8 Funktsioonide lähendamine. Lagrange'i interpolatsioonipolünoom

8.1 Interpoleerimine

Olgu antud erinevad reaalarvud $x_0, \ldots, x_n$ ($x_i \neq x_j$, kui $i \neq j$) ning arvud $f_0, \ldots, f_n$. Ülesandeks on leida selline funktsioon f, mille korral

$$f(x_i) = f_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Teisiti, leida funktsioon f, mille graafik läbib **kõikides** sõlmedes x_i etteantud punkte (x_i, f_i). Arve $x_0, \ldots, x_n$ nimetatakse ka *interpolatsioonisõlmedeks*.

Kuigi sellise funktsiooni konstrueerimiseks on olemas palju erinevaid võimalusi, siis arvutite jaoks on üks kõige naturaalsemaid lahendusi lähendamine polünoomidega. Seda sellepärast, et polünoomide arvutamiseks vajatakse vaid liitmist, lahutamist ja korrutamist (näiteks $x^3 = x \cdot x \cdot x$) ning need tehted on arvutis väga hästi defineeritud.

8.2 Lagrange'i interpolatsioonipolünoom

Definitsioon 8.1

Olgu antud sõlmed $x_0, \ldots, x_n$. Funktsioone

$$L_{n,i}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, \ldots, n \tag{8.1}$$

nimetatakse *Lagrange'i fundamentaalpolünoomideks.*

Märkus 8.1

On lihtne kontrollida, et Lagrange'i fundamentaalpolünoomid $L_{n,i}(x)$ rahuldavad seost

$$L_{n,i}(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{kui } j = i, \\ 0, & \text{kui } j \neq i, \end{cases} \qquad j = 0, \ldots, n.$$

Definitsioon 8.2

Funktsiooni kujul

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot L_{n,i}(x) \tag{8.2}$$

nimetatakse *Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiks.*

Märkus 8.2

Eelmise märkus põhjal on lihtne veenduda, et

$$P_n(x_j) = f_j, \quad j = 0, \ldots, n,$$

s.t. me oleme konstrueerinud funktsiooni, mille väärtused kõikides sõlmedes $x_0, \ldots, x_n$ ühtivad etteantud väärtustega $f_0, \ldots, f_n$.

8.3 Teooria

Teoreem 8.1

Polünoomidega interpoleerimise põhiteoreem. Olgu tasandil antud $n+1$ erinevat punkti $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$. Siis leidub üks ja ainult üks ülimalt n-järku polünoom P, mille korra

$$P(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Märkus 8.3

Teoreemis sõnastatud „ülimalt n-järku“ tähendab, et polünoomi järk võib olla ka väiksem kui n, kuid kindlasti mitte kõrgem kui n. Näiteks $n = 2$ korral, kui kõik kolm punkti asuvad ühel sirgel, siis on polünoomiks sirge, mitte parabool.

Teoreem 8.2

Interpolatsiooniviga. Olgu antud funktsioon $y = f(x)$, mis on $(n+1)$-korda pidevalt diferentseeruv lõigus $[a, b]$. Olgu antud interpolatsioonisõlmed $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ ning olgu P_n punkte $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ interpoleeriv polünoom. Siis interpolatsiooniviga suvalises punktis $x \in [a, b]$ avaldub valemiga

$$f(x) - P_n(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_n)}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (a, b). \tag{8.3}$$

Märkus 8.4

Kõrget järku polünoomidega lähendamine on ebastabiilne lähteandmete suhtes. Sellepärast kasutatakse praktikas suure n korral tihti lähendamist madalamat järku splainidega (eriti kuupsplainidega), mida me antud kursuses lähemalt ei vaatle.

8.4 Ülesanded

Arvestuslik ülesanne 8.1

Tähtaeg: 10. aprill 2015. Leidke 20. järku Lagrange'i interpolatsioonipolünoom, mis interpoleeriks funktsiooni

$$f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{x + \alpha}{2}\right).$$

punktides $(-10, f(-10)), (-9, f(-9)), \ldots, (9, f(9)), (10, f(10))$. Kandke ühele joonisele funktsiooni ja polünoomi graafik ning interpolatsioonipunktid.

Ilma et te teaks, mis on Runge fenomen, tunnete te selle ilmselt kohe ära. Tabelis on antud maailma õlitööstuse kogutoodang miljonites barrelites päeva kohta.

Aasta	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Toodang ($\times 10^6$)	67.1	68.0	69.8	72.0	73.4	72.1	74.7	74.5	74.1	76.8

Leidke 9. järku Lagrange'i interpolatsioonipolünoom ning koostage selle graafik koos kasutatud lähteandmetega. Kas leitud polünoomi abil õnnestuks ligikaudu leida ka toodang aastal 1993 ja 2004? Proovige koostada 4. järku polünoom, kasutades andmeid ainult paarisaastatel. Koostage polünoomi ja lähteandmete graafik. Milline on seekord toodangu suurus aastatel 1993 ja 2004?