Diskreetne matemaatika 2012

12. praktikum

Reimo Palm

Meeldetuletus: jada (a_n) harilik genereeriv funktsioon ja eksponentsiaalne genereeriv funktsioon on vastavalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{ja} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$$

Analoogiline harilike genereerivate funktsioonide puhul summaga

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{1}{1-z}$$

on eksponentsiaalsete genereerivate funktsioonide puhul summa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \mathrm{e}^z.$$

(Kui viimane, matemaatilisest analüüsist pärinev võrdus on tundmatu, siis võib tema kehtivust kontrollida näiteks programmiga esimesi liikmeid välja arvutades, võttes z-ks mõne lihtsa arvu, näiteks $z = 1$ või $z = \ln 2$ vms.)

Praktikumiülesanded

1. Mitmel viisil saab panna n ühesugust palli k erinevasse kasti nii, et ükski kast ei jääks tühjaks?

a) Defineerida genereeriv funktsioon, mis peab arvet i-nda kasti sisu üle ($i = 1, 2, \ldots, k$).

b) Leida genereeriv funktsioon, mis loeb kokku võimalusi paigutada palle korraga kõikidesse kastidesse.

c) Leida selles genereerivas funktsioonis kordaja, mis annab ülesande vastuse.

d) Lahendada see ülesanne ka puhtalt kombinatoorse arutlusega ja võrrelda lahendust ülalsaadud lahendusega.

2. Kauplusekett hankis partii 60 ühesugusest muruniidukist ning soovib neid jaotada laiali nelja kaupluse vahel nii, et iga kauplus saaks vähemalt 5. Kaks väiksemat kauplust mahutavad kumbki maksimaalselt 20, kaks suuremat kauplust aga kumbki maksimaalselt 30 muruniidukit. Mitu võimalust on muruniidukeid kaupluste vahel jaotada?

3. Kahendpuu on juurega puu, mille igal sisetipul on täpselt kaks alluvat. Alluvaid loeme järjestatuks (vasak alluv ja parem alluv). Leida n sisetipuga kahendpuude arv.

4. Lisame n-tipulisele ahelale juurde ühe tipu ja ühendame selle servadega ahela kõigi tippude külge. Eesmärk on leida saadud graafi aluspuude arv. Olgu a_n aluspuude arv ning $A(z)$ selle arvujada genereeriv funktsioon. Eesmärgi saavutamiseks vaatleme graafi selliseid aluspuid, kus on esindatud terve ahela kõik tipud. Olgu b_n selliste aluspuude arv ning $B(z)$ vastav genereeriv funktsioon. Kõigis graafides loeme tipud eristatavaks (märgendatuks).

a) Tõestada, et $A(z) = \sum_{m=1}^{\infty} B(z)^m$.

b) Leida genereeriv funktsioon $B(z)$.

c) Leida genereeriv funktsioon $A(z)$.

d) Leida ülesande vastus a_n.

5. Stefan Banachil oli komme kanda kaasas kahte tikutoosi, ühes m tikku ja teises n tikku. Kui ta vajas tuld, siis võttis ta taskust juhuslikult ühe tikutoosi, kummagi tõenäosusega $\frac{1}{2}$, sõltumatult oma eelmistest valikutest. Pärast ühe tiku väljavõtmist pani ta tikutoosi taskusse tagasi (isegi kui see sai tühjaks). Kui taskust võetud tikutoos oli tühi, siis viskas ta selle minema ja võttis teise tikutoosi. Ükskord osutus, et ka teine tikutoos oli tühi. Leida tõenäosus $p_{m,n}$, et selline asi juhtub. (Näiteks $p_{0,1} = \frac{1}{2}$, $p_{1,1} = \frac{1}{2}$ ja $p_{2,2} = \frac{3}{8}$.)

6. Mitmel viisil saab 100 eurot vahetada väiksemateks paberrahatähtedeks? (Rahatähtede järjekord oluline ei ole.)

7. Olgu antud jadad (a_n) ja (b_n) ning nende eksponentsiaalsed genereerivad funktsioonid

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}, \qquad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n!}.$$

Leida, millise jada eksponentsiaalne genereeriv funktsioon on

a) $A(z) + B(z)$

b) $A(z) \cdot B(z)$

c) $A'(z)$

8. Leida järgmiste jadade eksponentsiaalsed genereerivad funktsioonid.

a) $1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$

b) $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

c) $0!, 1!, 2!, 3!, 4!, 5!, \ldots$

d) $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

e) $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

9. Leida eksponentsiaalsete genereerivate funktsioonide abil n-elemendilise hulga alamhulkade arv.

a) Olgu a_n võimaluste arv valida n-elemendilisest hulgast alamhulk. Olgu b_n võimaluste arv valida n-elemendilisest hulgast n-elemendiline alamhulk. Avaldada arv a_n arvude b_n kaudu.

Juhis: määrame n-elemendilises hulgas mingid m vaadeldavat elementi, valime nende hulgast m-elemendilise alamhulga, valime ülejäänud elementide hulgast $(n - m)$-elemendilise alamhulga.

b) Kirjutada eelmises punktis saadud seos ümber jadade (a_n) ja (b_n) eksponentsiaalsete genereerivate funktsioonide vahelise seosena.

c) Leida a_n avaldis.

10. 10. praktikumis vaatlesime korrapäratuste leidmise ülesannet (ülesanne 10), kus oli vaja leida, mitmel viisil on võimalik praktikumist osavõtva n üliõpilase kodutööd ära jagada nende üliõpilaste vahel nii, et keegi ei saaks enda oma. Antud n-elemendilise hulga kõik permutatsioonid võime üle lugeda järgmisel viisil: iga $i = 0, 1, \ldots, n$ korral määrame, millised $n - i$ elementi jäävad paigale, ülejäänud i elementi aga järjestame ümber täielikuks korrapäratuseks. Sellega saame valemi

$$n! = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D_i.$$

a) Vaatleme jadasid (a_n) ja (b_n), kus $a_n = n!$ ja $b_n = 1$. Kirjutada välja nende jadade eksponentsiaalsed genereerivad funktsioonid.

b) Kasutades ülaltoodud valemit, leida jada (D_n) eksponentsiaalne genereeriv funktsioon.

c) Genereerivate funktsioonide vahelises võrduses kordajaid võrreldes tuletada lihtne rekurrentne avaldis arvu D_n jaoks.

11. Kui palju leidub tähtedest A, B, C moodustatud sõnu pikkusega n, milles nii A kui ka B esinevad paaritu arv kordi?

12. Kordumistega permutatsioonid, antud hulga sellised alamhulgad, kus elemendid võivad korduda ja erinevate (kuid mitte samade) elementide omavaheline järjekord on oluline, alluvad lihtsasti analüüsile, kui a) iga elementi on olemas piiramatu arv eksemplare või b) iga elementi on olemas piiratud arv eksemplare ja valime kõikide elementide kõik eksemplarid. Raskem on olukord, kus iga (või mõnda) elementi on olemas piiratud arv eksemplare ja valime vähem kui kõik eksemplarid. Kasutades eksponentsiaalseid genereerivaid funktsioone, leida, mitmel viisil saab sõnas *suusatajajutt* olevatest tähtedest koostada 8-tähelise sõna.

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused.

13. Olgu $P(n, k, a, b)$ võimaluste arv paigutada n ühesugust palli k kasti nii, et igas kastis oleks vähemalt a ja ülimalt b palli. Kumb arvudest on suurem: $P(28, 19, 1, 2)$ või $P(30, 10, 2, 7)$?

14. 9 erinevat kasti on paigutatud ristkülikukujuliselt 3 ritta ja 3 veergu. Mitmel viisil saab kastidesse panna 10 ühesugust palli nii, et i-nda rea iga kasti pallide arv jaguks i-ga ($i = 1,\ 2,\ 3$) ja j-nda veeru kastides olevate pallide koguarv ei oleks suurem kui 5 ($j = 1,\ 2,\ 3$)?

a) Koostada genereeriv funktsioon ühes veerus pallide paigutamiseks.

b) Koostada genereeriv funktsioon kõigis veergudes pallide paigutamiseks.

c) Leida vajaliku liikme kordaja.

15. Olgu M_n teekondade arv täisarvuliste koordinaatidega võre punktist $(0, 0)$ punkti $(n, 0)$, mis ei lasku allapoole joont $y = 0$ ning milles iga samm on kas $(1, 0)$, $(1, 1)$ või $(1, -1)$. Konstrueerida arvujada (M_n) (harilik) genereeriv funktsioon.

16. Kui palju saab tähtedest A, B, C, D, E, F, G, H koostada 6-tähelisi sõnu, milles igaüks tähtedest A, B, C, D esineb ülimalt 1 kord?