Diskreetse matemaatika 2. kontrolltöö
Lahendused

15. november 2012

1. Leida kõik naturaalarvud n, mille korral n-tipulise tsükli täiend $\overline{C}_n$ on:

a) Euleri graaf;

b) Hamiltoni graaf.

Lahendus. a) Graaf $\overline{C}_n$ on olemas parajasti siis, kui graaf C_n on olemas, ehk parajasti juhul $n \geqslant 3$. Teame, et sidus graaf on Euleri graaf parajasti siis, kui tema iga tipu aste on paarisarv. Seega peame leidma kõik naturaalarvud n, mille korral $\overline{C}_n$ on sidus ja paarisastmeliste tippudega.

Et graafi C_n iga tipu aste on 2 ja n-tipulise täisgraafi K_n iga tipu aste on $n-1$, siis graafis $\overline{C}_n$ on iga tipu aste $n-1-2=n-3$. Järelikult kui n on paarisarv, siis on graafi $\overline{C}_n$ iga tipu aste paaritu ning see graaf ei ole Euleri graaf. Kui $n=3$, siis $\overline{C}_n$ ei ole Euleri graaf, sest ta pole sidus. Kui n on 3-st suurem paaritu arv, siis on iga tipu aste $n-3$ paarisarv, samuti on graaf sidus, sest ühest tipust on võimalik liikuda mööda servi igasse ülejäänud tippu kas ühe või kahe sammuga. Järelikult on graaf sel juhul Euleri graaf. Kokkuvõttes saame, et $\overline{C}_n$ on Euleri graaf parajasti siis, kui $n=2k+1$, kus $k=2, 3, \ldots$

b) Ore teoreemi põhjal on graaf Hamiltoni graaf siis, kui iga kahe mitte-naabertipu u ja v korral $\deg(u)+\deg(v) \geqslant n$. Et graafis $\overline{C}_n$ on iga tipu aste $n-3$, siis omandab see tingimus kuju $(n-3)+(n-3) \geqslant n$ ehk $2n-6 \geqslant n$ ehk $n \geqslant 6$. Järelikult sel juhul on graaf Hamiltoni graaf. Jääb läbi vaadata ülejäänud juhud. Kui $n=3$ või $n=4$, siis $\overline{C}_n$ ei ole Hamiltoni graaf, sest tippude astmed on väiksemad kui 2. Kui $n=5$, siis $\overline{C}_n$ on viietipuline tsükkel, mis on Hamiltoni graaf. Kokkuvõttes, $\overline{C}_n$ on Hamiltoni graaf parajasti siis, kui $n \geqslant 5$.

2. Antud on kahealuseline graaf G alustega X ja Y, mille puhul leidub selline naturaalarv k, et aluse X iga tipu x korral $\deg(x) \geqslant k$ ja aluse Y iga tipu y korral $\deg(y) \leqslant k$. Tõestada, et graafis G leidub kooskõla, mis katab kõik aluse X tipud.

Lahendus. Olgu $S \subseteq X$ suvaline tippude hulk ning s hulga S tippudest väljuvate servade arv. Et aluse X iga tipu aste on vähemalt k, siis $s = \sum_{v \in S} \deg(v) \geqslant k|S|$. Et iga hulga S tippudest väljuva serva teine otstipp kuulub hulka $N(S)$ ning seal on iga tipu aste ülimalt k, siis $s \leqslant$

$\sum_{v\in N(S)} \deg(v) \leqslant k|N(S)|$. Järelikult $k|S| \leqslant s \leqslant k|N(S)|$ ehk $|N(S)| \geqslant |S|$. Halli teoreemi põhjal leidub kooskõla, mis katab hulga X kõik tipud.

3. Olgu $G = (V, E)$ graaf ja k naturaalarv. Tõestada, et kui iga tippude hulga $S \subseteq V$ korral kehtib $\mathrm{odd}(G \setminus S) \leqslant |S| + |V| - 2k$, siis graafis G leidub kooskõla, mis sisaldab k serva.

Lahendus. Avaldades antud võrratusest k, näeme, et see võrratus on samaväärne võrratusega

$$k \leqslant \frac{1}{2}\big(|V| + |S| - \mathrm{odd}(G \setminus S)\big).$$

Et viimane võrratus kehtib iga $S \subseteq V$ korral, siis kehtib ta ka selle S korral, mis muudab parema poole väärtuse minimaalseks. Järelikult

$$k \leqslant \min_{S\subseteq V} \frac{1}{2}\big(|V| + |S| - \mathrm{odd}(G \setminus S)\big).$$

Tutte'i-Berge'i valemi põhjal on parem pool võrdne graafi G maksimaalse kooskõla võimsusega. Seega võime võtta graafis G mingi maksimaalse kooskõla ja eemaldada sealt niipalju servi, et järele jääks kooskõla võimsusega k.

Teine lahendus. Kui valida $S = \emptyset$, siis saame ülesande tingimuse põhjal $0 \leqslant \mathrm{odd}(G) \leqslant |V| - 2k$ ehk $|V| \geqslant 2k$. Lisame graafile $|V| - 2k$ uut tippu ning ühendame igaühe neist graafi kõigi ülejäänud tippudega. Sellega saame graafi H, millel on $2|V| - 2k$ tippu. Vaatleme suvalist hulka $S \subseteq V(H)$. Kui see ei sisalda kõiki uusi tippe, siis $H \setminus S$ on sidus ja $\mathrm{odd}(H \setminus S) \leqslant |S|$. Vastasel korral $\mathrm{odd}(H\setminus S) = \mathrm{odd}(G\setminus(S\cap V)) \leqslant |S\cap V| + |V| - 2k = |S\cap V| + |S\setminus V| = |S|$. Järelikult rahuldab H Tutte'i teoreemi tingimust, mille tõttu graafis H leidub täielik kooskõla. Hulga V tippe, mis on selles kooskõlas ühendatud mõne lisatud tipuga, on ülimalt $|V| - 2k$. Järelikult vähemalt $2k$ tippu hulgast V on ühendatud omavahel. Nendevahelised servad moodustavad kooskõla, mis sisaldab vähemalt k serva.

4. Tõestada, et kui G lihtgraaf, millel on 11 tippu, siis vähemalt üks graafidest G ja $\overline{G}$ ei ole tasandiline.

Lahendus. Oletame, et G ja $\overline{G}$ on mõlemad tasandilised. Olgu m graafi G servade arv. Et 11-tipulisel täisgraafil on $11 \cdot 10 / 2 = 55$, serva, siis graafi $\overline{G}$ servade arv on $55 - m$. Euleri teoreemi järelduse põhjal kehtivad võrratused $m \leqslant 3 \cdot 11 - 6$ ja $55 - m \leqslant 3 \cdot 11 - 6$ (need võrratused kehtivad ka siis, kui G või $\overline{G}$ on mittesidus, sest sidusate komponentide vahele serva lisamisel graafi tasandilisus säilib). Pärast lihtsustamist annab esimene võrratus $m \leqslant 27$ ning teine $m \geqslant 28$. Tekkis vastuolu. Järelkult ei saa G ja $\overline{G}$ olla korraga tasandilised.

5. Olgu G mingi n-tipuline graaf, mis ei ole täisgraaf K_n. Kirjeldada meetodit (algoritmi), kuidas saab graafi G tipud värvida ülimalt $n-1$ värviga.

Lahendus. Kui G ei ole täisgraaf, siis leidub seal kaks tippu u ja v, mille vahel serv puudub. Värvime need tipud ühte värvi. Ülejäänud $n-2$ tippu värvime igaüks ise värvi. Sellega on graafi tipud värvitud $n-1$ värviga. See värvimine on korrektne, sest ainsad kaks ühte värvi tippu u ja v on servaga ühendamata.