4 Lähismeetodid, mis ei kasuta funktsiooni tuletist

Newtoni meetod on päris hea vahend diferentseeruva funktsiooni jaoks. Mida aga teha juhul, kui tuletise arvutamine on ajamahukas, funktsioon ei olegi diferentseeruv või funktsiooni korral ei saagi tuletise mõistet kasutada (näiteks, funktsiooni rollis on arvutiprotseduur)?

4.1 Lõikajate ehk kõõlude meetod

Olgu leitud võrrandi $f(x) = 0$ lahendi x_* kaks lähisväärtust x_{n-1} ja x_n. Asendame Newtoni meetodis kasutatud puutujasirge kahte funktsiooni graafiku punkti läbiva kõõlu vastu (vt. joonist), s.t. asendame tuletise $f'(x_n)$ väärtuse diferentssuhtega,

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Lõikajate meetod. Alglähenditest x_0 ja x_1 lähtudes moodustame iteratsiooni eeskirja

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{4.1}$$

Märkus 4.1

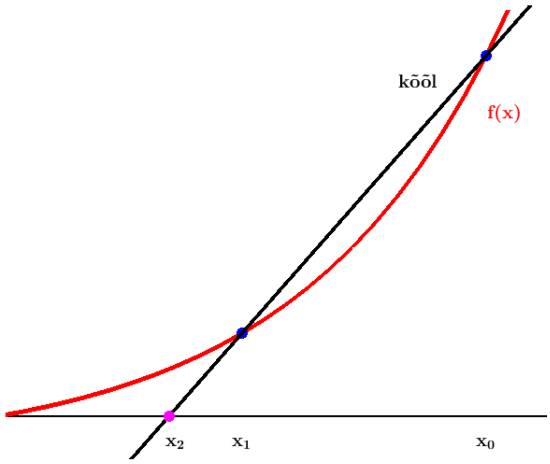
Newtoni meetodis leiti uus lähislahend kui puutuja lõikepunkt x-teljega. Lõikajate meetodis leitakse uus lähislahend kui kõõlu lõikepunkt x-teljega.

Märkus 4.2

Teatavatel eeldustel funktsiooni $f(x)$ kohta kehtib hinnang

$$|x_n - x_*| \leq \beta \cdot |x_{n-1} - x_*|^{1.618},$$

kus $\beta > 0$ ei sõltu suurusest n.



4.2 Mulleri meetod

Lõikajate meetod põhineb funktsiooni f lähendamisel lineaarse interpolatsioonipolünoomiga (sirgega). Idee lähendada ruutpolünoomiga, pakkus 1956. aastal välja ameerika matemaatik David Eugene Muller.

Olgu leitud võrrandi $f(x) = 0$ lahendi x_* kolm lähisväärtust x_{n-2}, x_{n-1} ja x_n. Alglähenditest x_0, x_1 ja x_2 lähtudes moodustame inerpolatisoonipolünoomi

$$\mathbf{P(x) := f(x_n) + F(x_n, x_{n-1}) \cdot (x - x_n) + F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) \cdot (x - x_n) \cdot (x - x_{n-1})}, \tag{4.2}$$

kus

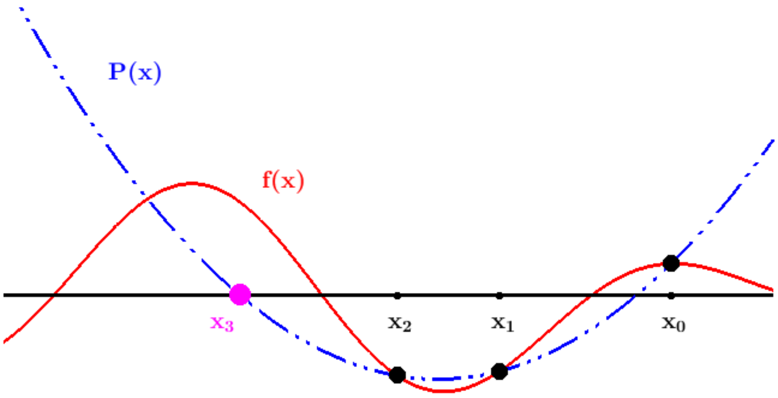
$$F(x_n, x_{n-1}) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}, \quad F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) = \frac{F(x_n, x_{n-1}) - F(x_{n-1}, x_{n-2})}{x_n - x_{n-2}}. \tag{4.3}$$

Mulleri meetod.

1. Moodustame interpolatisoonipolünoomi $P(x)$.

2. Lahendame **ruutvõrrandi** $P(x) = 0$.

3. Uueks lähendiks x_{n+1} võtame ruutvõrrandi selle lahendi, mis on lähemal väärtusele x_n. Omaette küsimus on, et mida teha komplekssete lahenditega.



Mulleri meetod on kolmesammuline, kuna arvutuste alustamiseks vajatakse kolme alglähendit. Meetod on osutunud praktikas päris edukaks, kuna suudab (mõningaste täienduste abil, mida me siin ei vaata) leida algebralise võrrandi kõik lahendid.

4.3 Ülesanded

Arvestuslik ülesanne 4.1

Tähtaeg: 20. märts 2015. Olgu meil pall raadiusega üks ning olgu selle tihedus väiksem kui veel. Archimedese seaduse järgi jääb pall vette ujuma nii, et palli kogukaal võrdub väljatõrjutud vedeliku kaaluga. Viimasest võib ruumalade abil tuletada võrrandi

$$h^3 - 3 \cdot h^2 + 4 \cdot \rho_p = 0,$$

mille lahend h näitab, mitu pikkusühikut on pall veepiirist allpool. Siinjuures $\rho_p = \frac{20+\alpha}{60}$ on palli tihedus vee suhtes (vee tihedus on võetud $\rho_v = 1$). Leidke palli sügavus Mulleri meetodiga täpsusega $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon = 10^{-10}$. Esitage kogu lähendite jada $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$ kujul $augment(x, f(x))$. Leidke Mulleri meetodiga lisaks kõik võrrandi kolm lahendit (ka kompleksed), kui võtta $\rho_p = \frac{60+\alpha}{60}$.

Näpunäide. Tähistades $z = x - x_n$, saame Mulleri meetodis ruutpolünoomi $P(x)$ viia kujule

$$P(z + x_n) = a \cdot z^2 + b \cdot z + c,$$

kus

$$a = F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}), \quad b = F(x_n, x_{n-1}) + a \cdot (x_n - x_{n-1}), \quad c = f(x_n).$$

Sel juhul uueks lähendiks on $x_{n+1} = x_n + z_n$, kus z_n on mooduli poolest vähim,

$$z_n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$