5 Harilik iteratsioonimeetod lineaarvõrrandite süsteemi lahendamisel

5.1 Lineaarvõrrandite süsteem

Vaatleme lineaarvõrrandite süsteemi

$$Ax + b = 0, \tag{5.1}$$

kus A on $(n \times n)$-mõõtmeline ruutmaatriks. Võrrandisüsteem $Ax + b = 0$ on üheselt lahenduv parajasti siis, kui $\det A \neq 0$. Esitame süsteemi $Ax + b = 0$ kujul

$$x = Bx + b. \tag{5.2}$$

Tähistades

$$G(x) = Bx + b$$

näeme, et $G'(x) = B$. Kasutades maatriksinormi

$$B = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Bx\|$$

rollis 1-, 2- või ∞-normi, saame järgmise teoreetilise tulemuse.

5.2 Teooria

Teoreem 5.1

Kui kehtib üks järgmistest tingimustest:

$$\|B\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| < 1,$$

$$\|B\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| < 1,$$

$$\|B\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}|^2 \right)^{1/2} < 1,$$

siis harilik iteratsioonimeetod

$$\mathbf{x_{m+1}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x_m} + \mathbf{b}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.3}$$

koondub süsteemi $Ax + b = 0$ lahendiks x.

Märkus 5.1

Iteratsiooniprotsessi võib lõpetada, kui

$$\frac{q}{1-q} \|x_m - x_{m-1}\| \leq \varepsilon, \tag{5.4}$$

kus q on valitud selliselt, et

$$\|B\| \leq q < 1.$$

5.3 Mathcadi käsud

- Maatriksinormide $\|B\|_1$, $\|B\|_2$ ja $\|B\|_\infty$ jaoks on olemas vastavalt käsud

$$norm1(B), \quad norm2(B) \quad \text{ja} \quad normi(B).$$

- Vektorinormi $\|x-y\|$ jaoks võib kasutada maksimumnormi, näiteks

$$vnorm(x,y) := max\left(\overrightarrow{|x-y|}\right).$$

- Ühikmaatriksi saab käsuga *identity(n)*.
- Tavalise maatriksi saab täita ka jadamuutuja abil, näiteks:

$$i := 0\,..\,n-1, \quad j = 0\,..\,n-2, \quad A_{i,i} := i^2+20, \quad A_{j,j+1} := 2j-1.$$

- Nullidega täidetud maatriks või vektor luuakse, kui omistada viimane element, näiteks käsk

$$M_{200,200} := 0$$

tekitab (201×201)-mõõtmelise maatriksi.

5.4 Ülesanded

Arvestuslik ülesanne 5.1

Tähtaeg: 27. märts 2015. Lahendage hariliku iteratsioonimeetodiga järgmine $(n\times n)$-mõõtmeline süsteem:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

kus süsteemi maatriksis on nullist erinevad ainult kolm diagonaali ning $n = 50 + 2\alpha$.

Alglähendiks võtke nullvektor ning katsuge viia süsteem kujule $x = Bx + b$, kus $\|B\|_2 < 1$. Leidke lahend täpsusega $\varepsilon = 10^{-6}$. Mitu iteratsiooni selleks vaja läheb?

Näpunäide. Iteratsioonimeetodis on lähislahendi jaoks kasulik kasutada ainult kahte muutujat, näiteks $xuus$ ja $xvana$, sellisel juhul iteratsioonisamm on

$$xuus = G(xvana).$$

Loomulikult tuleb õigel hetkel muuta ka $xvana$ väärtust. Paberil kirjutatud x_m kuju ei ole seekord mõtet arvuti mälus hoida.