7 Newtoni meetod võrrandisüsteemide lahendamisel

7.1 Newtoni meetod

Vaatleme lineaarsete või mittelineaarsete võrrandite süsteeme kujul

$$\left\{\begin{array}{ll} f_1(x_1,\dots,x_n) & = 0 \\ \cdots & \\ f_n(x_1,\dots,x_n) & = 0 \end{array}\right\} \quad \text{ehk} \quad F(x) = 0, \tag{7.1}$$

kus $x = (x_1,\dots,x_n)$ on vektor, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on vektorfunktsioon $F(x) = (f_1(x),\dots,f_n(x))$. Tähistame järjestikused lähendid

$$x^m = (x_1^m,\dots,x_n^m), \quad m = 0,1,\dots.$$

Definitsioon 7.1

Eeldame, et funktsioonid f_i, $i = 1,\dots,n$, on diferentseeruvad, s.t. funktsioon F on diferentseeruv. Analoogiliselt funktsiooni f tuletisele $f'(x)$ defineerime vektorfunktsiooni F tuletise $F'(x)$ järgmiselt:

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}, \tag{7.2}$$

mida nimetatakse ka Jacobi maatriksiks ja tähistatakse $J(x)$.

Märkus 7.1

Mathcadis saab Jacobi maatriksit leida käsuga **Jacob(F(x),x)**.

Newtoni meetod. Vastavalt alglähendile $x^0 \in \mathbb{R}^n$ leiame lähendid

$$x^{m+1} = x^m - J^{-1}(x^m) \cdot F(x^m) \quad m = 0,1,2,\dots,$$

kus $J^{-1}(x) = F^{-1}(x)$ on Jacobi maatriksi pöördmaatriks.

Märkus 7.2

Newtoni meetod on teostatav, kui Jacobi maatriks on pööratav kohal x^m ehk $\det(J(x^m)) \neq 0$. Kui see nii ei ole, siis praktikas kasutatakse hariliku iteratsioonimeetodi asemel Broydeni meetodit, mida me siinkohal lähemalt ei vaatle.

7.2 Newtoni meetodi erijuhud

Newtoni meetod on üpris tõhus vahend, kuid see nõuab **igal sammul** Jacobi maatriksi pöördmaatriksi arvutamist (mille tehete arv on suurusjärku n^3). Suurte süsteemide korral on see väga tõsine väljakutse ka parimate arvutite jaoks. Suured, tuhandetest võrranditest koosnevad, süsteemid tekivad näiteks osatuletistega diferentsiaalvõrrandite (süsteemide) rajaülesannete lahendamisel.

Modifitseeritud Newtoni meetod. Jacobi maatriksi pöördmaatriks arvutatakse ainult alglähendi x^0 jaoks

$$A := J^{-1}(x^0),$$

saades meetodi

$$x^{m+1} = x^m - A \cdot F(x^m) \quad m = 0, 1, 2, \dots.$$

Loomulikult on selline meetod aeglasemalt koonduv kui esialgne Newtoni meetod, kuid teisalt tehakse siin igal sammul oluliselt vähem tehteid.

Newtoni meetod kui LVS. Praktikas on Newtoni meetodit kasulik läbi viia lineaarvõrrandite süsteemina

$$\left\{ \begin{aligned} J(F(x^m)) \cdot y &= -F(x^m) \\ x^{m+1} &= x^m + y \end{aligned} \right\}, \quad m = 0, 1, 2, \dots.$$

Viimane kulutab üldjuhul kolm korda vähem tehteid, kui algne Newtoni meetod Jacobi pöördmatriksi leidmisega. Sellisel juhul on LVS-i $G \cdot y = B$ lahendamiseks kasulik kasutada mingit programmisisest valmis käsku, Mathcadis näiteks $\mathbf{y} = \mathbf{lsolve}(\mathbf{G}, \mathbf{B})$.

7.3 Ülesanded

Näide. Leiame kuupvõrrandi $y = x^3$ ja ringjoone $x^2 + y^2 = 1$ lõikepunktid Newtoni meetodiga. Defineerime esiteks vektorfunktsiooni F:

$$F(u) = \begin{pmatrix} u_1 - u_0^3 \\ u_0^2 + u_1^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad \text{kus} \quad u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Leiame Jacobi maatriksi

$$J(u) = \begin{pmatrix} -3u_0^2 & 1 \\ 2u_0 & 2u_1 \end{pmatrix}.$$

Võtame alglähendiks $u^0 = (1, 2)^T$, siis

$$F(u^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad J(u^0) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Newtoni meetodi esimene samm on seega

$$u^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Arvestuslik ülesanne 7.1

Tähtaeg: 10. aprill 2015. Olgu antud kolm kerapinda raadiusega

$$r = 4 + \frac{\alpha}{10},$$

keskpunktidega $(1, -2, 0)$, $(-2, 2, -1)$ ja $(4, -2, 3)$.

Leidke kõigi kolme sfääri ühised kaks punkti Newtoni ja modifitseeritud Newtoni meetodiga täpsusega $\varepsilon = 10^{-8}$. Leidke ka kasutatud iteratsioonide arv ning kontrollige, et saadud lahendid tõepoolest asuvad kõigi kolme kera pinnal. Võib juhtuda, et koondumise õnnestumiseks peab proovima erinevaid alglähendeid.