Diskreetse matemaatika 3. töö järeltöö

Lahendused

28. jaanuar 2013

1. Olgu $m \geqslant 0$ ja $n \geqslant 1$ täisarvud. Leida summa

$$\sum_{i=0}^{m}(n+i)\binom{n-1+i}{n-1}.$$

Lahendus. Kasutades võrdust $r\binom{r-1}{k-1} = k\binom{r}{k}$ (10. praktikum, ülesanne 1a), binoomkordajate sümmeetrilisust ning võrdust $\sum_{i=0}^{n}\binom{r+i}{i} = \binom{r+n+1}{n}$ (10. praktikum, ülesanne 5a), saame

$$\sum_{i=0}^{m}(n+i)\binom{n-1+i}{n-1} = \sum_{i=0}^{m} n\binom{n+i}{n} =$$
$$= n\sum_{i=0}^{m}\binom{n+i}{n} = n\sum_{i=0}^{m}\binom{n+i}{i} = n\binom{n+m+1}{m}.$$

2. Reas seisab 6 inimest. Saatejuht võtab kasti, kus on 10 ühesugust palli, ning annab esimesele kolmele inimesele igaühele üks või kaks palli. Seejärel annab ta kasti viimasele kolmele inimesele, kes jaotavad järelejäänud pallid omavahel (seejuures võib mõni inimestest ka pallidest ilma jääda). Mitmel erineval viisil palle sedasi jaotada saab?

Lahendus. Esimese kolme inimese pallide arvu loend on $z + z^2$, viimase kolme inimese loend aga $1 + z + z^2 + \ldots = \frac{1}{1-z}$. Kõigi jaotamisvõimaluste loend on seega

$$(z+z^2)^3 \cdot \frac{1}{(1-z)^3} = (z^3 + 3z^4 + 3z^5 + z^6) \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{n} z^n.$$

Kokku on jagada 10 palli, seega on ülesande vastus liikme z^{10} kordaja. See liige saab tekkida järgmistel viisidel: z^3z^7, z^4z^6, z^5z^5 või z^6z^4. Järelikult on selle liikme kordaja

$$1\cdot\binom{9}{7} + 3\cdot\binom{8}{6} + 3\cdot\binom{7}{5} + 1\cdot\binom{6}{4} = 198.$$

3. Kui palju saab tähtedest A, B, C koostada n-tähelisi sõnu, kus iga täht, mis sõnas esineb, esineb seal paarisarv kordi?

Lahendus. Ülesande tingimus tähendab, et iga täht esineb sõnas 0 või 2 või 4 jne korda. Ühest tähest koostatud sõnade arvude eksponentsiaalne genereeriv funktsioon on

$$1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot\frac{z^n}{n!}=\frac{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

Kolmest tähest koostatud sõnade arvu eksponentsiaalne genereeriv funktsioon on

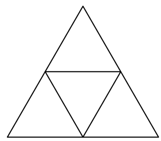
$$\left(\frac{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}{2}\right)^3=\frac{\mathrm{e}^{3z}+3\mathrm{e}^z+3\mathrm{e}^{-z}+\mathrm{e}^{-3z}}{8}.$$

Liikme $\frac{z^n}{n!}$ kordajaks saame

$$\frac{3^n+3+3(-1)^n+(-3)^n}{8}=\frac{(3^n+3)(1+(-1)^n)}{8},$$

mis ongi ülesande vastus.

4. Mitmel erineval viisil saab sinistest, punastest ja kollastest ühiklõikudest kokku panna joonisel näidatud kujundi, kui kujundeid, mis on saadavad üksteisest pööramiste ja peegeldamistega, ei eristata?



Lahendus. Leiame kujundi teisenduste rühma tsüklilisuse indikaatori. Võimalikud teisendused on kolmnurga pöörded ja peegeldused, see teisenduste rühm toimib kujundi ühiklõikude hulgal. Teisendused annavad tsüklilisuse indikaatorisse järgmised panused: samasusteisendus w_1^9, pööre 120° ja 240° kumbki w_3^3, peegeldused tippu ja vastasskülje keskpunkti ühendavast sirgest (kokku 3 teisendust) igaüks $w_1w_2^4$. Tsüklilisuse indikaator on järelikult

$$Z(w_1,w_2,\ldots,w_9)=\frac{1}{6}(w_1^9+2w_3^3+3w_1w_2^4).$$

Olgu s, p ja k vastavalt sinise, punase ja kollase ühiklõigu kaal. Kujundi koostamisvõimaluste arvude loend on siis

$$\begin{aligned}&Z(s+p+k,s^2+p^2+k^2,\ldots,s^9+p^9+k^9)=\\&\quad=\frac{1}{6}\big((s+p+k)^9+2(s^3+p^3+k^3)^3+3(s+p+k)(s^2+p^2+k^2)^4\big).\end{aligned}$$

Lugedes sinise, punase ja kollase ühiklõigu kaaluks 1, saame ülesande vastuseks

$$Z(3, 3, \ldots, 3) = \frac{1}{6}(3^9 + 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3 \cdot 3^4) = 3411.$$