Diskreetse matemaatika 1. töö järeltöö

Lahendused

10. jaanuar 2013

1. Olgu A, B, C mingid hulgad. Tõestada vahetu arutlusega (st otse definitsioonidest lähtudes), et kui $(A \cup B) \setminus (A \cup C) \neq \emptyset$, siis $B \setminus C \neq \emptyset$.

Lahendus. Eeldame, et $(A \cup B) \setminus (A \cup C) \neq \emptyset$. Siis leidub element x nii, et $x \in (A \cup B) \setminus (A \cup C)$. Järelikult $x \in A \cup B$ ja $x \notin A \cup C$. Viimasest seosest saame, et $x \notin A$ ja $x \notin C$. Et $x \in A \cup B$ ja $x \notin A$, siis $x \in B$. Seega oleme saanud, et $x \in B$ ja $x \notin C$. Järelikult $x \in B \setminus C$ ehk $B \setminus C \neq \emptyset$.

2. Klassis on 8 poissi ja 12 tüdrukut. Kas võib esineda olukord, kus korraga kehtivad järgmised tingimused: 1) pooltele poistest meeldivad igaühele täpselt pooled tüdrukutest; 2) ülejäänud pooltele poistest meeldib igaühele täpselt 5 tüdrukut; 3) pooled tüdrukutest meeldivad igaüks täpselt pooltele poistest; 4) ülejäänud pooled tüdrukutest meeldivad igaüks täpselt 3 poisile? Kui selline olukord saab esineda, siis tuua vastav näide; kui ei, siis põhjendada.

Lahendus. Vaatleme kahealuselist graafi $G = (X \cup Y, E)$, kus aluse X moodustavad poisid ja aluse Y tüdrukud ning poisi x ja tüdruku y vahe on serv parajasti siis, kui poisile x meeldib tüdruk y. Punktidest 1) ja 2) saame, et aluses X on 4 tippu astmega 6 ja 4 tippu astmega 5. Seega aluse X tippudega on insidentsed kokku $4 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 44$ serva. Punktidest 3) ja 4) saame, et aluses Y on 6 tippu astmega 4 ja 6 tippu astmega 3. Seega aluse Y tippudega on intsidentsed kokku $6 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = 42$ serva. See on vastuolu, sest ühelt poolt peaks graafis olema 44 serva, aga teiselt poolt 42 serva. Järelikult sellist olukorda esineda ei saa.

3. Graafil on m serva. Graafi tippudest on k tippu astmega r ja ülejäänud tipud astmega $r + 1$. Leida graafi tippude arv.

Lahendus. Olgu n graafi tippude arv. Siis graafi tipuastmete summa on $kr + (n - k)(r + 1)$. Teiselt poolt on tipuastmete summa $2m$. Järelikult $kr + (n - k)(r + 1) = 2m$ ehk $kr + n(r + 1) - kr - k = 2m$, millest $n = \frac{2m+k}{r+1}$.

4. Suunatud graafi G tipud on nummerdatud nii, et iga kaare algtipp on väiksema numbriga kui lõpptipp. Tõestada, et graafis G leidub tipp, mille sisendaste on 0, ja tipp, mille väljundaste on 0.

Lahendus. Olgu v graafi kõige väiksema numbriga tipp. Siis ei leidu tippu v sisenevat kaart, sest sellise kaare algtipp peaks olema veel väiksema numbriga kui tipp v. Järelikult on tipu v sisendaste 0. Analoogiliselt saame, et kui w on kõige suurema numbriga tipp, siis ei leidu sellest tipust lähtuvat kaart ehk tipu w väljundaste on 0.

5. Graafi G tippude hulk on $V(G) = \{0, 1, \ldots, 100\} \times \{0, 1, \ldots, 100\}$ ja servade hulk $E(G) = \{\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) : x_1 = x_2$ ja $y_1 + 2 = y_2 \pmod{101}$ või $y_1 = y_2$ ja $x_1 + 3 = x_2 \pmod{101}\}$. Teha kindlaks, kas graaf G on sidus.

Lahendus. Olgu $y \in \{0, 1, \ldots, 100\}$ fikseeritud. Graafis leidub tsükkel $(0, y)$ – $(2, y)$ – $(4, y)$ – $\ldots$ – $(100, y)$ – $(1, y)$ – $(3, y)$ – $\ldots$ – $(99, y)$ – $(0, y)$. Seega fikseeritud y korral pääseb igast tipust (x_1, y) igasse teise tippu (x_2, y). Olgu nüüd $x \in \{0, 1, \ldots, 100\}$ fikseeritud. Graafis leidub tsükkel $(x, 0)$ – $(x, 3)$ – $\ldots$ – $(x, 99)$ – $(x, 1)$ – $(x, 4)$ – $\ldots$ – $(x, 100)$ – $(x, 2)$ – $(x, 5)$ – $\ldots$ – $(x, 97)$ – $(x, 0)$. Seega fikseeritud $x \in \{0, 1, \ldots, 100\}$ korral pääseb igast tipust (x, y_1) igasse teise tippu (x, y_2). Kui nüüd (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) on kaks suvalist tippu, siis saame tipust (x_1, y_1) minna tippu (x_2, y_1) ning sealt tippu (x_2, y_2). Järelikult graaf on sidus.