Diskreetne matemaatika 2012

13. praktikum

Reimo Palm

Vaatleme loendamisülesandeid, milles tuleb arvestada olukorra sümmeetriat. Sümmeetriat kirjeldatakse tavaliselt teatava teisenduste rühma abil, milleks võivad olla näiteks kujundi pöörded või graafi automorfismid. Teisenduste rühm määrab kõigi variantide hulgal klassijaotuse, kus samasse klassi kuuluvaid variante üksteisest ei eristata. Loendatakse ekvivalentsiklasse.

Praktikumiülesanded

1. Mitmel viisil saab värvida kuubi tahud 3 värviga, kui värvimisi, mis on saadavad üksteisest kuubi pööramise teel, ei eristata?

Olgu X kuubi tahkude hulk, C värvide hulk ja $\mathcal{F}$ kõigi funktsioonide $f\colon X \to C$ hulk. Olgu G kuubi kõigi pöörete rühm.

a) Mitu elementi on hulgas $\mathcal{F}$?

b) Kuubi pöördeteisendused on pöörded ümber kuubi mingi sümmeetriatelje. Leida kõik need teisendused.

c) Iga pöörde korral leida selle pöörde püsipunktide arv hulgas $\mathcal{F}$.

d) Kasutades Burnside'i lemmat, leida ülesande vastus.

e) Mitmel viisil saab kuubi tahud värvida siis, kui 3 värvi asemel on kasutada n värvi?

Lahendus. a) Et $|X| = 6$ ja $|C| = 3$, siis funktsioone $f\colon X \to C$ on kokku $3^6 = 729$.

b) Need teisendused on samasusteisendus (1 teisendus), pööre ümber kahe vastastipu 120° või 240° võrra ($4 + 4$ teisendust), pööre ümber kahe vastasserva 180° võrra (6 teisendust), pööre ümber kahe vastastahu 90°, 180° või 270° võrra ($3 + 3 + 3$ teisendust). Kokku 24 teisendust.

c) Teisenduste püsipunktide arvud on esitatud järgmises tabelis. Tsükkel on nende tahkude hulk, mis teisenevad tsükliliselt üksteiseks selle teisenduse toimel. Ühte tsüklisse kuuluvad tahud tuleb värvida kindlasti sama värviga (funktsiooni $f\colon X \to C$ väärtused nendel elementidel peavad olema samad). Iga tsükli värvi võib valida teistest tsüklitest sõltumatult.

Teisendus	Arv	Tsükleid	Püsipunkte
Samasusteisendus	1	6	3^6
Pööre ümber vastastippude 120°	4	2	3^2
Pööre ümber vastastippude 240°	4	2	3^2
Pööre ümber vastasservade 180°	6	3	3^3
Pööre ümber vastastahkude 90°	3	3	3^3
Pööre ümber vastastahkude 180°	3	4	3^4
Pööre ümber vastastahkude 270°	3	3	3^3

d) Burnside'i lemma põhjal on värvimisvõimaluste arv

$$\frac{1}{24}(1 \cdot 3^6 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 3 \cdot 3^3) = 57.$$

e) Erinevalt senisest saab nüüd tsükli tahkude jaoks värvi valida n värvi hulgast. Värvimisvõimalusi on

$$\frac{1}{24}(1 \cdot n^6 + 4 \cdot n^2 + 4 \cdot n^2 + 6 \cdot n^3 + 3 \cdot n^3 + 3 \cdot n^4 + 3 \cdot n^3) = \frac{n^6 + 3n^4 + 12n^3 + 8n^2}{24}.$$

Lahendus Pólya teoreemi abil. Kirjeldame teisenduste tsüklistruktuuri täpsemalt, leides tsüklite arvu asemel iga teisenduse tsüklilisuse indikaatori (kus $w_i^{c_i}$ näitab, et pikkusega i tsüklite arv on c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$):

Teisendus	Arv	Tsükl. ind
Samasusteisendus	1	w_1^6
Pööre ümber vastastippude 120°	4	w_3^2
Pööre ümber vastastippude 240°	4	w_3^2
Pööre ümber vastasservade 180°	6	w_2^3
Pööre ümber vastastahkude 90°	3	$w_1^2 w_4$
Pööre ümber vastastahkude 180°	3	$w_1^2 w_2^2$
Pööre ümber vastastahkude 270°	3	$w_1^2 w_4$

Antud teisenduste rühma tsüklilisuse indikaator on $Z_{Q_3} = \frac{1}{24}(w_1^6 + 4w_3^2 + 4w_3^2 + 6w_2^3 + 3w_1^2 w_4 + 3w_1^2 w_2^2 + 3w_1^2 w_4)$ ehk

$$Z_{Q_3} = \frac{1}{24}(w_1^6 + 3w_1^2 w_2^2 + 6w_1^2 w_4 + 6w_2^3 + 8w_3^2).$$

Pólya teoreemi põhjal on kuubi tahkude 3 värviga värvimisvõimaluste arv

$$Z_{Q_3}(3, 3, 3, 3, 3, 3) = \frac{1}{24}(3^6 + 3 \cdot 3^2 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3^2 \cdot 3 + 6 \cdot 3^3 + 8 \cdot 3^2) = 57$$

ning n värviga värvimisvõimaluste arv

$$Z_G(n,n,n,n,n,n) = \frac{1}{24}(n^6 + 3n^4 + 12n^3 + 8n^2).$$

Muu hulgas oleme sellega kindlaks teinud, et arv $n^6 + 3n^4 + 12n^3 + 8n^2$ jagub 24-ga iga naturaalarvu n korral.

2. Mitu põhimõtteliselt erinevat 7-kivilist kaelakeed saab koostada

a) valgetest ja mustadest kividest;

b) valgetest, mustadest ja sinistest kividest?

Kahte kaelakeed loeme põhimõtteliselt erinevaks, kui kumbki pole saadav teisest pööramiste ja peegeldamistega. Nööri sõlmkohta ei arvesta.

Lahendus. a) 7-kivilise kaelakee sümmeetriateisendused on samasusteisendus (1 teisendus), pööre ümber kaelakee keskpunkti päripäeva nurga $\frac{360°}{7}$ 1-, 2-, ..., 6-kordse võrra (6 teisendust) ning peegeldus tippu vastasserva keskpunktiga ühendava sirge suhtes (7 teisendust). Rohkem teisendusi ei ole. Kokku on 14 teisendust.

Leiame iga teisenduse püsipunktide arvud, arvestades, et iga kivi võib olla 2 värvi:

Teisendus	Arv	Tsükleid	Püsipunkte
Samasusteisendus	1	7	2^7
Pööre	6	1	2^1
Peegeldus	7	4	2^4

Värvimisvõimaluste arv on

$$\frac{1}{14}(2^7 + 6 \cdot 2^1 + 7 \cdot 2^4) = 18.$$

b) Kolme värviga värvimisvõimalusi on analoogiliselt

$$\frac{1}{14}(3^7 + 6 \cdot 3^1 + 7 \cdot 3^4) = 198.$$

3. Risttahukakujulise karbi pikkus on 10 cm, laius 5 cm ja kõrgus 5 cm. Mitmest elemendist koosneb selle karbi pöörete rühm?

Lahendus. Iga liikumisteisendus ruumis, mille käigus üks punkt jääb paigale, on pööre ümber mingi telje. Seetõttu teisendused, mis viivad ruumilise kujundi iseendaks, on pöörded ümber kujundi sümmeetriatelgede. Antud risttahukakujulisel karbil on järgmised pöörded: samasusteisendus (1 teisendus), pööre ümber väiksemate vastastahkude 90°, 180° või 270° ($1+1+1$ teisendust), pööre ümber suuremate vastastahkude 180° (2 teisendust), pööre ümber pikemate vastasservade 180° (2 teisendust). Kokku 8 teisendust.

4. Olgu $X = \{a, b, c, d\}$, $C = \{\text{must}, \text{valge}\}$ ning $\mathcal{F}$ kõigi funktsioonide $f \colon X \to C$ hulk. Lisaks olgu $G = \{\text{id}, (12), (34), (12)(34)\}$. Vaatleme rühma G toimet hulgal $\mathcal{F}$.

a) Leida kõigi rühma G elementide püsipunktid.

b) Leida kõigi hulga $\mathcal{F}$ elementide stabilisaatorid.

c) Leida kõik orbiidid hulgas $\mathcal{F}$.

Lahendus. Tähistame funktsiooni tema väärtuste esitähtede järjendiga hulga X elementide järjestuses. Näiteks funktsioonile f, mille korral $f(a) = f(c) = \text{must}$ ja $f(b) = f(d) = \text{valge}$, vastab järjend mvmv.

a) Rühma G elementide püsipunktid on järgmised.

Element	Püsipunktid
id	kõik hulga $\mathcal{F}$ elemendid
(12)	mmmm, mmmv, mmvm, mmvv, vvmm, vvmv, vvvm, vvvv
(34)	mmmm, mvmm, vmmm, vvmm, mmvv, mvvv, vmvv, vvvv
(12)(34)	mmmm, mmvv, vvmm, vvvv

b) Hulga $\mathcal{F}$ elementide stabilisaatorid on järgmised.

Elemendid	Stabilisaatorid
mmmm, vvvv, mmvv, vvmm	id, (12), (34), (12)(34)
mmmv, mmvm, vvmv, vvvm	id, (12)
mvmm, vmmm, mvvv, vmvv	id, (34)
mvmv, vmvm, mvvm, vmmv	id

c) Hulk $\mathcal{F}$ jaguneb rühma G toime alusel järgmisteks orbiitideks (ekvivalentsiklassideks): {mmmm}, {vvvv}, {mmvv}, {vvmm}, {mmmv, mmvm}, {mvmm, vmmm}, {vvvm, vvmv}, {vmvv, mvvv}, {mvmv, vmmv, mvvm, vmvm}.

5. Leida järgmiste rühmade tsüklilisuse indikaatorid.

a) C_4 (ruudu pöörded)

b) C_5 (korrapärase viisnurga pöörded)

c) C_6 (korrapärase kuusnurga pöörded)

d) D_4 (ruudu pöörded ja peegeldused)

e) D_5 (korrapärase viisnurga pöörded ja peegeldused)

f) D_6 (korrapärase kuusnurga pöörded ja peegeldused)

Lahendus. a) $Z_{C_4} = \frac{1}{4}(w_1^4 + w_2^2 + 2w_4)$
b) $Z_{C_5} = \frac{1}{5}(w_1^5 + 4w_5)$
c) $Z_{C_6} = \frac{1}{6}(w_1^6 + w_2^3 + 2w_3^2 + 2w_6)$
d) $Z_{D_4} = \frac{1}{8}(w_1^4 + 2w_1^2 w_2 + 3w_2^2 + 2w_4)$
e) $Z_{D_5} = \frac{1}{10}(w_1^5 + 5w_1 w_2^2 + 4w_5)$
f) $Z_{D_6} = \frac{1}{12}(w_1^6 + 3w_1^2 w_2^2 + 4w_2^3 + 2w_3^2 + 2w_6)$

6. Olgu S_m kõigi permutatsioonide hulk m elemendist. Permutatsiooni $\sigma \in S_m$ *tsüklitüübiks* nimetame vektorit $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$, mille iga komponent c_i on antud permutatsiooni selliste tsüklite arv, mille pikkus on i.

a) Tõestada, et kõigi tsüklitüübiga $\mathbf{c}$ permutatsioonide arv on

$$\frac{m!}{\prod_{i=1}^{m} i^{c_i} c_i!}.$$

b) Leida rühmade S_3 ja S_4 tsüklilisuse indikaatorid.

Lahendus. a) Kirjutame järjest $c_1 + c_2 + \ldots + c_m$ sulupaari ning lisame esimese c_1 sulupaari vahele ühe tühja positsiooni, järgmise c_2 sulupaari vahele kaks tühja positsiooni jne kuni viimase c_m sulupaari vahele m tühja positsiooni. Kokku lisame niimoodi $c_1 + 2c_2 + \ldots + mc_m = m$ positsiooni. Nende positsioonide täitmiseks arvudega 1, 2, $\ldots$, m on $m!$ võimalust. Kuid iga $i = 1, 2, \ldots, m$ korral võime c_i sulupaari, mis sisaldavad positsioone pikkusega i, järjestada omavahel ümber $c_i!$ viisil ning igaühes neist c_i sulupaarist nihutada elemente tsükliliselt i viisil – nii saame ikka ühe ja sama permutatsiooni tükliesituse. Seega esineb iga permutatsioon nende $m!$ suluesituse seas $\prod_{i=1}^{m} i^{c_i} c_i!$ korda. Permutatsioonide arvu leiame nüüd jagamise teel.

b) Rühmas S_3 on $3! = 6$ elementi. Võimalikud tsüklitüübid on $(3, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ ja $(0, 0, 1)$, vastavaid permutatsioone on punkti a) valemi põhjal

$$\frac{3!}{1^3 3!} = 1, \qquad \frac{3!}{1^1 1! 2^1 1!} = 3, \qquad \frac{3!}{3^1 1!} = 2,$$

seega rühma S_3 tsüklilisuse indikaator on

$$Z_{S_3} = \frac{1}{6}(w_1^3 + 3w_1 w_2 + 2w_3)$$

Rühmas S_4 on $4! = 24$ elementi ja võimalikud tsüklitüübid on $(4, 0, 0, 0)$, $(2, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 2, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ vastavalt permutatsioonide arvuga 1, 6, 8, 3, 6. Rühma S_4 tsüklilisuse indikaator on

$$Z_{S_4} = \frac{1}{24}(w_1^4 + 6w_1^2 w_2 + 8w_1 w_3 + 3w_2^2 + 6w_4).$$

7. Kui palju leidub 6 kivist koosnevaid kaelakeesid, kuhu kuulub 1 kollane, 2 punast ja 3 sinist kivi, kui lugeda samaks kaelakeed, mis on saadavad üksteisest

a) pöörete ja/või peegeldustega;

b) ainult pööretega?

Lahendus. a) Kaelakee pöörete rühm on D_6, mille tsüklilisuse indikaator on leitud ülesandes 5 f). Loeme kollase kivi kaaluks k, punase kivi kaaluks p ja sinise kivi kaaluks s. Pólya teoreemi põhjal on neid värvi kividest moodustatud kaelakeede loend siis

$$\begin{aligned}
&Z_{D_6}(k+p+s, k^2+p^2+s^2, \ldots, k^6+p^6+s^6) = \\
&\qquad = \frac{1}{12}\big((k+p+s)^6 + 3(k+p+s)^2(k^2+p^2+s^2)^2 + \\
&\qquad\qquad + 4(k^2+p^2+s^2)^3 + 2(k^3+p^3+s^3)^2 + 2(k^6+p^6+s^6)\big).
\end{aligned}$$

Ülesande vastus on liikme kp^2s^3 kordaja. Selline liige saab tekkida sulgudes ainult kahest esimesest liidetavast. Multinoomvalemit kasutades ja sulge osaliselt lahti korrutades saame selleks kordajaks

$$\frac{1}{12}\left(\binom{6}{1,2,3} + 3 \cdot 2 \cdot 2\right) = 6.$$

b) Siin on kaelakee pöörete rühm C_6, mille tsükliindeks on leitud ülesandes 5 c). Pólya teoreemi põhjal saame loendi

$$\begin{aligned}
&Z_{C_6}(k+p+s, k^2+p^2+s^2, \ldots, k^6+p^6+s^6) = \\
&= \frac{1}{6}\big((k+p+s)^6 + (k^2+p^2+s^2)^3 + 2(k^3+p^3+s^3)^2 + 2(k^6+p^6+s^6)\big).
\end{aligned}$$

Liikme kp^2s^3 kordaja saame esimesest liidetavast:

$$\frac{1}{6}\binom{6}{1,2,3} = 10.$$

Märkus. Arvutialgebrasüsteemiga võime kummagi loendi ka täielikult välja arvutada:

$$\begin{aligned}
Z_{D_6}&(k+p+s, k^2+p^2+s^2, \ldots, k^6+p^6+s^6) = k^6 + k^5p + k^5s + 3k^4p^2 \\
&+ 3k^4ps + 3k^4s^2 + 3k^3p^3 + 6k^3p^2s + 6k^3ps^2 + 3k^3s^3 + 3k^2p^4 + 6k^2p^3s \\
&+ 11k^2p^2s^2 + 6k^2ps^3 + 3k^2s^4 + kp^5 + 3kp^4s + 6kp^3s^2 + 6kp^2s^3 + 3kps^4 \\
&+ ks^5 + p^6 + p^5s + 3p^4s^2 + 3p^3s^3 + 3p^2s^4 + ps^5 + s^6
\end{aligned}$$

ja

$$Z_{C_6}(k+p+s, k^2+p^2+s^2, \dots, k^6+p^6+s^6) = k^6+k^5p+k^5s+3k^4p^2 + 5k^4ps+3k^4s^2+4k^3p^3+10k^3p^2s+10k^3ps^2+4k^3s^3+3k^2p^4 + 10k^2p^3s+16k^2p^2s^2+10k^2ps^3+3k^2s^4+kp^5+5kp^4s+10kp^3s^2 + 10kp^2s^3+5kps^4+ks^5+p^6+p^5s+3p^4s^2+4p^3s^3+3p^2s^4+ps^5+s^6.$$

Nii saame loendi, millest on võimalik leida ühekorraga kõik 6-kiviliste kaelakeede arvud, kus eri värvi kivide arvud on fikseeritud.

8. Mitmel viisil saab värvida kuubi tahud punase, musta ja valge värviga nii, et punaseid tahke oleks vähemalt 2?

Lahendus. Kuubi pöörete rühma tsüklilisuse indikaatori leidsime ülesandes 1. Loeme punase värvi kaaluks z, ning et musta ja valget värvi tahkude täpsed arvud pole olulised, siis loeme musta ja valge värvi kaaluks 1. Kõigi värvimisvõimaluste loend on siis Pólya teoreemi kohaselt

$$\begin{aligned} &Z_{G_3}(z+2, z^2+2, \dots, z^6+2) = \\ &= \frac{1}{24}\big((z+2)^6+3(z+2)^2(z^2+2)^2+6(z+2)^2(z^4+2)+ \\ &\qquad +6(z^2+2)^3+8(z^3+2)^2\big) = \\ &= z^6+2z^5+6z^4+10z^3+16z^2+12z+10. \end{aligned}$$

Selle polünoomi iga liige näitab, kui palju leidub selliseid kuubi värvimisvõimalusi, kus punaste tahkude arv on liikme astendaja. Järelikult vähemalt kahe punase tahuga värvimisi on $1+2+6+10+16=35$.

9. Kuubikujuline reklaaminstallatsioon pannakse kokku kuuest ruudukujulisest tahust. Värvitrükis tahk maksab 3000 eurot, mustvalges trükis tahk 2000 eurot ja valge tahk 1000 eurot. Kui palju leidub erinevaid reklaamkuupe, mille hind on täpselt 12000 eurot?

Lahendus. Valime valge tahu kaaluks z, mustvalges trükis tahu kaaluks z^2 ja värvitrükis tahu kaaluks z^3 ning leiame loendi

$$\begin{aligned} &Z_{Q_3}(z+z^2+z^3, z^2+z^4+z^6, \dots, z^6+z^{12}+z^{18}) = \\ &= \frac{1}{24}\big((z+z^2+z^3)^6+3(z+z^2+z^3)^2(z^2+z^4+z^6)^2+6(z+z^2+z^3)^2\cdot \\ &\qquad \cdot(z^4+z^8+z^{12})+6(z^2+z^4+z^6)^3+8(z^3+z^6+z^9)^2\big) = \\ &= z^{18}+z^{17}+3z^{16}+4z^{15}+7z^{14}+7z^{13}+ \\ &\qquad +11z^{12}+7z^{11}+7z^{10}+4z^9+3z^8+z^7+z^6. \end{aligned}$$

Ülesande vastus on liikme z^{12} kordaja ehk 11.

10. Antud on korrapärane tetraeeder. Kirjutada välja tsüklilisuse indikaator a) tippude, b) servade, c) tahkude jaoks. Leida, mitmel erineval viisil saab tipud, servad või tahud värvida kahe värviga.

Lahendus. Korrapärase tetraeedri pöördeteisendused on järgmised: samasusteisendus (1 teisendus), pööre ümber tippu ja vastastahu keskpunkti ühendava telje 120° või 240° võrra (4+4 teisendust), pööre ümber kahe vastasserva keskpunkte ühendava telje 180° võrra (3 teisendust), kokku teisendusi 12.

Tetraeedril on 4 tippu, 6 serva ja 4 tahku. Vaadeldes teisendusi tippude, servade või tahkude teisendustena, toimib pöördeteisenduste rühm vastavalt 4-, 6- või 4-elemendilisel hulgal. Leiame rühma tsüklilisuse indikaatori neil kolmel juhul.

		Tsüklilisuse indikaator		
Teisendus	Arv	tipud	servad	tahud
Samasusteisendus	1	z_1^4	z_1^6	z_1^4
Pööre ümber tipu ja vastastahu	8	$z_1 z_3$	z_3^2	$z_1 z_3$
Pööre ümber kahe vastasserva	3	z_2^2	$z_1^2 z_2^2$	z_2^2

Järelikult tippude, servade ja tahkude hulgal toimiva teisenduste rühma tsüklilisuse indikaatorid Z_t, Z_s, Z_f on

$$Z_t = Z_f = \frac{1}{12}(z_1^4 + 8z_1z_3 + 3z_2^2), \qquad Z_s = \frac{1}{12}(z_1^6 + 8z_3^2 + 3z_1^2z_2^2).$$

Kahe värviga saab värvida tippe ja tahke $\frac{1}{12}(2^4 + 8 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2) = 5$ ning servi $\frac{1}{12}(2^6 + 8 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot 2^2) = 12$ viisil.

11. Süsivesinik naftaleen koosneb kümnest süsiniku aatomist, mis moodustavad kaks kuusnurka, nagu kujutatud joonisel 1, ning kaheksast vesiniku aatomist, mis kinnituvad süsiniku aatomite külge numbritega 1 kuni 8 märgitud positsioonidel. Kahte molekuli nimetatakse isomeerideks, kui nad koosnevad samast arvust ja liigist aatomitest, kuid neil on erinev struktuur.

a) Naftool saadakse siis, kui naftaleenis asendada üks vesiniku aatom hüdroksüülrühmaga (–OH). Kui palju leidub erinevaid naftooli isomeere?

b) Tetrametüülnaftaleen saadakse siis, kui naftaleenis asendada neli vesiniku aatomit metüülrühmadega (–CH_3). Kui palju leidub erinevaid tetrametüülnaftaleeni isomeere?

c) Kui palju isomeere saab konstrueerida, kui naftaleenis asendada kaks vesiniku aatomit hüdroksüülrühmadega, kaks metüülrühmadega ja kaks karboksüülrühmadega (–COOH)?

Lahendus. Tegemist on nummerdatud süsiniku aatomite värvimisega, kus „värvideks“ on eri liiki aatomid. Graafi sümmeetriateisendused on: samasusteisendus, pööre ümber sümmeetriakeskpunkti ning peegeldused horisontaalsest ja vertikaalsest sümmeetriateljest. Need vastavad kõigile võimalustele, milliseks tipuks saab teiseneda tipp 1. Vaatleme neid teisendusi nummerdatud tippude hulga teisendustena. Sümmeetriateisenduste rühma (milleks on tegelikult dieedrirühm D_2) tsüklilisuse indikaator on

$$Z_{D_2} = \frac{1}{4}(w_1^8 + 3w_2^4).$$

a) Võtame hüdroksüülrühma kaaluks z ja vesiniku aatomi kaaluks 1. Eri arvu hüdroksüülrühmadega isomeeride loend on

$$Z_{D_2}(z+1, z^2+1, \ldots, z^8+1) = \frac{1}{4}((z+1)^8 + 3(z^2+1)^4).$$

Ühe hüdroksüülrühmaga isomeeride arv on liikme z kordaja $\frac{1}{4} \cdot 8 = 2$, nagu ka vahetult veenduda võib.

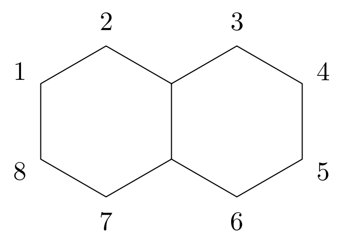
b) Võtame metüülrühma kaaluks z ja vesiniku aatomi kaaluks 1. Ülesande vastus on eelmise valemi liikme z^4 kordaja $\frac{1}{4}(\binom{8}{4} + 3\binom{4}{2}) = 22$.

c) Olgu nende nelja „värvi“ kaalud vastavalt a, b, c, d. Võimaluste loend on

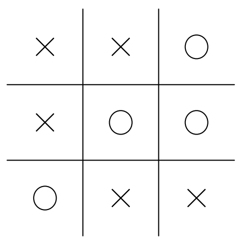
$$Z_{D_2}(a+b+c+d, \ldots, a^8+b^8+c^8) = \frac{1}{4}\big((a+b+c+d)^8 + 3(a^2+b^2+c^2+d^2)^4\big).$$

Liikme $a^2b^2c^2d^2$ kordaja leiame multinoomvalemi põhjal, see on $\frac{1}{4}\big(\binom{8}{2,2,2,2} + 3\binom{4}{1,1,1,1}\big) = 648$.

Küsimus. Joonis 1 ei ole päris täpne, sest orgaanilistes ühendites moodustab süsinik teatavasti mitte 3, vaid 4 kovalentset sidet. Seetõttu on sellel joonisel osa servi kahekordsed. Millised on punktide a), b) ja c) vastused juhul, kui joonise 1 asemel võtta aluseks naftaleeni tegelik struktuurivalem?



Joonis 1.



Joonis 2.

12. Kui trips-traps-trulli mängu mängida senikaua, kuni kõik lahtrid saavad täidetud, tekib lõppseis, milles on viis risti ja neli ringi (joonis 2). Kuid osa nendest lõppseisudest on põhimõtteliselt samad. Loeme kaks seisu samaks, kui üks on saadav teisest pööramiste ja peegeldamiste abil. Kui palju leidub põhimõtteliselt erinevaid trips-traps-trulli lõppseise?

Lahendus. Ruudustiku sümmeetriateisenduste rühm on ruudu pöörete ja peegelduste rühm, mis toimib 9-elemendilisel lahtrite hulgal. Sellesse rühma kuuluvad teisendused annavad rühma tsüklilisuse indikaatorisse järgmised panused: samasusteisendus w_1^9, pööre 180° võrra $w_1 w_2^4$, pööre 90° või 270° võrra kumbki $w_1 w_4^2$, peegeldused vastasnurkadest või vastaskülgede keskpunktidest (kokku 4 tükki) igaüks $w_1^3 w_2^3$. Järelikult

$$Z_G = \frac{1}{8}(w_1^9 + w_1 w_2^4 + 2w_1 w_4^2 + 4w_1^3 w_2^3).$$

Ruudustiku kõigi täitmisvõimaluste loend on seega

$$\begin{aligned} Z_G(\times + \circ, \times^2 + \circ^2, \ldots, \times^9 + \circ^9) = \frac{1}{8}\big((\times + \circ)^9 + (\times + \circ)(\times^2 + \circ^2)^4 + \\ + 2(\times + \circ)(\times^4 + \circ^4)^2 + 4(\times + \circ)^3(\times^2 + \circ^2)^3\big). \end{aligned}$$

Liikme $\times^5 \circ^4$ kordaja on

$$\frac{1}{8}\left(\binom{9}{5} + \binom{4}{2} + 2 \cdot \binom{2}{1} + 4 \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{2} + 4 \cdot \binom{3}{3} \cdot \binom{3}{1}\right) = 23.$$

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused.

13. Leida rühma C_{12} tsüklilisuse indikaator.

Lahendus. Käsitleme rühma elemente korrapärase 12-nurga pööretena. Olgu selle 12-nurga tipud 0, 1, ..., 11. Pööret võib identifitseerida selle järgi, milliseks tipuks ta viib tipu 0. Iga pöörde korral on kõik tsüklid võrdse pikkusega, sümmeetria tõttu. Näiteks pöörde $0 \to 2$ puhul on kaks kuueelemendilist tsüklit: (0 2 4 6 8 10) ja (1 3 5 7 9 11).

Leiame iga teisenduse korral tsüklite pikkuse, tsüklite arvu ja teisendusele vastava liidetava tsüklilisuse indikaatoris.

Teisendused	Teisenduste arv	pikkus	Tsüklite arv	indikaator
$0 \to 0$	1	1	12	w_1^{12}
$0 \to 1$, $0 \to 5$, $0 \to 7$, $0 \to 11$	4	12	1	w_{12}
$0 \to 2$, $0 \to 10$	2	6	2	w_6^2
$0 \to 3$, $0 \to 9$	2	4	3	w_4^3
$0 \to 4$, $0 \to 8$	2	3	4	w_3^4
$0 \to 6$	1	2	6	w_2^6

Järelikult rühma tsüklilisuse indikaator on

$$Z_{C_{12}} = \frac{1}{12}(w_1^{12} + w_2^6 + 2w_3^4 + 2w_4^3 + 2w_6^2 + 4w_{12}).$$

14. Mitu erinevat lapitekki mõõtmetega 3×4 saab teha 5 punasest ja 7 sinisest ruudust eeldusel, et

a) tekki ei või ümber pöörata;

b) tekki võib ümber pöörata?

Lahendus. Teisenduste rühm on 3×4-ruudustiku sümmeetriateisenduste rühm, mis toimib ruudustiku ruutude hulgal. Need teisendused on järgmised.

Teisendus	Arv	Tsükl. ind
Samasusteisendus	1	w_1^{12}
Pööre 180°	1	w_2^6
Peegeldus pikemast teljest	1	$w_1^4 w_2^4$
Peegeldus lühemast teljest	1	w_2^6

Seega teisenduste rühma tsüklilisuse indikaator on punktis a)

$$Z_a = \frac{1}{2}(w_1^{12} + w_2^6)$$

ning punktis b)

$$Z_b = \frac{1}{4}(w_1^{12} + w_1^4 w_2^4 + 2w_2^6).$$

Olgu punase ja sinise ruudu kaal vastavalt z ja 1. Punktis a) tuleb leida liikme z^5 kordaja avaldises

$$Z_a(z+1, z^2+1, \ldots, z^{12}+1) = \frac{1}{2}\big((z+1)^{12} + (z^2+1)^6\big).$$

Et paaritu astmega liikmed tekivad ainult esimesest liidetavast, siis see kordaja on $\frac{1}{2} \cdot \binom{12}{5} = 396$. Punktis b) tuleb leida sama liikme kordaja avaldises

$$Z_b(z+1, z^2+1, \ldots, z^{12}+1) = \frac{1}{4}\big((z+1)^{12} + (z+1)^4(z^2+1)^4 + 2(z^2+1)^6\big).$$

Paaritu astmega liikmed tekivad esimesest ja teisest liidetavast. Liikme z^5 kordaja on $\frac{1}{4}(\binom{12}{5}+\binom{4}{1}\binom{4}{2}+\binom{4}{3}\binom{4}{1})=208$.

15. Tõestada, et rühma S_n tsüklilisuse indikaator $Z_{S_n}(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ rahuldab rekurrentset seost

$$Z_{S_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_iZ_{S_{n-i}}.$$

Lahendus. Vaatleme hulga $\{1,2,\ldots,n\}$ permutatsioone. Jaotame need klassidesse selle järgi, kui pikk on elementi 1 sisaldav tsükkel. Kui selle tsükli pikkus on i ($i=1,\,2,\,\ldots,\,n$), siis võib selles ülejäänud $i-1$ elementi valida $(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)$ viisil. Igale niisugusele esimesele tsüklile võime järele lisada ülejäänud $n-i$ elemendi suvalise permutatsiooni. Seega annavad sellised permutatsioonid rühma S_n tsüklilisuse indikaatoris esinevasse summasse panuse $(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)w_i\cdot(n-i)!Z_{S_{n-i}}=(n-1)!w_iZ_{S_{n-i}}$. Rühma S_n tsüklilisuse indikaator on järelikult

$$Z_{S_n}=\frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}(n-1)!w_iZ_{S_{n-i}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_iZ_{S_{n-i}}.$$

Selle valemi abil saab rühmade S_n tsüklilisuse indikaatoreid arvutada järk-järgult, algväärtus on $Z_{S_0}=1$. Näiteks

$$\begin{aligned}
Z_{S_1}&=w_1\\
Z_{S_2}&=\frac{1}{2}(w_1^2+w_2)\\
Z_{S_3}&=\frac{1}{3}(w_1\cdot\frac{1}{2}(w_1^2+w_2)+w_2\cdot w_1+w_3)=\frac{1}{6}(w_1^3+3w_1w_2+2w_3)\\
Z_{S_4}&=\frac{1}{4}(w_1\cdot\frac{1}{6}(w_1^3+3w_1w_2+2w_3)+w_2\cdot\frac{1}{2}(w_1^2+w_2)+w_3\cdot w_1+w_4)=\\
&=\frac{1}{24}(w_1^4+6w_1^2w_2+8w_1w_3+3w_2^2+6w_4).
\end{aligned}$$

16. Mitmel viisil saab vaateaknale välja panna kolm kuuekivilist kaelakeed, milles on kokku 9 valget ja 9 musta kivi? Oluline ei ole kaelakeede pööramine ega nende järjekorra vahetamine.

Lahendus. Vaatleme kõigepealt ühte kaelakeed. Kaelakee pöörete rühm on D_6, mille tsüklilisuse indikaator on ülesande 5 f) põhjal

$$Z_{D_6}(w_1,w_2,\ldots,w_6)=\frac{1}{12}(w_1^6+3w_1^2w_2^2+4w_2^3+2w_3^2+2w_6).$$

Olgu x valge ja y musta kivi kaal (võiksime y asemel võtta ka 1). Siis ühe kivi värvivõimaluste loend on $x + y$. Seega terve kaelakee koostamisviiside loend on Pólya teoreemi põhjal

$$\begin{aligned}
&l(x,y) = Z_{D_6}(x+y, x^2+y^2, \ldots, x^6+y^6) = \\
&\quad = \frac{1}{12}\big((x+y)^6 + 3(x+y)^2(x^2+y^2)^2 + 4(x^2+y^2)^3 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + 2(x^3+y^3)^2 + 2(x^6+y^6)\big) = \\
&\quad = \frac{1}{12}(x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6 \\
&\qquad + 3x^6 + 6x^4y^2 + 3x^2y^4 + 6x^5y + 12x^3y^3 + 6xy^5 + 3x^4y^2 + 6x^2y^4 + 3y^3 \\
&\qquad + 4x^6 + 12x^4y^2 + 12x^2y^4 + 4y^6 + 2x^6 + 4x^3y^3 + 2y^3 + 2x^6 + 2y^6) = \\
&\quad = x^6 + x^5y + 3x^4y^2 + 3x^3y^3 + 3x^2y^4 + xy^5 + y^6.
\end{aligned}$$

Kolme kaelakee kõikvõimalikud ümberpaigutused moodustavad rühma S_3, mille tsüklilisuse indikaator on ülesande 6 b) põhjal

$$Z_{S_3}(w_1, w_2, w_3) = \frac{1}{6}(w_1^3 + 3w_1w_2 + 2w_3).$$

Valime kaelakee kaaluks avaldise x^ay^b, kus a ja b on vastavalt kaelakee valgete ja mustade kivide arv. Siis erinevate kaelakeede koostamisvõimaluste loend on parajasti eelnevas saadud $l(x,y)$. Seega kolme kaelakee erinevate ümberpaigutamisviiside loend on Pólya teoreemi põhjal

$$\begin{aligned}
&Z_{S_3}(l(x,y), l(x^2,y^2), l(x^3,y^3)) = \\
&\quad = \frac{1}{6}\big((x^6 + x^5y + 3x^4y^2 + 3x^3y^3 + 3x^2y^4 + xy^5 + y^6)^3 \\
&\qquad + 3(x^6 + x^5y + 3x^4y^2 + 3x^3y^3 + 3x^2y^4 + xy^5 + y^6) \cdot \\
&\qquad\quad \cdot (x^{12} + x^{10}y^2 + 3x^8y^4 + 3x^6y^6 + 3x^4y^8 + x^2y^{10} + y^{12}) \\
&\qquad + 2(x^{18} + x^{15}y^3 + 3x^{12}y^6 + 3x^9y^9 + 3x^6y^{12} + x^3y^{15} + y^{18})\big).
\end{aligned}$$

Leiame liikme x^9y^9 kordaja, sest kaelakeedes on 9 valget ja 9 musta kivi. Polünoomide korrutamisega $(x^6+x^5y+3x^4y^2+3x^3y^3+3x^2y^4+xy^5+y^6)^2 = \ldots + 12x^9y^3 + 21x^8y^4 + 26x^7y + 31x^6y^6 + 26x^5y^7 + 21x^4y^8 + 12x^3y^9 + \ldots$, korrutades selle veelkord avaldisega $x^6+x^5y+3x^4y^2+3x^3y^3+3x^2y^4+xy^5+y^6$, saame liikme x^9y^9 kordajaks $(12+21)\cdot 1+(26+31+26)\cdot 3+(21+12)\cdot 1 = 315$. Loendi teises liidetavas on liikme x^9y^9 kordaja $3\cdot 1\cdot 3+3\cdot 3\cdot 3+3\cdot 1\cdot 3 = 45$ ning kolmandas liidetavas $2\cdot 3 = 6$. Ülesande vastus on seega $\frac{1}{6}(315+45+6) = 61$.

Arvutusi on muidugi lihtsam teha arvutialgebrasüsteemiga.