Diskreetne matemaatika 2012

14. praktikum

Reimo Palm

Ramsey teooria uurib struktuuri mõõtmete suurenemisel struktuuris tekkivaid korrapärasid.

Ramsey arv $r(k, l)$ on vähim täisarv n, mille korral igas n-tipulises lihtgraafis leidub alamgraaf K_k või alamgraaf O_l, ehk vähim täisarv n, mille korral n-tipulises täisgraafis K_n, mille servad on värvitud kahe värviga, leidub alati esimest värvi servadest koosnev k-tipuline täisgraaf K_k või teist värvi servadest koosnev l-tipuline täisgraaf K_l.

Ramsey arv $r(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ on vähim täisarv n, mille korral n-tipulises täisgraafis K_n, mille servad on värvitud m värviga, leidub alati esimest värvi k_1-tipuline täisgraaf K_{k_1} või teist värvi k_2-tipuline täisgraaf K_{k_2} või $\ldots$ või m-ndat värvi k_m-tipuline täisgraaf K_{k_m}.

Praktikumiülesanded

1. *Ramsey mäng (sim).* Kaks mängijat A ja B mängivad järgmist mängu. Pabrile joonistatakse 6 punkti. Mängija A ühendab kaks punkti punase joonega, mängija B ühendab kaks seni ühendamata punkti rohelise joonega jne. Käike tehakse vaheldumisi. Võidab see, kes ühendab mingid kolm punkti ühte värvi kolmnurgaks.

a) Tõestada, et see mäng ei saa lõppeda viigiga.

b) Tõestada, et selle mängu variant, kus see, kes ühendab mingid kolm punkti ühte värvi kolmnurgaks, kaotab, ei saa lõppeda viigiga.

c) Tõestada, et mõlemad vaadeldud mängu variandid saavad lõppeda viigiga, kui 6 punkti asemel joonistatakse paberile 5 punkti.

2. Tõestada, et kui täielikus kahealuselises graafis $K_{5,5}$ värvida servad mingil viisil punase ja sinise värviga, siis värvitud graafis leidub punane alamgraaf $K_{2,2}$ või sinine alamgraaf $K_{2,2}$.

3. Olgu $G = (V, E)$ graaf, mille puhul $|V| = a + b$, kus a ja b on mingid naturaalarvud. Tõestada, et iga tipu $v \in V$ korral $|N_G(v)| \geqslant a$ või $|N_{\overline{G}}(v)| \geqslant b$.

4. Jalgpalliturniiril osaleb 18 meeskonda. Igas voorus peab iga meeskond ühe mängu. Tõestada, et pärast 8 vooru leidub kolm meeskonda, kellest ükski pole veel mänginud ülejäänud kahe vastu.

5. Täisgraafi K_n servad värvitakse kahe värviga.

a) Tähistagu a_v tipuga v intsidentsete esimest värvi servade arvu. Tõestada, et värvitud graafis leidub täpselt

$$\binom{n}{3} - \frac{1}{2} \sum_{v \in V(K_n)} a_v(n - 1 - a_v)$$

kolmnurka, mille kõik servad on ühte värvi.

b) Tõestada, et eelmise avaldise väärtuse alamtõke on

$$\binom{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 \right\rfloor \right\rfloor.$$

c) Tõestada, et kui 6-tipulises täisgraafis värvida servad kahe värviga, siis leidub värvitud graafis alati vähemalt 2 ühte värvi servadega kolmnurka.

6. a) Tõestada, et kui täisgraafi K_n servad värvida kahe värviga, siis graafis leidub Hamiltoni tsükkel, mis koosneb ülimalt kahest ühevärvilisest ahelast (üks neist ahelaist võib olla ka kidunud olematuks).

b) Järeldada sellest, et kui täisgraafi K_n servad värvida kahe värviga, siis leidub värvitud graafis alati ühevärviline ahel pikkusega vähemalt $n/2$.

7. a) Tõestada, et $r(4, 3) = 9$.

b) Tõestada, et $r(4, 4) = 18$.

8. a) Tõestada, et kui täisgraafi K_{17} servad värvida kolme värviga, siis leidub värvitud graafis alati ühte värvi servadega kolmnurk.

b) Olgu $n_m = m!(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{m!}) + 1$. Värvime täisgraafi K_{n_m} servad m värviga. Tõestada, et värvitud graafis leidub ühte värvi servadega kolmnurk.

9. Tõestada, et arv $r(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ leidub kõigi positiivsete täisarvude k_1, k_2, …, k_m korral.

10. Tähistame $r_m(k) = r(k, k, \ldots, k)$, kus teises avaldises on m argumenti.

a) Tõestada, et $r_m(3) \leqslant m(r_{m-1}(3) - 1) + 2$.

b) Järeldada, et $r_m(3) \leqslant \lfloor \mathrm{e}\, m! \rfloor + 1$.

11. Tõestada, et iga positiivse täisarvu k korral leidub selline täisarv N, et kui värvida hulga $\{1, 2, \ldots, N\}$ elemendid m värviga, siis leiduvad alati ühte värvi arvud x, y, z (mitte tingimata erinevad), et $x + y = z$.

12. Olgu k naturaalarv. Ütleme, et graafil G on omadus Q_k, kui iga kahe ühisosata k-elemendilise tippude hulga A ja B korral leidub graafis tipp, mis on iga hulka A kuuluva tipu naaber, aga pole ühegi hulka B kuuluva tipu naaber.

a) Leida graaf, millel on omadus Q_1.

b) Tõestada, et iga naturaalarvu k korral leidub graaf, millel on omadus Q_k.