Diskreetne matemaatika 2012

12. praktikum

Reimo Palm

Meeldetuletus: jada (a_n) harilik genereeriv funktsioon ja eksponentsiaalne genereeriv funktsioon on vastavalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{ja} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$$

Analoogiline harilike genereerivate funktsioonide puhul summaga

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{1}{1-z}$$

on eksponentsiaalsete genereerivate funktsioonide puhul summa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \mathrm{e}^z.$$

(Kui viimane, matemaatilisest analüüsist pärinev võrdus on tundmatu, siis võib tema kehtivust kontrollida näiteks programmiga esimesi liikmeid välja arvutades, võttes z-ks mõne lihtsa arvu, näiteks $z = 1$ või $z = \ln 2$ vms.)

Praktikumiülesanded

1. Mitmel viisil saab panna n ühesugust palli k erinevasse kasti nii, et ükski kast ei jääks tühjaks?

a) Defineerida genereeriv funktsioon, mis peab arvet i-nda kasti sisu üle ($i = 1, 2, \ldots, k$).

b) Leida genereeriv funktsioon, mis loeb kokku võimalusi paigutada palle korraga kõikidesse kastidesse.

c) Leida selles genereerivas funktsioonis kordaja, mis annab ülesande vastuse.

d) Lahendada see ülesanne ka puhtalt kombinatoorse arutlusega ja võrrelda lahendust ülalsaadud lahendusega.

Lahendus. a) Kastis võib olla 1 või 2 või 3 või … palli, genereeriv funktsioon on

$$G_i(z) = z + z^2 + z^3 + \ldots = z(1 + z + z^2 + \ldots) = \frac{z}{1-z}.$$

b) Esimese kasti täitmisvõimalusi loetleb $G_1(z)$, teise kasti omi $G_2(z)$ jne, seega kõigi kastide täitmisvõimaluste genereeriv funktsioon on

$$G(z) = G_1(z)G_2(z)\ldots G_k(z) = \frac{z^k}{(1-z)^k}.$$

c) Binoomvalemi põhjal

$$\frac{z^k}{(1-z)^k} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+k-1}{k-1} z^{i+k} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-1}{k-1} z^n.$$

Siit näeme, et otsitav kordaja ehk ülesande vastus on $\binom{n-1}{k-1}$.

d) Olgu n palli paigutatud ühte ritta. Pallide vahel on $n-1$ vahet. Valime nendest $k-1$ vahet, kuhu paigutame rühmade piirid. Pallid rea algusest kuni esimese piirini paneme esimesse kasti, pallid esimesest piirist teiseni teise kasti jne. Igasse kasti satub vähemalt üks pall. Seega piisab pallide kastidesse jaotamiseks valida $n-1$ vahest $k-1$ vahet, milleks on $\binom{n-1}{k-1}$ võimalust.

Piiride paikapanekuga jaguneb pallide hulk k järjestikuseks rühmaks. Kui rühmade pallide arvud on näiteks $s_1, s_2, \ldots, s_k$, kus $s_1+s_2+\ldots+s_k = n$, siis sellele vastab genereerivate funktsioonide korrutises liikme z^n tekkimisvõimalus, kus esimesest sulust valitakse z^{s_1}, teisest sulust z^{s_2} jne kuni viimasest sulust z^{s_k}. Need annavad korrutiseks $z^{s_1}z^{s_2}\ldots z^{s_k} = z^{s_1+s_2+\ldots+s_k} = z^n$.

2. Kauplusekett hankis partii 60 ühesugusest muruniidukist ning soovib neid jaotada laiali nelja kaupluse vahel nii, et iga kauplus saaks vähemalt 5. Kaks väiksemat kauplust mahutavad kumbki maksimaalselt 20, kaks suuremat kauplust aga kumbki maksimaalselt 30 muruniidukit. Mitu võimalust on muruniidukeid kaupluste vahel jaotada?

Lahendus. Kahe väiksema kaupluse puhul on muruniidukite arvud 5 ja 20 vahel, millele vastab genereeriv funktsioon $z^5 + z^6 + \ldots + z^{20}$. Kahe suurema kaupluse muruniidukite arvud on 5 ja 30 vahel, millele vastab genereeriv funktsioon $z^5 + z^6 + \ldots + z^{30}$. Muruniidukite jaotamisvõimaluste arvu näitab seega genereeriv funktsioon

$$(z^5+z^6+\ldots+z^{20})^2(z^5+z^6+\ldots+z^{30})^2 = z^{20}(1-z^{16})^2(1-z^{26})^2(1-z)^{-4} =$$
$$= z^{20}(1-2z^{16}+z^{32})(1-2z^{26}+z^{52})\left(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{-4}{i}z^i\right).$$

Liikme z^{60} tekkimisvõimalused on $z^{20}z^0z^0z^{40}$, $z^{20}z^0z^{26}z^{14}$, $z^{20}z^{16}z^0z^{24}$ ning $z^{20}z^{32}z^0z^8$, seega kordajaks saame

$$\binom{-4}{40} - 2\binom{-4}{14} - 2\binom{-4}{24} + \binom{-4}{8} = 5296.$$

3. Kahendpuu on juurega puu, mille igal sisetipul on täpselt kaks alluvat. Alluvaid loeme järjestatuks (vasak alluv ja parem alluv). Leida n sisetipuga kahendpuude arv.

Lahendus. Olgu t_n nende n-tipuliste kahendpuude arv ja $T(x)$ nende arvude genereeriv funktsioon. Vaatleme arvu t_{n+1}. Iga $(n+1)$-tipulise kahendpuu vasak ja parem alampuu on samuti kahendpuud. Kui vasakus alampuus on k tippu, siis saab vasakut alampuud moodustada t_k viisil. Paremas alampuus on $n-k$ tippu ning paremat alampuud saab moodustada t_{n-k} viisil. Kui defineerida $t_0 = 1$, siis võib k muutuda 0-st n-ni. Järelikult kehtib iga $n \geqslant 0$ korral võrdus

$$t_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} t_k t_{n-k}.$$

See on sama võrrand sama algtingimusega nagu loengu näites 7. Järelikult

$$T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{z^n}{n+1}$$

ja $t_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Neid arve nimetatakse Catalani arvudeks.

4. Lisame n-tipulisele ahelale juurde ühe tipu ja ühendame selle servadega ahela kõigi tippude külge. Eesmärk on leida saadud graafi aluspuude arv. Olgu a_n aluspuude arv ning $A(z)$ selle arvujada genereeriv funktsioon. Eesmärgi saavutamiseks vaatleme graafi selliseid aluspuid, kus on esindatud terve ahela kõik tipud. Olgu b_n selliste aluspuude arv ning $B(z)$ vastav genereeriv funktsioon. Kõigis graafides loeme tipud eristatavaks (märgendatuks).

a) Tõestada, et $A(z) = \sum_{m=1}^{\infty} B(z)^m$.

b) Leida genereeriv funktsioon $B(z)$.

c) Leida genereeriv funktsioon $A(z)$.

d) Leida ülesande vastus a_n.

Lahendus. a) Olgu v lisatud tipp. Vaadeldava graafi iga aluspuu koosneb komponentidest, millest igaühe moodustab mingi lõik ahela järjestikuseid tippe koos ühest neist tippudest tippu v viiva servaga. Genereeriv funktsioon

$B(x)$ loendab graafi selliseid aluspuid, kus selliseid komponente on täpselt 1. Genereeriv funktsioon $B(x)^2$ loendab sellised aluspuid, kus komponente on täpselt 2, sest mõlemad komponendid on parajasti seda tüüpi aluspuud, mida loendab $B(x)$, kusjuures ahelal haaravad nad enda alla kokku n tippu. Induktiivselt jätkates näeme, et $B(x)^m$ loendab selliseid aluspuid, kus komponentide arv on täpselt m. Seega $\sum_{m=1}^{\infty} B(z)^m$ loendab parajasti kõiki graafi aluspuid, samuti nagu $A(z)$.

b) Ahelas võib iga tipp olla see, mis on ühendatud tipuga v. Seega n-tipulise ahela puhul on selliseid aluspuid n, st

$$B(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

eelmise praktikumi ülesande 1e põhjal.

c) Kahe eelmise punkti abil

$$A(z) = \sum_{m=1}^{\infty} B(z)^m = B(z) + B(z)^2 + B(z)^3 + \ldots =$$

$$= \frac{B(z)}{1-B(z)} = \frac{\dfrac{z}{(1-z)^2}}{1-\dfrac{z}{(1-z)^2}} = \frac{z}{1-3z+z^2}.$$

d) Kasutades lahutust $1-3z+z^2 = \Big(1-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}z\Big)\Big(1-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}z\Big)$, esitame genereeriva funktsiooni osamurdude summana

$$\frac{z}{1-3z+z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}z} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}z},$$

millest loeme välja ülesande vastuse $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$.

Küsimus. Genereeriva funktsiooni avaldise $A(z) = \dfrac{z}{1-3z+z^2}$ võime esitada kujul $A(z) - 3zA(z) + z^2A(z) = z$. Võrreldes kummalgi poolel liikme z^n kordajaid, näeme, et otsitavad arvud rahuldavad tingimusi $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ ja iga $n \geqslant 2$ korral $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$. Kas viimast seost saab tuletada otse, ilma genereerivaid funktsioone kasutamata?

5. Stefan Banachil oli komme kanda kaasas kahte tikutoosi, ühes m tikku ja teises n tikku. Kui ta vajas tuld, siis võttis ta taskust juhuslikult ühe tikutoosi, kummagi tõenäosusega $\frac{1}{2}$, sõltumatult oma eelmistest valikutest. Pärast ühe tiku väljavõtmist pani ta tikutoosi taskusse tagasi (isegi kui see sai tühjaks). Kui taskust võetud tikutoos oli tühi, siis viskas ta selle minema ja võttis teise tikutoosi. Ükskord osutus, et ka teine tikutoos oli tühi. Leida tõenäosus $p_{m,n}$, et selline asi juhtub. (Näiteks $p_{0,1} = \frac{1}{2}$, $p_{1,1} = \frac{1}{2}$ ja $p_{2,2} = \frac{3}{8}$.)

Lahendus. Ühe tiku võtmisega muutub tikutooside seis (m, n) tõenäosusega $\frac{1}{2}$ seisuks $(m-1, n)$ ja tõenäosusega $\frac{1}{2}$ seisuks $(m, n-1)$; esimeses seisus toimub vaadeldav sündmus tõenäosusega $p_{m-1,n}$ ja teises seisus tõenäosusega $p_{m,n-1}$. Seega kui $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$, siis $p_{m,n} = \frac{1}{2}p_{m-1,n} + \frac{1}{2}p_{m,n-1}$. Lisaks $p_{0,0} = 1$. Kui lugeda, et negatiivse m või n korral $p_{m,n} = 0$ (negatiivset arvu tikke toosis nagunii olla ei saa), siis kehtib saadud seos ka kõigil muudel juhtudel peale juhu $m = 0 \,\&\, n = 0$. Kokkuvõttes võime kirjutada

$$p_{m,n} = \frac{1}{2}p_{m-1,n} + \frac{1}{2}p_{m,n-1} + [m = 0 \,\&\, n = 0],$$

see kehtib iga m ja n korral.

Olgu $P(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} p_{m,n}w^m z^n$ arvude $p_{m,n}$ genereeriv funktsioon. Korrutame saadud seost avaldisega $w^m z^n$ ning summeerime:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} p_{m,n}w^m z^n = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} p_{m-1,n}w^m z^n + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} p_{m,n-1}w^m z^n + 1.$$

Et $p_{-1,n} = 0$ ja $p_{m,-1} = 0$, siis võime paremal esimeses liidetavas ära jätta liikmed, kus $m = 0$, ning teises liidetavas liikmed, kus $n = 0$ ning alustada vastavaid summasid indeksist 1. Tuues esimeses liidetavas summamärgi ette w ja teises liidetavas z, on kõik kolm võrduses esinevat summat võrdsed avaldisega $P(z, w)$. Sellega omandab võrdus kuju

$$P(w, z) = \frac{w}{2}P(m, n) + \frac{z}{2}P(m, n) + 1,$$

millest

$$P(w, z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(w + z)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}(w + z)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}w^l z^{k-l}.$$

Viimases summas vahetame summeerimisjärjekorda ning seejärel tähistame ümber summeerimisindeksid, võttes $l = m$ ja $k - l = n$ (siis $k = m + n$):

$$P(w, z) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty}\frac{1}{2^k}\binom{k}{l}w^l z^{k-l} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{m+n}}\binom{m+n}{m}w^m z^n.$$

Seega $p_{m,n} = \frac{1}{2^{m+n}}\binom{m+n}{m}$.

6. Mitmel viisil saab 100 eurot vahetada väiksemateks paberrahatähtedeks? (Rahatähtede järjekord oluline ei ole.)

Lahendus. Väiksemad paberrahad on 5, 10, 20 ja 50 eurot. Genereerivad funktsioonid, mis loendavad võimalusi vahetada n eurot ainult ühte liiki rahatähtedeks väärtuses 5, 10, 20 või 50 eurot, on

$$A(z) = 1 + z^5 + z^{10} + z^{15} + \ldots = \frac{1}{1-z^5}$$

$$B(z) = 1 + z^{10} + z^{20} + z^{30} + \ldots = \frac{1}{1-z^{10}}$$

$$C(z) = 1 + z^{20} + z^{40} + z^{60} + \ldots = \frac{1}{1-z^{20}}$$

$$D(z) = 1 + z^{50} + z^{100} + z^{150} + \ldots = \frac{1}{1-z^{50}}$$

Genereeriv funktsioon, mis loendab võimalusi vahetada n eurot, kui kasutada võib kõiki rahatähti, on

$$G(z) = A(z)B(z)C(z)D(z) = \frac{1}{1-z^5} \cdot \frac{1}{1-z^{10}} \cdot \frac{1}{1-z^{20}} \cdot \frac{1}{1-z^{50}}.$$

Et

$$\frac{1}{1-z^{50}} \cdot \frac{1}{1-z^{10}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{50n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{10n}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} [5 \mid n] z^{10n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{10n}\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} [5 \mid i]\right) z^{10n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) z^{10n}$$

ja analoogiliselt

$$\frac{1}{1-z^{20}} \cdot \frac{1}{1-z^5} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) z^{5n},$$

siis

$$G(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) z^{10n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) z^{5n}\right) =$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} [2 \mid n]\left(1 + \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor\right) z^{5n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) z^{5n}\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} [2 \mid i]\left(1 + \left\lfloor \frac{i}{10} \right\rfloor\right)\left(1 + \left\lfloor \frac{n-i}{4} \right\rfloor\right)\right) z^{5n} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\left(1 + \left\lfloor \frac{i}{5} \right\rfloor\right)\left(1 + \left\lfloor \frac{n-2i}{4} \right\rfloor\right)\right) z^{5n}.$$

Liikme z^{100} saame sellest esitusest juhul $n = 20$, selle liikme kordajaks tuleb $1 \cdot (6+5+5+4+4) + 2 \cdot (3+3+2+2+1) + 3 \cdot 1 = 49$.

Küsimus. Eelnevas nägime, et $5n$ euro vahetamiseks on võimalusi

$$e_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \Big(1 + \Big\lfloor \frac{i}{5} \Big\rfloor\Big)\Big(1 + \Big\lfloor \frac{n-2i}{4} \Big\rfloor\Big).$$

Kas seda summat saab lihtsustada?

7. Olgu antud jadad (a_n) ja (b_n) ning nende eksponentsiaalsed genereerivad funktsioonid

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}, \qquad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n!}.$$

Leida, millise jada eksponentsiaalne genereeriv funktsioon on

a) $A(z) + B(z)$

b) $A(z) \cdot B(z)$

c) $A'(z)$

Lahendus. a) Et

$$A(z) + B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \frac{z^n}{n!},$$

siis genereeriv funktsioon $A(z) + B(z)$ esitab jada $a_0 + b_0,\ a_1 + b_1,\ a_2 + b_2, \ldots$ (jadade (a_n) ja (b_n) summa).

b) Analoogiliselt

$$A(z) \cdot B(z) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{z^i}{i!} \cdot b_{n-i} \frac{z^{n-i}}{(n-i)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} a_i b_{n-i} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i} \frac{z^n}{n!},$$

seega $A(z) \cdot B(z)$ esitab jada (c_n), kus $c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$ (jadade (a_n) ja (b_n) binoomkonvolutsioon).

c) Siin

$$A'(z) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \frac{z^n}{n!},$$

seega $A'(z)$ esitab jada $a_1, a_2, a_3, \ldots$ (jada (a_n) vasaknihe).

8. Leida järgmiste jadade eksponentsiaalsed genereerivad funktsioonid.

a) 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...

b) 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

c) 0!, 1!, 2!, 3!, 4!, 5!, ...

d) 1, 2, 3, 4, 5, ...

e) 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...

Lahendus.

a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$$

b) $$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} = \mathrm{e}^{2z}$$

c) $$\sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

d) $$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \mathrm{e}^z = (z+1)\mathrm{e}^z$$

e) $$\sum_{n=0}^{\infty} [2 \mid n] \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} =$$
$$= \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2} = \cosh(z)$$

9. Leida eksponentsiaalsete genereerivate funktsioonide abil n-elemendilise hulga alamhulkade arv.

a) Olgu a_n võimaluste arv valida n-elemendilisest hulgast alamhulk. Olgu b_n võimaluste arv valida n-elemendilisest hulgast n-elemendiline alamhulk. Avaldada arv a_n arvude b_n kaudu.

Juhis: määrame n-elemendilises hulgas mingid m vaadeldavat elementi, valime nende hulgast m-elemendilise alamhulga, valime ülejäänud elementide hulgast $(n-m)$-elemendilise alamhulga.

b) Kirjutada eelmises punktis saadud seos ümber jadade (a_n) ja (b_n) eksponentsiaalsete genereerivate funktsioonide vahelise seosena.

c) Leida a_n avaldis.

Lahendus. a) Määrame n-elemendilises hulgas mingid m elementi, mille võtame vaatluse alla, selleks on $\binom{n}{m}$ võimalust. Võtame endale vaadeldavatest elementidest koosneva hulga, selleks on b_m võimalust. Anname sõbrale ülejäänud $n - m$ elemendist koosneva hulga, selleks on b_{n-m} võimalust. Niisugune kahe hulga valik määrab meile üheselt n-elemendilise hulga alamhulga, see on see alamhulk, mille me valisime esimesena. Et m võib omandada suvalisi väärtusi 0-st n-ni, siis

$$a_n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} b_m b_{n-m}.$$

b) Olgu $A(z)$ ja $B(z)$ vastavalt jadade (a_n) ja (b_n) eksponentsiaalsed genereerivad funktsioonid. Vastavalt ülesandele 7b siis

$$A(z) = B(z)^2.$$

c) Et iga n korral ilmselt $b_n = 1$, siis $B(z) = \mathrm{e}^z$. Järelikult

$$A(z) = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{2z} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{z^n}{n!}.$$

Siit $a_n = 2^n$.

Märkus. Jadale (b_n) ei ole vaja tingimata anda kombinatoorset tähendust nagu punktis a). Binoomkonvolutsiooni valemi rakendamiseks piisab defineerida see jada konstantselt 1-ks.

10. 10. praktikumis vaatlesime korrapäratuste leidmise ülesannet (ülesanne 10), kus oli vaja leida, mitmel viisil on võimalik praktikumist osavõtva n üliõpilase kodutööd ära jagada nende üliõpilaste vahel nii, et keegi ei saaks enda oma. Antud n-elemendilise hulga kõik permutatsioonid võime üle lugeda järgmisel viisil: iga $i = 0, 1, \ldots, n$ korral määrame, millised $n-i$ elementi jäävad paigale, ülejäänud i elementi aga järjestame ümber täielikuks korrapäratuseks. Sellega saame valemi

$$n! = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D_i.$$

a) Vaatleme jadasid (a_n) ja (b_n), kus $a_n = n!$ ja $b_n = 1$. Kirjutada välja nende jadade eksponentsiaalsed genereerivad funktsioonid.

b) Kasutades ülaltoodud valemit, leida jada (D_n) eksponentsiaalne genereeriv funktsioon.

c) Genereerivate funktsioonide vahelises võrduses kordajaid võrreldes tuletada lihtne rekurrentne avaldis arvu D_n jaoks.

Lahendus. a) Vastavalt ülesandele 8 on jada (a_n) eksponentsiaalne genereeriv funktsioon $A(z) = \frac{1}{1-z}$ ja jada (b_n) eksponentsiaalne genereeriv funktsioon $B(z) = \mathrm{e}^z$.

b) Ülesandes antud valemi võib kirjutada kujul $a_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D_i b_{n-i}$. Seega on jada (a_n) jadade (D_n) ja (b_n) binoomkonvolutsioon. Olgu $D(z)$ jada (D_n) eksponentsiaalne genereeriv funktsioon. Ülesande 7 põhjal $A(z) = D(z)B(z)$, millest

$$D(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{\mathrm{e}^{-z}}{1-z}.$$

c) Vaatleme võrdust $D(z)(1-z) = \mathrm{e}^{-z}$. Vasak pool on

$$D(z)(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{z^n}{n!}(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)D_n \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} nD_{n-1}\frac{z^n}{n!},$$

parem pool aga

$$\mathrm{e}^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{n!}.$$

Võrreldes mõlemal poolel liikme $\frac{z^n}{n!}$ kordajaid, näeme, et iga $n \geqslant 1$ korral kehtib rekurrentne seos $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$. Selle seose otsene kombinatoorne tõestus on mõneti keerukas.

11. Kui palju leidub tähtedest A, B, C moodustatud sõnu pikkusega n, milles nii A kui ka B esinevad paaritu arv kordi?

Lahendus. Ainult tähtedest A koosnevate sõnade arvu loetleb eksponentsiaalne genereeriv funktsioon

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty}[2 \nmid n]\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\big(1-(-1)^n\big)\frac{z^n}{n!} = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2},$$

seesama on ka ainult tähtedest B koosnevate sõnade arvu eksponentsiaalne genereeriv funktsioon $B(z)$. Ainult tähtedest C koosnevate sõnade arvu genereeriv funktsioon on $C(z) = \mathrm{e}^z$, sest neile tähtedele tingimusi pole seatud.

Kui esialgu vaadelda sõnu, mis sisaldavad ainult tähti A ja B, siis nende arv on

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i b_{n-i},$$

sest meil tuleb 1) valida n positsioonist välja i positsiooni tähtede A jaoks – võimalusi $\binom{n}{i}$; 2) paigutada nendele positsioonidele tähed A – võimalusi a_i;

3) paigutada ülejäänud positsioonidele tähed B – võimalusi b_{n-i}. Binoomkonvolutsiooni valemi põhjal on tähtedest A ja B koostatud sõnade arvu genereeriv funktsioon korrutis $A(z)B(z)$. Samamoodi leiame tähtedest A, B, C koostatud sõnade arvu: 1) valime välja positsioonid, millele panna tähtedest A ja B koosnev sõna, 2) paigutame selle sõna tähed järjest nendele positsioonidele laiali, 3) paigutame ülejäänud positsioonidele ainult tähtedest C koosneva sõna. Seega ülesandes nõutud sõnade arvu eksponentsiaalne genereeriv funktsioon on $A(z)B(z)C(z)$.

Nüüd

$$A(z)B(z)C(z) = \Big(\frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}\Big)^2 \mathrm{e}^z = \frac{\mathrm{e}^{3z} - 2\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{4},$$

mille põhjal otsitav n-täheliste sõnade arv on $\frac{1}{4}(3^n - 2 + (-1)^n)$.

Küsimus. Millist ülesannet lahendaksime siis, kui kasutaksime eksponentsiaalsete genereerivate funktsioonide asemel harilikke genereerivaid funktsioone?

12. Kordumistega permutatsioonid, antud hulga sellised alamhulgad, kus elemendid võivad korduda ja erinevate (kuid mitte samade) elementide omavaheline järjekord on oluline, alluvad lihtsasti analüüsile, kui a) iga elementi on olemas piiramatu arv eksemplare või b) iga elementi on olemas piiratud arv eksemplare ja valime kõikide elementide kõik eksemplarid. Raskem on olukord, kus iga (või mõnda) elementi on olemas piiratud arv eksemplare ja valime vähem kui kõik eksemplarid. Kasutades eksponentsiaalseid genereerivaid funktsioone, leida, mitmel viisil saab sõnas *suusatajajutt* olevatest tähtedest koostada 8-tähelise sõna.

Lahendus. Tähtede arvud on: s – 2, u – 3, a – 3, t – 3, j – 2. Sõnas võib iga täht esineda null kuni selle tähe maksimaalne arv korda. Koostame üksikute tähtede esinemiste arve näitavad eksponentsiaalsed genereerivad funktsioonid

$$S(z) = J(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2},$$
$$U(z) = A(z) = T(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}.$$

Et erinevate tähtede omavaheline järjestus sõnas on oluline, siis on kõigi n-täheliste sõnade arvu eksponentsiaalne genereeriv funktsioon üksikute tähtede eksponentsiaalsete genereerivate funktsioonide korrutis. See funktsioon on

$$\Big(1 + z + \frac{z^2}{2}\Big)^2 \Big(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}\Big)^3 = 1 + 5z + \frac{25z^2}{2} + \frac{41z^3}{2} + \frac{49z^4}{2} + \frac{45z^5}{2} + \\ + \frac{49z^6}{3} + \frac{19z^7}{2} + \frac{71z^8}{16} + \frac{713z^9}{432} + \frac{413z^{10}}{864} + \frac{89z^{11}}{864} + \frac{13z^{12}}{864} + \frac{z^{13}}{864},$$

kus tehted on tehtud arvutialgebrasüsteemiga. Iga n korral saame leida n-täheliste sõnade arvu nii, et korrutame liikme z^n kordajat arvuga $n!$. Näiteks 8-täheliste sõnade arv on $\frac{71}{16} \cdot 8! = 178920$.

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused.

13. Olgu $P(n, k, a, b)$ võimaluste arv paigutada n ühesugust palli k kasti nii, et igas kastis oleks vähemalt a ja ülimalt b palli. Kumb arvudest on suurem: $P(28, 19, 1, 2)$ või $P(30, 10, 2, 7)$?

Lahendus. Arvude $P(n, 19, 1, 2)$ genereeriv funktsioon on

$$(z+z^2)^{19} = \sum_{i=0}^{19} \binom{19}{i} z^{19-i} z^{2i} = \sum_{i=0}^{19} \binom{19}{i} z^{19+i}.$$

Liige z^{28} tekib siis, kui $19 + i = 28$ ehk $i = 9$. Selle liikme kordaja on $\binom{19}{9} = 92378$.

Arvude $P(n, 10, 2, 7)$ genereeriv funktsioon on

$$(z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7)^{10} = z^{20}(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5)^{10} =$$
$$= z^{20}\Big(\frac{1-z^6}{1-z}\Big)^{10} = z^{20}(1-z^6)^{10}(1-z)^{-10} =$$
$$= z^{20}\Big(\sum_{i=0}^{10}(-1)^i \binom{10}{i} z^{6i}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{9+j}{j} z^j\Big)$$

Liige z^{30} saab tekkida ainult kas kujul $z^{20}z^0z^{10}$ (vasakust sulust $i = 0$, paremast $j = 10$) või kujul $z^{20}z^6z^4$ (vasakust sulust $i = 1$, paremast $j = 4$), vastavalt tuleb selle liikme kordajaks $\binom{10}{0}\binom{19}{10} - \binom{10}{1}\binom{13}{4} = 85228$.

Järelikult $P(28, 19, 1, 2)$ on suurem.

14. 9 erinevat kasti on paigutatud ristkülikukujuliselt 3 ritta ja 3 veergu. Mitmel viisil saab kastidesse panna 10 ühesugust palli nii, et i-nda rea iga kasti pallide arv jaguks i-ga ($i = 1, 2, 3$) ja j-nda veeru kastides olevate pallide koguarv ei oleks suurem kui 5 ($j = 1, 2, 3$)?

a) Koostada genereeriv funktsioon ühes veerus pallide paigutamiseks.

b) Koostada genereeriv funktsioon kõigis veergudes pallide paigutamiseks.

c) Leida vajaliku liikme kordaja.

Lahendus. Vaatleme kõigepealt ühte veergu. Esimese, teise ja kolmanda rea kasti pallide arvu loendavad vastavalt genereerivad funktsioonid

$$1 + z + z^2 + \ldots, \qquad 1 + z^2 + z^4 + \ldots, \qquad 1 + z^3 + z^6 + \ldots$$

ning ühte veergu pallide paigutamise võimalusi funktsioon

$$\begin{aligned}(1 + z + z^2 + \ldots)(1 + z^2 + z^4 + \ldots)(1 + z^3 + z^6 + \ldots) = \\ = (1 + z + z^2 + \ldots)(1 + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + 2z^6 + \ldots) = \\ = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + 7z^6 + \ldots\end{aligned}$$

Et ühte veergu võib panna kokku ülimalt 5 palli, siis huvitavad meid ainult need liikmed, milles astendaja pole suurem kui 5. Seda tingimust arvestades on pallide paigutusvõimalusi ühte veergu loendav genereeriv funktsioon $1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5$ ning paigutusvõimalusi kolme veergu loendav genereeriv funktsioon $(1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5)^3$. Ülesande vastus on liikme z^{10} kordaja.

Kahe polünoomi korrutist saab leida järgmise võttega. Kirjutame polünoomide kordajad vektoritesse: $a = (1\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ ja $b = (1\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ ning moodustame korrutise

$$a^T b = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10\\ 3 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15\\ 4 & 4 & 8 & 12 & 16 & 20\\ 5 & 5 & 10 & 15 & 20 & 25\end{pmatrix}.$$

Seejärel leiame maatriksis kõigi kirde-edelasuunaliste diagonaalide arvude summa. Tulemuseks on polünoomide korrutise kordajate vektor (1 2 5 10 18 30 35 44 46 40 25); näiteks arv 1 on liikme z^0 kordaja ning arv 25 liikme z^{10} kordaja. Korrutades saadud vektorit veelkord vektoriga $c = (1\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ ning arvutades välja ainult liikmele z^{10} vastava diagonaali, saame selle liikme kordajaks $30 \cdot 5 + 35 \cdot 4 + 44 \cdot 3 + 46 \cdot 2 + 40 \cdot 1 + 25 \cdot 1 = 579$.

15. Olgu M_n teekondade arv täisarvuliste koordinaatidega võre punktist $(0, 0)$ punkti $(n, 0)$, mis ei lasku allapoole joont $y = 0$ ning milles iga samm on kas $(1, 0)$, $(1, 1)$ või $(1, -1)$. Konstrueerida arvujada (M_n) (harilik) genereeriv funktsioon.

Lahendus. Kõik sellised teekonnad võib jaotada kahte klassi: need, mille esimene samm on $(1, 0)$, ja need, mille esimene samm on $(1, 1)$.

- Kui teekonna esimene samm on $(1, 0)$, siis on teekonna osa punktist $(1, 0)$ punkti $(n, 0)$ omaette teekond, mis rahuldab ülesande tingimusi, ainult parameeter on $n - 1$. Seega selliseid teekondi on M_{n-1}.

- Kui teekonna esimene samm on $(1,1)$, siis peab leiduma koht, kus teekond siirdub sirgelt $y=1$ sirgele $y=0$ sammuga $(1,-1)$. Olgu $(i,1)$ esimene punkt, kus selline samm tehakse. Seega esimese $i-1$ sammu jooksul punktist $(1,1)$ punkti $(i,1)$ püsib teekond vähemalt sirge $y=1$ kõrgusel. Selliseid teekondi on M_{i-1} tükki. Teekonna lõpuosa punktist $(i+1,0)$ lõpp-punkti $(n,0)$ on ülesande tingimustele vastav teekond sammude arvuga $n-1-i$, selliseid teekondi on M_{n-1-i}. Kokkuvõttes on vaadeldaval juhul teekondade arv $\sum_{i=1}^{n-1} M_{i-1}M_{n-1-i}$.

Järelikult $M_n = M_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1} M_{i-1}M_{n-1-i}$. Analüüsi huvides teeme indeksite nihked: kõigepealt i asemele $i-1$ ja seejärel n asemele $n+1$. Seega

$$M_{n+1} = M_n + \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{n-1-i}, \qquad n = 0,\ 1,\ \ldots$$

Algtingimus on $M_0 = 1$.

Olgu $M(z)$ arvude M_n genereeriv funktsioon. Korrutame saadud võrrandit z^n-ga ja liidame iga n korral:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{n+1}z^n = \sum_{n=0}^{\infty} M_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{n-1-i} z^n.$$

Vasak pool on $\frac{M(z)-1}{z}$ ning parema poole esimene liige $M(z)$. Parema poole teise liikme võime kirjutada kujul

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{n-1-i} z^n = z\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} M_i z^i M_{n-1-i} z^{n-1-i} = z\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} M_i z^i M_{n-i} z^{n-i},$$

see on $zM(z)^2$. Seega saame võrduse $\frac{M(z)-1}{z} = M(z)+zM(z)^2$ ehk $z^2M(z)^2 + (z-1)M(z)+1 = 0$, millest

$$M(z) = \frac{1-z-\sqrt{1-2z-3z^2}}{2z^2},$$

valides ruutjuure ette märgi $-$, et $M(0) = M_0$ oleks lõplik.

Arve M_n nimetatakse Motzkini arvudeks.

16. Kui palju saab tähtedest A, B, C, D, E, F, G, H koostada 6-tähelisi sõnu, milles igaüks tähtedest A, B, C, D esineb ülimalt 1 kord?

Lahendus. Et sõnas on erinevate tähtede järjekord oluline, siis kasutame eksponentsiaalseid genereerivaid funktsioone. Tähtede A, B, C, D esinemiste arvu loendavad genereerivad funktsioonid

$$A(z) = B(z) = C(z) = D(z) = 1+z,$$

tähtede E, F, G, H esinemiste arvu aga genereerivad funktsioonid

$$E(z) = F(z) = G(z) = H(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \mathrm{e}^z.$$

Kõigi tingimustele vastavate sõnade arvu loendab eksponentsiaalne genereeriv funktsioon, mis on kõigi nende funktsioonide korrutis ehk funktsioon

$$(1+z)^4\mathrm{e}^{4z} = \Big(\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}z^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty}4^j\frac{z^j}{j!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\min(4,n)}\binom{4}{k}\frac{4^{n-k}}{(n-k)!}\Big)n!\cdot\frac{z^n}{n!}.$$

Liikme $\frac{z^n}{n!}$ kordaja on sobivate n-täheliste sõnade arv. Seega 6-täheliste sõnade arv on $(\binom{4}{0}\frac{4^6}{6!} + \binom{4}{1}\frac{4^5}{5!} + \binom{4}{2}\frac{4^4}{4!} + \binom{4}{3}\frac{4^3}{3!} + \binom{4}{4}\frac{4^2}{2!}) \cdot 6! = 111232$.