3 Newtoni meetod

3.1 Skeem

Olgu funktsioon f kaks korda pidevalt diferentseeruv lõigus $[a, b]$, mis sisaldab võrrandi $f(x) = 0$ lahendi x_* kui ka lähendi x_n. Taylori valemi põhjal

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_n)^2, \quad \xi \in (x, x_n).$$

Jättes jääkliikme ära, saame võrrandi $f(x) = 0$ asemel võrrandi

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0.$$

Newtoni meetod. Alglähendist x_0 lähtudes moodustame iteratsiooni eeskirja

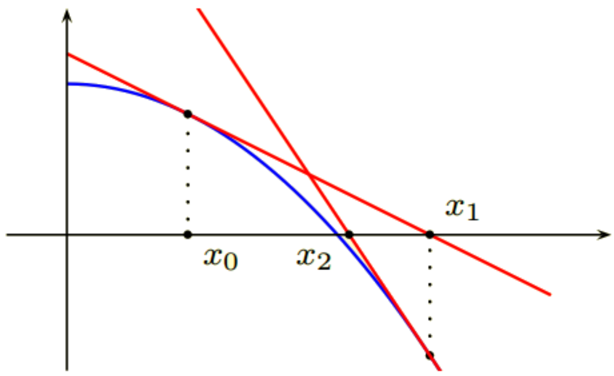
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{3.1}$$

Märkus 3.1

Paneme tähele ühte lihtsat omadust: kui funktsiooni graafik läbib x-telge, siis seda peab tegema ka tema puutuja (lõikepunktis x-teljega). Geomeetriliselt tähendabki Newtoni meetod joone $y = f(x)$ asendamist tema puutujaga

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

punktis $P(x_n, f(x_n))$. Lähendi uus väärtus leitakse kui puutuja lõikepunkt x-teljega.



http://www.math.uakron.edu/~dpstory/tutorial/demos/newton.pdf

3.2 Teooria

Teoreem 3.1

Kui $f \in C^2[a, b]$ ning võrrandi $f(x) = 0$ lahendi $x_* \in [a, b]$ korral $f'(x_*) \neq 0$, siis leidub $\delta > 0$ nii, et Newtoni meetod koondub võrrandi lahendiks iga alglähendi $x_0 \in [x_* - \delta, x_* + \delta]$ korral, s.t. **piisavalt hea alglähendi** korral Newtoni meetod koondub alati.

Märkus 3.2

Newtoni meetodit võib tõlgendada ka kui harilikku iteratsioonimeetodit $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots,$ milles

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Seega on rakendatavad ka hariliku iteratsioonimeetodi koonduvustingimused ning veahinnangud, näiteks

$$|g'(x)| = \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1,$$

kuid selle tingimuse kontroll võib osutuda siiski küllalt tülikaks.

Märkus 3.3

Lihtsamal juhul kasutatakse iteratsiooniprotsessi lõpetamiseks tingimust

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon.$$

Siinjuures tuleks ε võtta mingi varuga, kuna tegelik viga võib tulla suurem.

3.3 Näide

Lahendame võrrandi

$$x^2 - 1.8\,x = 0.$$

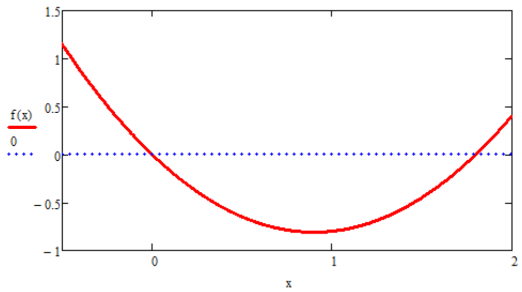
Kontrolliks lahendame selle ka täpselt, lahenditeks on 0 ja 1.8. Kuidas aga lahendatakse Newtoni meetodiga?

Esiteks on meil vaja $f(x) = x^2 - 1.8\,x$ tuletise avaldist,

$$f'(x) = 2\,x - 1.8.$$

Jooniselt näeme, et alglähendid võiksime võtta 0 ja 2 ümbruses. Võtame näiteks $x_0 = 0.5$, siis 5 iteratsiooniga leitakse lähislahend $x_5 \approx -9.5 \cdot 10^{-14}$.

Kontrolliks saame $f(x_5) \approx 1.7 \cdot 10^{-13}$.



Võttes aga alglähendiks $x_0 = 1.5$, saame tulemuseks $x_4 \approx 1.8$, kusjuures $f(x_4) \approx 2.13 \cdot 10^{-11}$. Newtoni meetod annab siin väga kiire koondumise.

3.4 Ülesanded

Ülesanne 3.1

Olulisi näiteid. Newtoni meetod võib olla ka aeglane. Veenduge selles, lahendades võrrandit

$$x^2 = 0.$$

Mitu iteratsiooni on vaja, et alglähendi $x_0 = 0.5$ korral saaks lähislahendi täpsusega 10^{-8}?

Newtoni meetod võib mitte töötada ka juhul $y'(x) \neq 0$. Veenduge selles, lahendades võrrandit

$$4x^4 - 6x^2 - 11/4 = 0,$$

kasutades alglähendina $x_0 = 0.5$. Alternatiiv on kasutada poolitamismeetodit.

Arvestuslik ülesanne 3.2

Tähtaeg: 6. märts 2015. Aerofotograafia ja kompuuteranalüüs annavad tulemuseks, et vaatluse all oleva tsunami lainet saab kirjeldada funktsiooniga

$$y = 4\,\sin(0.2\,x) + \frac{60 + \alpha}{0.005\,x^2 + 2},$$

kus y on tsunami kõrgus ja x on horisontaalne nihe meetrites. Leidke Newtoni meetodiga tsunami maksimaalne ja minimaalne kõrgus lõigus $x \in [-45, 45]$, täpsusega 10^{-5}. Mitu iteratsiooni iga lahendi leidmiseks kulub ja kuidas muutub olukord alglähendite muutmisel? Vihje: kõrguse leidmiseks tuleb lahendada võrrand $y'(x) = 0$ (kõrguse muutumise kiirus on null).