siis koondub jada (x_n) võrrandi lahendiks x_*.

2.2 Teooria

Teoreem 2.1

Olgu $g : [a, b] \to [a, b]$ pidev ning olgu g ahendav lõigus $[a, b]$, s.t. leidub $q < 1$ nii, et

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq q\,|x_1 - x_2|$$

iga $x_1, x_2 \in [a, b]$ korral. Siis võrrandil $x = g(x)$ on lõigus $[a, b]$ parajasti üks lahend x_* ning iteratsioonimeetod koondub selleks lahendiks iga $x_0 \in [a, b]$ korral. Kehtib hinnang

$$|x_n - x_*| \leq \frac{q^n}{1 - q}\,|x_1 - x_0|. \tag{2.2}$$

Märkus 2.1

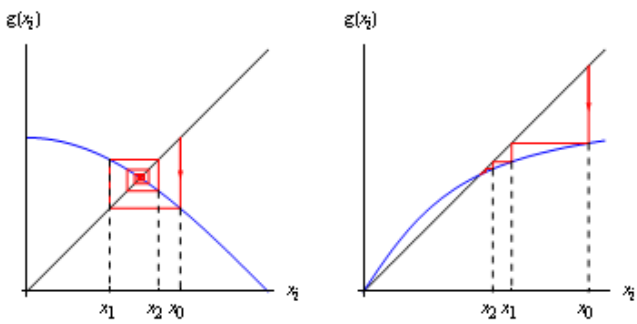
Diferentseeruva funktsiooni g korral võib ahendavuse tingimuse asendada tingimusega

$$|g'(x)| \leq q < 1 \quad \text{iga } x \in [a, b]. \tag{2.3}$$

Põhjendus. Lagrange'i keskväärtusteoreemi kohaselt

$$g(x_1) - g(x_2) = g'(\xi)\,(x_1 - x_2), \quad \xi \in (x_1, x_2).$$

Kui $|g'(x)| \leq q < 1$ iga $x \in [a, b]$ korral, siis on tegemist ahendava funktsiooniga.



http://wwwf.imperial.ac.uk/metric/metric_public/numerical_methods/iteration/fixed_point_iteration.html

2.3 Millal lõpetada iteratsiooniprotsess?

Teoreemi eeldustel kehtib

$$|x_n - x_*| = |g(x_{n-1}) - g(x_*)| \le q\,|x_{n-1} - x_*| \le q\,(|x_n - x_{n-1}| + |x_n - x_*|),$$

millest

$$|x_n - x_*| \le \frac{q}{1-q}\,|x_n - x_{n-1}|, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Iteratsiooniprotsessi võib lõpetada, kui on täidetud tingimus

$$\frac{q}{1-q}\,|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon. \tag{2.4}$$

Märkus 2.2

Praktikas ei pruugi q väärtuse leidmine sugugi nii lihtne olla. Üldiselt võib lõpetamiseks kasutada tingimust

$$|x_n - x_{n-1}| \le \tilde{\varepsilon}.$$

2.4 Näide

Lahendame võrrandi $f(x) = 0$, täpsemalt

$$x^2 - 1.8\,x = 0.$$

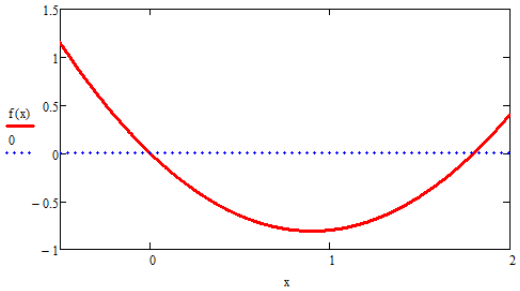
Kontrolliks lahendame selle ka täpselt, lahenditeks on 0 ja 1.8. Kuidas aga lahendatakse numbriliselt?

Valime hariliku iteratsioonimeetodi $x = g(x)$ jaoks

$$g(x) = \frac{x^2}{1.8}.$$

Milline võtta alglähend? Parim viis on teha joonis ja vaadata, milliste väärtuste lähedal $f(x) = 0$.

Võtame näiteks $x_0 = 0.5$, siis 4 iteratsiooniga leitakse lähislahend $x_4 \approx 2.26 \cdot 10^{-9}$. Kontrolliks saame $f(x_4) \approx -4.07 \cdot 10^{-9}$.



NB! Võttes aga

$$g(x) = 2.8x - x^2,$$

saame alglähendi $x_0 = 0.5$ jaoks hoopis teistsuguse tulemuse $x_{33} \approx 1.7999$, kusjuures $f(x_{33}) \approx -1.78 \cdot 10^{-4}$. Vastus sellele probleemile peitub koondumisteoreemis.

2.5 Ülesanded

Arvestuslik ülesanne 2.1

Tähtaeg: 27. veebruar 2015. Lahendage hariliku iteratsioonimeetodiga võrrand

$$e^{x-2} + \frac{\alpha}{10} \cdot x^3 - x = 0.$$

Leidke võrrandi kõik kolm lahendit täpsusega 10^{-6}. Kontrollige lahendite sobivust. Mitu iteratsiooni iga lahendi leidmiseks kulub ja kuidas muutub olukord alglähendite muutmisel?

Näpunäide. Alglähendi määramiseks kasutage joonise abi. Viige võrrand kujule $x = g(x)$ nii, et leiduks lõik $[a, b]$, mille korral $g([a, b]) \subset [a, b]$ ning $|g'(x)| \le q < 1$ iga $x \in [a, b]$ korral. Tuletise hindamise jaoks saab kasutada tuletisoperaatorit ja samuti joonise abi.