Diskreetse matemaatika 1. kontrolltöö
Lahendused

27. september 2012

1. Tõestada vahetu arutlusega, et ükskõik milliste hulkade X, Y, Z korral kehtib väide: kui $Y \subseteq Z$, siis $X \cap Z' \subseteq X \cap Y'$.

Lahendus. Olgu $x \in X \cap Z'$. Siis $x \in X$ ja $x \in Z'$. Viimasest seosest $x \notin Z$. Et $Y \subseteq Z$ ja $x \notin Z$, siis ammugi $x \notin Y$. Järelikult $x \in Y'$. Et $x \in X$ ja $x \in Y'$, siis $x \in X \cap Y'$.

2. Teha kindlaks, kas täisarvude hulgal $\mathbb{Z}$ määratud relatsioon

$$\varrho = \{(x, y) : x + |y| = y + |x|\}$$

on ekvivalentsirelatsioon.

- Kui relatsioon on ekvivalentsirelatsioon, siis kirjeldada tema ekvivalentsiklasse (faktorhulka).
- Kui relatsioon ei ole ekvivalentsirelatsioon, siis leida vähim relatsioon, mis sisaldab seda relatsiooni ja on ekvivalentsirelatsioon.

Lahendus. Relatsioon on ekvivalents.

- Relatsioon on refleksiivne, sest iga täisarvu x korral $x+|x| = x+|x|$, st $(x, x) \in \varrho$.
- Relatsioon on sümmeetriline, sest kui $x+|y| = y+|x|$, siis $y+|x| = x+|y|$ võrduse sümmeetrilisuse tõttu.
- Relatsioon on transitiivne, sest kui $x+|y| = y+|x|$ ja $y+|z| = z+|y|$, siis liites need kaks võrdust, saame $x+|y|+y+|z| = y+|x|+z+|y|$, millest $x + |z| = z + |x|$.

Ekvivalentsiklasside leidmiseks vaatleme eraldi juhte $x \geqslant 0$ ja $x < 0$.

- Kui $x \geqslant 0$, siis $|x| = x$ ja relatsiooni definitsioonis olev võrdus omandab kuju $x + |y| = y + x$ ehk $|y| = y$ ehk $y \geqslant 0$. Järelikult on iga mittenegatiivne täisarv relatsioonis parajasti iga mittenegatiivse täisarvuga ehk üks ekvivalentsiklass on $\{x : x \geqslant 0\}$.
- Kui $x < 0$, siis $|x| = -x$ ja võrdus on kujul $x + |y| = y - x$ ehk $2x = y - |y|$. See võrdus saab olla rahuldatud ainult siis, kui $y < 0$, mispuhul $|y| = -y$ ja võrdus on kujul $2x = 2y$ ehk $x = y$. Järelikult on iga negatiivne täisarv relatsioonis ainult iseendaga ning igaüks neist moodustab omaette ekvivalentsiklassi.

Antud relatsiooni ekvivalentsiklassid on seega $\{x\colon x \geqslant 0\} \cup \bigcup_{x=1}^{\infty}\{-x\}$.

3. Leida tingimus, mida peab rahuldama täisarv n, et leiduks n-tipuline lihtgraaf, kus paarisastmega ja paaritu astmega tippude arv on võrdsed. Tõestada, et iga seda tingimust rahuldava täisarvu n korral selline graaf leidub. Tõestada, et ühegi seda tingimust mitterahuldava täisarvu n korral sellist graafi ei leidu.

Lahendus. Tingimus on see, et arv n peab olema positiivne ja jaguma 4-ga.

- Kui n jagub 4-ga, st $n = 4k$ mingi täisarvu $k > 0$ korral, siis vaatleme $4k$-tipulist graafi, kus $2k$ tippu on paarikaupa ühendatud servadega (k serva) ning ülejäänud $2k$ tippu on isoleeritud. Sellel graafil on $2k$ tippu paaritu astmega 1 ja $2k$ tippu paarisastmega 0.
- Kui n ei jagu 4-ga, siis oletades, et ülesande tingimustele vastav graaf leidub, peab seal tipuastmete teoreemi põhjal olema paarisarv paaritu astmega tippu. Olgu selles graafis $2k$ paaritu astmega tippu. Et paarisastmega tippe peab olema samuti $2k$, siis kokku on graafil $4k$ tippu ehk tippude arv jagub 4-ga, vastuolu.

4. Tõestada, et igast vähemalt kahetipulisest sidusast graafist, kus ei leidu tippe astmega 1, saab kustutada serva nii, et graaf jääb sidusaks.

Lahendus. Kui vähemalt kahetipuline graaf on sidus, siis seal ei leidu tippe astmega 0. Ülesande tingimuste põhjal ei leidu seal ka tippe astmega 1. Järelikult on kõik graafi tipud astmega vähemalt 2. Teame loengus tõestatud teoreemist, et igas graafis, kus iga tipu aste on vähemalt $k \geqslant 2$, leidub tsükkel pikkusega vähemalt $k + 1$. Järelikult antud graafis leidub tsükkel. Kustutame sellest tsüklist suvalise serva e ning vaatleme suvalisi tippe u ja v. Kui esialgses graafis leidus tipust u tippu v ahel, mis ei läbinud serva e, siis jääb see ahel alles ka pärast serva e kustutamist. Kui aga ahel tipust u tippu v läbis serva e, siis leidub pärast serva kustutamist nende tippude vahel ahel, mis erineb senisest ahelast ainult selle poolest, et läbib serva e asemel tsükli ülejäänud osa.

Märkus. Loengu teoreemi kasutamise asemel võime tsükli olemasolu tõestada ka otse. Valime suvalise tipu u ning hakkame sealt liikuma mööda servi, liikudes igal sammul tippu, mida me pole veel külastanud. Tippude arvu lõplikkuse tõttu jõuame varem või hiljem tagasi mingisse juba külastatud tippu (esialgsesse või vahepealsessse). Teekond sellest tipust sinna tagasi moodustabki tsükli.