Diskreetne matemaatika 2012

11. praktikum

Reimo Palm

Genereeriv funktsioon on formaalne astmerida, mille kordajateks on teatava arvujada (a_n) liikmed $a_0, a_1, \ldots$ Sagedamini esinevad harilik genereeriv funktsioon

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ja eksponentsiaalne genereeriv funktsioon

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}.$$

Genereerivate funktsioonidega saab teha tehteid nagu liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine, diferentseerimine, integreerimine, kompositsiooni leidmine jne. Kombinatoorsete rakenduste aluseks on analoogia korrutamisreegli ja funktsioonide korrutamise ning liitmisreegli ja funktsioonide liitmise vahel.

Kõigis järgnevates ülesannetes, kui pole märgitud teisiti, tähendab genereeriv funktsioon harilikku genereerivat funktsiooni.

Praktikumiülesanded

1. Leida järgmiste jadade genereerivad funktsioonid.

a) $1, 4, 6, 4, 1, 0, 0, 0, \ldots$

b) $1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$

c) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

d) $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

e) $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

f) $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

g) $0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

h) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

2. Mitmel viisil saab õunte, banaanide, apelsinide ja pirnide hulgast panna kotti n puuvilja nii, et oleksid rahuldatud järgmised tingimused?

- Õunte arv on paaris.
- Banaanide arv on arvu 5 kordne.
- Apelsinide arv on ülimalt 4.
- Pirnide arv on ülimalt 1.

3. Pokkerikaartide pakis on 32 kaarti, nende hulgas 10 punast, 10 kollast ja 10 sinist. Iga värvi kaardid on nummerdatud erinevate numbritega 1, 2, ..., 10. Lisaks on kaardipakis kaks erinevat jokkerit, mõlemad numbriga 0. Kaart numbriga k annab 2^k punkti. Nimetame kaardikomplekti *heaks*, kui nende punktide summa on 2012. Leida heade kaardikomplektide arv.

4. Tihti, näiteks loendamisülesande lõppvastuse leidmisel, on vaja määrata genereerivate funktsioonide korrutises üheainsa liikme z^n kordaja. Selleks võib kasutatada võtet, mille sisuks on *sulgude osaline lahtikorrutamine*. Analoogilise võttega tõestati näiteks (harilik) binoomvalem. Leida

a) liikme x^2 kordaja avaldises $(2+x+x^2)(1+2x+x^2)(1+x+2x^2)$

b) liikme x^{17} kordaja avaldises $(1+x^5+x^7)^{20}$

c) liikme x^{21} kordaja avaldises $(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^8$

5. Leida liikme x^n kordaja avaldises

a) $\dfrac{1}{(1-x)^{100}}$ b) $\dfrac{1}{(1+2x)^{50}}$ c) $\dfrac{1}{(2+x)^{25}}$ d) $\dfrac{1}{(1+2x)(2+x)}$

6. a) Millise võrduse binoomkordajate vahel võib tuletada, kui võrrelda võrduse $(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$ mõlema poole arendises liikme x^k kordajaid?

b) Millise võrduse binoomkordajate vahel võib tuletada, kui võrrelda võrduse $(1-x)^n(1+x)^n = (1-x^2)^n$ mõlema poole arendises liikme x^k kordajaid?

7. Arvutada summad

a) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}\binom{k}{m}\binom{n}{k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$

8. Olgu $(a_n)_{n\geqslant 0}$ ja $(b_n)_{n\geqslant 0}$ kaks jada, mille korral $b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$. Milline on seos nende jadade (harilike) genereerivate funktsioonide vahel?

9. Lahendada rekurrentsed võrrandid.

a) $a_{n+1} = 3a_n + 2^n$, algtingimus $a_0 = 1$

b) $a_{n+2} = 8a_{n+1} - 16a_n$, algtingimused $a_0 = 1$, $a_1 = 4$

10. *Hanoi tornid.* Antud on n erineva läbimõõduga ketast ning kolm püstist varrast. Alguses on kõik kettad laotud suuruse kahanemise järjekorras esimesele vardale, ülejäänud kaks varrast on tühjad. Eesmärk on viia kõik kettad esimeselt vardalt viimasele, tõstes igal käigul ühelt vardalt ülemise ketta ümber nii, et suurem ketas ei satuks kunagi väiksema peale. Olgu A_n vähim käikude arv, mis kulub n ketta üleviimiseks.

a) Tuletada rekurrentne võrrand suuruse A_n jaoks.

b) Koostada rekurrentse võrrandi põhjal jada (A_n) genereeriv funktsioon.

c) Leida genereeriva funktsiooni abil A_n avaldis.

11. Kui palju leidub selliseid arvujärjendeid pikkusega n, mis koosnevad numbritest 0, 1 ja 2 ning milles kaks kõrvutiasuvat numbrit ei erine kuskil rohkem kui 1 võrra?

12. Tõestada, et arvu n esituste arv paaritute liidetavate summana võrdub arvu n esituste arvuga paarikaupa erinevate liidetavate summana. (Näiteks arvu 6 esitused paaritute liidetavate summana on $1+1+1+1+1+1$, $1+1+1+3$, $1+5$, $3+3$, esitused paarikaupa erinevate liidetavate summana on $1+2+3$, $1+5$, $2+4$, 6; liidetavate järjekord pole oluline).

13. Olgu n mittenegatiivne täisarv. Kui palju leidub polünoome $P(x)$, mille kordajad kuuluvad hulka $\{0, 1, 2, 3\}$ ja mille puhul $P(2) = n$.

14. Kasutades eksponentsiaalset genereerivat funktsiooni, lahendada rekurrentne võrrand $a_{n+1} = (n+1)(a_n - n + 1)$ algtingimusel $a_0 = 1$.

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused.

15. Aine õppeperiood kestab n päeva. Aine alguses jaotatakse õppeperiood kaheks: esimesed k päeva ($1 \leqslant k \leqslant n-2$) on teoreetiline osa ja viimased $n-k$ päeva laboratoorne osa. Seejärel määratakse esimeses osas üks päev ja teises osas kaks päeva kontrolltöödeks. Mitmel erineval viisil saab sellistel tingimustel aine ajakava koostada?

16. Antud on n erineva läbimõõduga ketast, mis alguses on laotud suuruse kahanemise järjekorras kolmest vardast esimesele. Ühe käiguga võib tõsta ühelt vardalt ülemise ketta *vahetult järgnevale vardale* (lugedes, et kolmandale vardale järgneb esimene) nii, et suurem ketas ei satuks kunagi väiksema peale. Eesmärk on viia kõik kettad esimeselt vardalt teisele.

Optimaalne meetod (optimaalsust me ei tõesta) selle ülesande lahendamiseks on järgmine. Olgu P_n ja V_n käikude arvud, mida on vaja teha n ketta üleviimiseks mingilt vardalt vastavalt vahetult järgnevale või vahetult eelnevale vardale.

- P_n leidmine: vii ülemised $n-1$ ketast vahetult eelnevale vardale; vii viimane suur ketas vahetult järgnevale vardale; vii $n-1$ kettaga kuhi vahetult eelnevale vardale suure ketta peale;
- V_n leidmine: vii ülemised $n-1$ ketast vahetult eelnevale vardale; vii viimane suur ketas vahetult järgnevale vardale; vii $n-1$ kettaga kuhi vahetult järgnevale vardale; vii suur ketas vahetult järgnevale vardale; vii $n-1$ kettaga kuhi vahetult eelnevale vardale suure ketta peale.

Leida n ketta üleviimiseks vajaminev käikude arv suletud kujul.

17. Lahendada mittehomogeenne rekurrentne võrrand

$$A_{n+2} = 5A_{n+1} - 6A_n + n^2$$

algtingimustel $A_0 = 0$, $A_1 = 1$.

a) Leida jada (A_n) genereeriv funktsioon $A(z)$.

b) Esitada see osamurdude summana kujul $\frac{C}{(1-\gamma z)^k}$, kus C ja γ on arvulised konstandid ja k on naturaalarv.

c) Leida igas osamurrus liikme z^n kordaja ning esitada A_n avaldis nende abil.

18. Jalaväerühm koosneb n sõdurist. Rivistuse ajal jaotab rühmaülem sõdurite rivi teatavaks arvuks järjestikustest sõduritest koosnevateks jagudeks ning määrab igas jaos ühe sõduri juhiks. Leida võimaluste arv, mitmel viisil saab rühmaülem sedasi rühma jagada.