6 Iteratsioonimeetodid mittelineaarsete süsteemide lahendamisel

6.1 Võrrandite süsteemid

Vaatleme võrrandite süsteeme kujul

$$\left\{\begin{array}{ll} f_1(x_1,\dots,x_n) & = 0 \\ \cdots & \\ f_n(x_1,\dots,x_n) & = 0 \end{array}\right\} \quad \text{ehk} \quad F(x)=0, \tag{6.1}$$

kus $x=(x_1,\dots,x_n)$ on vektor, $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ on vektorfunktsioon $F(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))$. Olgu x^* võrrandi $F(x)=0$ lahend. Tähistame järjestikused lähendid

$$x^m=(x_1^m,\dots,x_n^m), \quad m=0,1,\dots.$$

Koondumist $x^m\to x^*$ võib vaadelda ruumis $\mathbb{R}^n$ mitmesuguste erinevate normide suhtes:

$\|x\|_\infty = \max\{\|x_1\|,\dots,\|x_n\|\}$	lõpmatusnorm, Mathcadis $max\left(\overrightarrow{\|x\|}\right)$.
$\|x\|_1 = \|x_1\|+\dots+\|x_n\|$	1-norm, Mathcadis $\sum\overrightarrow{\|x\|}$.
$\|x\|_2 = \left(\|x_1\|^2+\dots+\|x_n\|^2\right)^{1/2}$	2-norm, Mathcadis $\sqrt{\sum\overrightarrow{\|x\|^2}}$.
$\|x\|_p = (\|x_1\|^p+\dots+\|x_n\|^p)^{1/p}$	p-norm, $1\le p<\infty$, Mathcadis $\left(\sum\overrightarrow{\|x\|^p}\right)^{1/p}$.

6.2 Harilik iteratsioonimeetod

Esitame võrrandi $F(x)=0$ kujul $x=G(x)$.

Vastavalt alglähendile $x^0\in\mathbb{R}^n$ leiame lähendid

$$x^{m+1}=G(x^m) \quad \text{ehk} \quad \left\{\begin{array}{l} x_1^{m+1}=g_1(x_1^m,\dots,x_n^m) \\ \cdots \\ x_n^{m+1}=g_n(x_1^m,\dots,x_n^m) \end{array}\right\}, \quad m=0,1,2,\dots.$$

6.3 Seideli meetod

Seideli (või ka Seideli-Gaussi) meetod on oma olemuselt harilik iteratsioonimeetod, kus kasutatakse alati kõige uuemat informatsiooni. Leidub süsteeme, mille korral Seideli meetod koondub, aga harilik iteratsioonimeetod ei koondu ning vastupidi.

Vastavalt alglähendile $x^0\in\mathbb{R}^n$ leiame lähendid x^{m+1}, $m=0,1,2,\dots$ selliselt, et

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^{m+1}=g_1(x_1^m,x_2^m,\dots,x_n^m) \\ x_2^{m+1}=g_2(\mathbf{x_1^{m+1}},x_2^m\dots,x_n^m) \\ \cdots \\ x_n^{m+1}=g_n(\mathbf{x_1^{m+1}},\dots,\mathbf{x_{n-1}^{m+1}},x_n^m) \end{array}\right\}, \quad m=0,1,2,\dots.$$

6.4 Teooria

Olgu ruumis $\mathbb{R}^n$ fikseeritud mingi norm. Olgu B kinnine kera keskpunktiga a, raadiusega $r > 0$, s.t.

$$B = \bar{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x - a\| \leq r\}.$$

Teoreem 6.1

Olgu $G : B \to B$ ning eksisteerigu $q < 1$ nii, et $\|G(x) - G(y)\| \leq q\|x - y\|$ iga $x, y \in B$ korral. Siis võrrandil $x = G(x)$ on keras B parajasti üks lahend $x^* \in B$ ning iga alglähendi $x^0 \in B$ korral harilik iteratsioonimeetod koondub selleks lahendiks. Kehtib hinnang

$$\|x^m - x^*\| \leq \frac{q^m}{1-q}\|x^0 - x^1\|. \tag{6.2}$$

Märkus 6.1

Diferentseeruva funktsiooni G korral võib ahendavuse tingimuse asendada tingimusega

$$\|G'(x)\| \leq q < 1$$

iga $x \in B$ korral. Siin $G'(x)$ on nn. Jacobi maatriks, millega tuleb otseselt tegemist Newtoni meetodi juures.

Märkus 6.2

Enamlevinud maatriksinormid avalduvad kujul

$$\|G'(x)\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right|, \quad \|G'(x)\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right|, \quad \|G'(x)\|_2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right|^2\right)^{1/2}.$$

6.5 Ülesanded

Arvestuslik ülesanne 6.1

Tähtaeg: 27. märts 2015. Lahendage hariliku iteratsioonimeetodiga ja Seideli meetodiga võrrandite süsteem

$$\left\{\begin{aligned} 3\cdot x - \cos(y\cdot z) &= \tfrac{1}{2} \\ x^2 - 81\cdot(y+0.1)^2 + \sin(z) &= -1.06 \\ e^{-x\cdot y} + (5+\alpha)\cdot z &= \frac{3 - 10\cdot\pi}{3} \end{aligned}\right\}, \quad x^* \in B = \bar{B}((0,0,0), 1).$$

Iteratsioonimeetodi jaoks tuleks süsteem avaldada kujul $Gx = x$, milleks on mitmeid erinevaid võimalusi, kuid kõik need ei pruugi sobida.

Lahend leidke täpsusega 10^{-10}. Alglähendina prooviga näiteks vektoreid $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ja $(0,0,1)$. Tingimuse $\|G'(x)\| < 1$ arvulise kontrollimise jaoks on vaja leida $G'(x)$, mille jaoks on Mathcadis käsk **Jacob(G(x),x)**.