

9 Funktsioonide lähendamine. Newtoni interpolatsioonipolünoom

9.1 Diferentssuhted

Olgu antud erinevatele argumentide väärtustele x_0, \dots, x_n vastavad funktsiooni f väärtused $f(x_0), \dots, f(x_n)$.

Definitsioon 9.1

Funktsiooni f esimest järku diferentssuhteks nimetatakse avaldist

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}, \quad i \neq j. \quad (9.1)$$

Definitsioon 9.2

Funktsiooni f teist järku diferentssuhteks nimetatakse avaldist

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_i, x_j) - f(x_j, x_k)}{x_i - x_k}, \quad i \neq j, \quad j \neq k, \quad i \neq k. \quad (9.2)$$

Definitsioon 9.3

Funktsiooni f k -järku diferentssuhteks nimetatakse avaldist

$$f(x_{i_0}, \dots, x_{i_k}) = \frac{f(x_{i_0}, \dots, x_{i_{k-1}}) - f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})}{x_{i_0} - x_{i_k}}. \quad (9.3)$$

Siinjuures on kõik indeksid i_0, \dots, i_k paarikaupa erinevad.

Märkus 9.1

Kehtib valem

$$f(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}. \quad (9.4)$$

9.2 Newtoni interpolatsioonipolünoom

Definitsioon 9.4

Olgu antud sõlmed x_0, \dots, x_n . Funktsioone kujul

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1) \cdot (x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots + f(x_0, \dots, x_n) \cdot (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \quad (9.5)$$

nimetatakse *Newtoni interpolatsioonipolünoomiks*.

Märkus 9.2

Newtoni interpolatsioonipolünoom annab tulemuseks sama polünoomi, mis Lagrange'i interpolatsioonipolünoom, kasutades samal ajal veidi ökonoomsemat arvutuskeemi.

9.3 Skemaatiline polünoomi koostamine

Newtoni interpolatsioonipolünoomi koostamiseks on lihtne kasutada järgmist „seaduslikku“ püramiidskeemi. Toome näite $n = 3$ jaoks. Vajalikud kordajad loetakse kokku püramiidi ülemise serva pealt.

$$\begin{array}{l|l}
 x_0 & \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \\
 & \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1)}{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1} \\
 x_1 & f(x_1) \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_2} \\
 & f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \qquad \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)}{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_3} \\
 x_2 & f(x_2) \qquad \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_2, x_3)}{x_1 - x_3} \\
 & f(x_2, x_3) = \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} \\
 x_3 & f(x_3)
 \end{array}$$

Toome arvilise näite. Olgu antud sõlmed $-1, 0, 2, 4$ ning vastavad väärtused $-5, -1, 1, -13$. Sel juhul

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$
-1	-5			
		$\frac{-5 - (-1)}{-1 - 0} = 4$		
0	-1		$\frac{4 - 1}{-1 - 2} = -1$	
		$\frac{-1 - 1}{0 - 2} = 1$		$\frac{-1 - (-2)}{-1 - 4} = -\frac{1}{5}$
2	1		$\frac{1 - (-7)}{0 - 4} = -2$	
		$\frac{1 - (-13)}{2 - 4} = -7$		
4	-13			

Seega otsitav Newtoni interpolatsioonipolünoom avaldub kujul

$$P_3(x) = -5 + 4 \cdot (x + 1) + (-1) \cdot (x + 1) \cdot x + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot (x + 1) \cdot x \cdot (x - 2).$$

Paneme tähele, et tegelikult $P_0(x) = -5$, $P_1(x) = P_0(x) + 4 \cdot (x + 1)$ ja $P_2(x) = P_1(x) + (-1) \cdot (x + 1) \cdot x$. Kui on vaja koostada kõrgemat järku polünoom, näiteks 4-järku, siis võib lisada uue sõlme püramiidi lõppu ning arvutada juurde vaid uus „alumine serv“ (juba tehtud arvutused jäävad alles).

9.4 Ülesanded

Arvestuslik ülesanne 9.1

Tähtaeg: 17. aprill 2015. Lähendage Newtoni interpolatsioonipolünoomi abil funktsiooni $f(x) = |x|$ piirkonnas $x \in [-\alpha, \alpha]$, kasutades sõlmedena väärtusi

$$x_i = -\alpha + 2\alpha \cdot \frac{i}{n}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Hinnake viga $|P_n(x) - f(x)|$, leides maksimaalse hälbe kümme korda tihedamal võrgul, s.t.

$$\varepsilon_n = \max_{i=0, \dots, 10 \cdot n} |P_n(z_i) - f(z_i)|, \quad z_i = -\alpha + 2\alpha \cdot \frac{i}{10 \cdot n}.$$

Leidke ε_n vähemalt kümne erineva $n \leq 30$ korral, sealhulgas $n = 30$ korral. Koostage nende kümne n jaoks P_n ja f graafikud (võib kanda kõik ühele või paarile graafikule).