Diskreetne matemaatika 2012

14. praktikum

Reimo Palm

Ramsey teooria uurib struktuuri mõõtmete suurenemisel struktuuris tekkivaid korrapärasid.

Ramsey arv $r(k, l)$ on vähim täisarv n, mille korral igas n-tipulises lihtgraafis leidub alamgraaf K_k või alamgraaf O_l, ehk vähim täisarv n, mille korral n-tipulises täisgraafis K_n, mille servad on värvitud kahe värviga, leidub alati esimest värvi servadest koosnev k-tipuline täisgraaf K_k või teist värvi servadest koosnev l-tipuline täisgraaf K_l.

Ramsey arv $r(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ on vähim täisarv n, mille korral n-tipulises täisgraafis K_n, mille servad on värvitud m värviga, leidub alati esimest värvi k_1-tipuline täisgraaf K_{k_1} või teist värvi k_2-tipuline täisgraaf K_{k_2} või … või m-ndat värvi k_m-tipuline täisgraaf K_{k_m}.

Praktikumiülesanded

1. *Ramsey mäng (sim).* Kaks mängijat A ja B mängivad järgmist mängu. Pabrile joonistatakse 6 punkti. Mängija A ühendab kaks punkti punase joonega, mängija B ühendab kaks seni ühendamata punkti rohelise joonega jne. Käike tehakse vaheldumisi. Võidab see, kes ühendab mingid kolm punkti ühte värvi kolmnurgaks.

a) Tõestada, et see mäng ei saa lõppeda viigiga.

b) Tõestada, et selle mängu variant, kus see, kes ühendab mingid kolm punkti ühte värvi kolmnurgaks, kaotab, ei saa lõppeda viigiga.

c) Tõestada, et mõlemad vaadeldud mängu variandid saavad lõppeda viigiga, kui 6 punkti asemel joonistatakse paberile 5 punkti.

Lahendus. a) Oletame, et mängitakse senikaua, kuni käigud otsa saavad. Siis jääb järele 6-tipuline täisgraaf, mille servad on värvitud punaseks ja roheliseks. Selles graafis leidub ühte värvi servadega tsükkel graafide õpiku lk 72 teoreemi 9.1 kohaselt. Järelikult sõltumata sellest, kuidas mängijad käike teevad, tekib mingil hetkel graafi ühte värvi tsükkel. Seega varem või hiljem üks mängija võidab.

b) Täpselt sama arutelu kehtib ka selles variandis: kuigi võitja ja kaotaja rollid on vahetatud, saavad võitja ja kaotaja alati selgeks.

c) 5-tipulise täisgraafi servad võib jagada kaheks tsükliks: välimine ja sisemine. Kui üks mängija värvib servi kogu aeg esimesel tsüklil ja teine mängija teisel tsüklil, siis lõpuks tekib graafi kaks ühevärvilist tsüklit, aga mitte ühtegi kolmnurka. Seega jääb mäng viiki.

Märkus. Teoreemi 9.1 kasutamise asemel võime tõestada ka otse, et kahe värviga värvitud 6-tipulises täisgraafis leidub ühte värvi kolmnurk. Vaatleme suvalist tippu v. Sellest väljub 5 serva. Vähemalt 3 neist on ühte värvi, sest pole võimalik, et tipu v juures oleks kumbagi värvi servi ülimalt 2. Vaatleme nende 3 serva teiste otspunktide poolt moodustatud kolmnurka. Kui selle kolmnurga mingi serv on sama värvi nagu need 3 tipust v väljuvat serva, siis moodustavad otsitava kolmnurga selle serva otspunktid koos tipuga v. Vastasel korral aga on kolmnurga kõik servad teist värvi ning moodustavad ise ühte värvi kolmnurga.

2. Tõestada, et kui täielikus kahealuselises graafis $K_{5,5}$ värvida servad mingil viisil punase ja sinise värviga, siis värvitud graafis leidub punane alamgraaf $K_{2,2}$ või sinine alamgraaf $K_{2,2}$.

Lahendus. Olgu X ja Y graafi alused. Et igast aluse X tipust väljub 5 serva, siis on iga tipu juures vähemalt 3 ühte värvi serva. Et aluses X on kokku 5 tippu, siis leidub nende hulgas 3 tippu, mille juures nende 3 ühte värvi serva värv on sama. Olgu see värv c. Nimetatud 3 tipu seas leidub kaks, millel on hulgas Y vähemalt kaks ühist naabrit, kuhu viivad servad on värvi c. Tõepoolest, kui igal kahel tipul oleks ülimalt üks selline naaber, siis oleksid need naabrid intsidentsed ülimalt $2 + 2 + 2 = 6$ servaga värvi c ning vähemalt 3 ülejäänud serva viiksid igaüks erinevasse tippu hulgas Y. Seega peaks hulgas Y olema vähemalt $3 + 3 = 6$ tippu, mis on võimatu. Nüüd aga moodustavad need kaks tippu koos oma kahe ühise naabriga alamgraafi $K_{2,2}$, mille kõik servad on värvi c.

Märkus. Lahenduse aluseks on põhimõte, mille nimi on *Dirichlet' printsiip*: kui rohkem kui kn objekti paigutada n kasti, siis leidub kast, milles on rohkem kui k objekti. Seda põhimõtet kasutatakse kolm korda: 1) objektid on aluse X tipuga intsidentsed servad, kastid on värvid; 2) objektid on aluse X tipud, kastid on värvid, mis on tipuga intsidentsete servade juures enamuses; 3) objektid on tipupaarid, kastid on paaride ühised naabertipud.

3. Olgu $G = (V, E)$ graaf, mille puhul $|V| = a + b$, kus a ja b on mingid naturaalarvud. Tõestada, et iga tipu $v \in V$ korral $|N_G(v)| \geqslant a$ või $|N_{\overline{G}}(v)| \geqslant b$.

Lahendus. Et G ja $\overline{G}$ moodustavad kokku täisgraafi, siis $|N_G(v)|+|N_{\overline{G}}(v)| = |V|-1$, sest see on iga tipu aste täisgraafis, mille tippude arv on $|V|$. Kui oleks $|N_G(v)| \leqslant a-1$ ja $|N_{\overline{G}}(v)| \leqslant b-1$, siis oleks $|N_G(v)| + |N_{\overline{G}}(v)| \leqslant a+b-2 = |V|-2$, mis on võimatu. Järelikult $|N_G(v)| \geqslant a$ või $|N_{\overline{G}}(v)| \geqslant b$.

4. Jalgpalliturniiril osaleb 18 meeskonda. Igas voorus peab iga meeskond ühe mängu. Tõestada, et pärast 8 vooru leidub kolm meeskonda, kellest ükski pole veel mänginud ülejäänud kahe vastu.

Lahendus. Vaatleme täisgraafi K_{18}, mille tipud on meeskonnad, ning värvime punaseks need servad, mis vastavad meeskonnad on pärast 8 vooru omavahel kohtunud. Ülejäänud servad värvime siniseks. Meil on vaja tõestada, et graafis leidub sinine kolmnurk. Valime suvalise meeskonna A ja vaatleme neid 9 meeskonda, kellega A pole veel kohtunud.

- Kui nende 9 meeskonna seas leidub kaks meeskonda B ja C, kes pole omavahel kohtunud, siis moodustavad sobiva kolmnurga tipud A, B, C.

- Kui nende 9 meeskonna seas on kõik kõigiga läbi mänginud, siis peaks 8 vooru jooksul olema toimunud nende 9 meeskonna täielik turniir. Selle käigus mängitakse $\binom{9}{2} = 36$ mängu. Kuid ühe vooruga saavad ülimalt 8 neist meeskondadest mängida omavahel, mis tähendab, et 8 vooru jooksul saavad nad omavahel mängida ülimalt $4 \cdot 8 = 32$ mängu. Järelikult see juht on võimatu.

5. Täisgraafi K_n servad värvitakse kahe värviga.

a) Tähistagu a_v tipuga v intsidentsete esimest värvi servade arvu. Tõestada, et värvitud graafis leidub täpselt

$$\binom{n}{3} - \frac{1}{2} \sum_{v \in V(K_n)} a_v(n-1-a_v)$$

kolmnurka, mille kõik servad on ühte värvi.

b) Tõestada, et eelmise avaldise väärtuse alamtõke on

$$\binom{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \right\rfloor \right\rfloor.$$

c) Tõestada, et kui 6-tipulises täisgraafis värvida servad kahe värviga, siis leidub värvitud graafis alati vähemalt 2 ühte värvi servadega kolmnurka.

Lahendus. a) Üldse on antud täisgraafis $\binom{n}{3}$ kolmnurka. Igas mitte-ühevärvilises kolmnurgas leidub täpselt kaks tippu, mis on intsidentsed mõlemat värvi servadega. Et tipp $v \in V(K_n)$ on intsidentne a_v esimest värvi servaga ja seega $n-1-a_v$ teist värvi servaga, siis kuulub tipp v eri värvi servadega tipuna täpselt $a_v(n-1-a_v)$ kolmnurga koosseisu. Et igas mitte-ühevärvilises kolmnurgas leidub kaks sellist tippu, siis loeb valemis esinev summa mitte-ühevärviliste kolmnurkade arvu kaks korda üle ning nende kolmnurkade arv on selle summa väärtusest kaks korda väiksem.

b) Et ruutfunktsiooni $f(a_v) = a_v(n-1-a_v)$ nullkohad on 0 ja $n-1$, siis on vaadeldava avaldise väärtus kõige suurem, kui $a_v = \frac{n-1}{2}$. Seega $f(a_v) \leqslant f(\frac{n-1}{2}) = (\frac{n-1}{2})^2$. Et täisarvulise a_v korral on $f(a_v)$ täisarv, siis sel juhul isegi $f(a_v) \leqslant \lfloor(\frac{n-1}{2})^2\rfloor$. Et ülesande summas on n liidetavat, siis $\frac{1}{2}\sum_{v\in V(K_n)} a_v(n-1-a_v) \leqslant \frac{n}{2}\lfloor(\frac{n-1}{2})^2\rfloor$. Et võrratuse vasak pool on täisarv (erivärviliste kolmnurkade arv), siis $\frac{1}{2}\sum_{v\in V(K_n)} a_v(n-1-a_v) \leqslant \lfloor\frac{n}{2}\lfloor(\frac{n-1}{2})^2\rfloor\rfloor$. Siit saamegi, et

$$\binom{n}{3} - \frac{1}{2}\sum_{v\in V(K_n)} a_v(n-1-a_v) \geqslant \binom{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{2}\left\lfloor\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right\rfloor\right\rfloor.$$

c) Võttes $n = 6$, saame eelmisest punktist, et ühevärviliste kolmnurkade arv on vähemalt $\binom{6}{3} - \lfloor\frac{6}{2}\lfloor(\frac{6-1}{2})^2\rfloor\rfloor = 2$.

6. a) Tõestada, et kui täisgraafi K_n servad värvida kahe värviga, siis graafis leidub Hamiltoni tsükkel, mis koosneb ülimalt kahest ühevärvilisest ahelast (üks neist ahelaist võib olla ka kidunud olematuks).

b) Järeldada sellest, et kui täisgraafi K_n servad värvida kahe värviga, siis leidub värvitud graafis alati ühevärviline ahel pikkusega vähemalt $n/2$.

Lahendus. a) Tõestame väite induktsiooniga n järgi. Kui $n = 3$, siis on meil tegemist kolmeservalise tsükliga. Selles on vähemalt kaks järjestikust serva ühte värvi. Kui kolmas serv on erinevat värvi, siis on tegemist kahe ahelaga, vastasel korral ühe (kinnise) ahelaga.

Vaatleme nüüd graafi K_n, kus $n > 3$. Olgu selle graafi servad värvitud kahe värviga. Eemaldame ühe tipu v. Järelejäänud graafis leidub induktsiooni eelduse põhjal ülesande tingimustele vastav Hamiltoni tsükkel. Kui see tsükkel koosneb kahest ühevärvilisest ahelast, siis olgu u nende ahelate ühine otstipp, vastasel korral olgu u suvaline tipp. Vaatleme nüüd serva uv. Selle värv ühtib ühe ahela servade värviga. Seega võime seda ahelat pikendada üle tipu u tipuni v. Pärast tippu v jätkame tsüklit tipu u naabertipust teisel pool. Sõltuvalt neid tippe ühendava serva värvist saame selle servaga pikendada kas esimest või teist värvi ahelat. Sellega tekib Hamiltoni tsükkel graafis K_n, mis koosneb ikka ülimalt kahest ühevärvilisest ahelast.

b) Punkti a) põhjal leidub graafis Hamiltoni tsükkel, mis koosneb ülimalt kahest ühevärvilisest ahelast. Et nende ahelate kogupikkus on n, siis ühe ahela pikkus on kindlasti vähemalt $n/2$. See ahel sobibki otsitavaks.

7. a) Tõestada, et $r(4, 3) = 9$.

b) Tõestada, et $r(4, 4) = 18$.

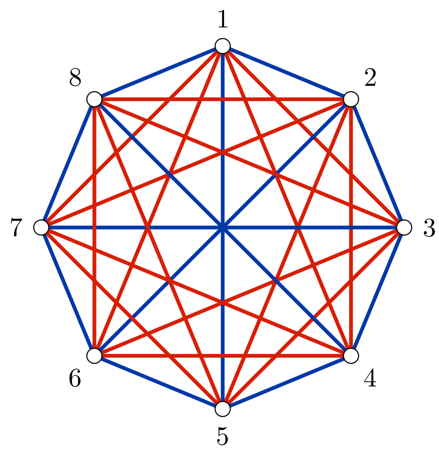
Lahendus. a) Graafide õpiku teoreemi 9.1 põhjal $r(3, 3) = 6$ ning lemma 9.3 põhjal $r(4, 2) = 4$. Seega järelduse 9.5 põhjal

$$r(4, 3) \leqslant r(3, 3) + r(4, 2) - 1 = 6 + 4 - 1 = 9.$$

Jääb tõestada, et $r(4, 3) \geqslant 9$. Värvime graafi K_8 servad punaseks ja siniseks nii, nagu joonisel 1. Selliselt värvitud graafis ei leidu punast alamgraafi K_4 ega sinist alamgraafi K_3.

Teine lahendus. Olgu graafi K_9 servad värvitud punaseks ja siniseks. Siis leidub graafis tipp v, mis on intsidentne vähemalt 6 punase servaga või vähemalt 4 sinise servaga – kui sellist tippu ei leiduks, siis oleks iga tipp intsidentne täpselt 5 punase ja täpselt 3 sinise servaga. See pole aga võimalik, sest siis oleks ainult punastest servadest koosneva alamgraafi tipuastmete summa paaritu $9 \cdot 5 = 45$.

- Kui tipp v on intsidentne 6 punase servaga, siis vaatleme nende servade teisi otstippe. Need moodustavad graafis 6-tipulise alamgraafi K_6, mille servad on värvitud kahe värviga. Selles alamgraafis leidub ühte värvi kolmnurk. Kui see kolmnurk on punane, siis moodustab ta koos tipuga v esialgse graafi punase alamgraafi K_4. Kui see kolmnurk on sinine, siis on ta ise esialgse graafi sinine alamgraaf K_3.



Joonis 1.

- Kui tipp v on intsidentne 4 sinise servaga, siis vaatleme jälle nende servade teisi otstippe. Kui kõik nendevahelised servad on punased, siis moodustavad need punase alamgraafi K_4. Kui aga leidub serv, mis on sinine, siis moodustab see koos tipuga v sinise alamgraafi K_3.

Sellega oleme tõestanud, et $r(4,3) \leqslant 9$.

Tõestame nüüd, et $r(4,3) \geqslant 9$. Vaatleme 8-tipulist täisgraafi, mille tippude hulk on $\{1, 2, \ldots, 8\}$. Värvime serva $\{i, j\}$, kus $i < j$, punaseks, kui $j - i$ on 2, 3, 5 või 6, ning siniseks, kui $j - i$ on 1, 4 või 7. Selles graafis ei leidu punast alamgraafi K_4, sest see peaks koosnema mingist vähimast tipust i ja veel kolmest tipust nelja tipu $i+2$, $i+3$, $i+5$, $i+6$ hulgast. See aga pole võimalik, sest tippe $i+2$ ja $i+3$ ning tippe $i+5$, $i+6$ ei saa valida korraga – nende vahel on sinine serv. Samuti ei leidu selles graafis sinist alamgraafi K_3, sest see peaks koosnema vähimast tipust i ning veel kahest tipust kolme tipu $i+1$, $i+4$, $i+7$ hulgast. Ent neist iga kahe vahel on punane serv.

b) Graafide õpiku järelduse 9.5 põhjal

$$r(4,4) \leqslant r(3,4) + r(4,3) = 9 + 9 = 18.$$

Võrratuse $r(4,4) \geqslant 18$ tõestamiseks vaatleme 17-tipulist täisgraafi tippude hulgaga $\{0, 1, \ldots, 16\}$, mida käsitleme lõpliku korpusena $\mathbb{Z}_{17}$. Värvime serva $\{i, j\}$ punaseks, kui $i - j$ on ± 1, ± 2, ± 4 või ± 8, ning siniseks ülejäänud juhtudel. Nimetatud arvud on ruutjäägid mooduli 17 järgi (st vaadeldavate arvude ruutude jäägid). Serv $\{i, j\}$ on alati sama värvi nagu serv $\{i+a, j+z\}$, sest $(i+a) - (j+a) = i - j$. Samuti, serv $\{i, j\}$ on sama värvi nagu serv $\{i \cdot a, j \cdot a\}$ parajasti siis, kui a on ruutjääk, sest $i \cdot a - j \cdot a = (i - j)a$ ning korpuses $\mathbb{Z}_{17}$ on kahe elemendi korrutis ruutjääk parajasti siis, kui mõlemad elemendid on või mõlemad elemendid ei ole ruutjäägid.

Oletame, et graafis leidub punane alamgraaf K_4. Olgu x mingi sinna kuuluv tipp. Liites kõigile alamgraafi tippudele $-x$, saame punase alamgraafi, mille üks tipp on 0. Olgu y nüüd mingi saadud alamgraafi kuuluv nullist erinev tipp. Siis y on ruutjääk. Korrutades viimase alamgraafi tippe elemendiga y^{-1}, mis on ruutjääk, saame punase alamgraafi, mille kaks tippu on 0 ja 1. Ülejäänud kaks tippu peavad olema ühendatud mõlema tipuga 0 ja 1. Hulkade $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$ ja $\{1 \pm 1, 1 \pm 2, 1 \pm 4, 1 \pm 8\}$ ühisosa on $\{-1, 2, -8\}$. Ent viimases hulgas on iga kaks tippu ühendatud sinise servaga. Järelikult ei saa leiduda punast alamgraafi K_4.

Oletame, et graafis leidub sinine alamgraaf K_4. Korrutades selle alamgraafi tippe mingi mitteruutjäägiga, muutuvad alamgraafis kõigi servade värvid vastupidiseks. Seega saame punase alamgraafi K_4. See on vastuolus eelnevaga. Järelikult ei saa leiduda ka sinist alamgraafi K_4.

Märkus. Mõneti üllatavalt on Ramsey arvude täpsete väärtuste leidmine päris raske. Praeguseks on $r(k,l)$ väärtused täpselt teada ainult väiksemate k ja l korral (vastavat infot leiab Internetist), ülejäänud juhtudel on saadud ainult üsna jämedad tõkked. Aastatepikkuse uurimistöö järel on teada, et näiteks $43 \leqslant r(5,5) \leqslant 49$. Soovides tõestada, et $r(5,5)$ on näiteks 49, peame tõestama, et leidub 48-tipuline täisgraaf, mille servad on värvitud kahe värviga ja milles pole ühevärvilist alamgraafi K_5. Kui sellele probleemile lähendeda kõigi variantide läbivaatamisega, siis 48-tipulisel täisgraafil on $\binom{48}{2} = 1128$ serva, millest igaüks võib olla värvitud 2 viisil, ehk kokku on selle graafi värvimiseks $2^{1128} \approx 3{,}6 \cdot 10^{339}$ võimalust. Tõsi, kui $r(5,5)$ on 49, siis selle tõestamiseks piisab leida kuidagi üles üksainus 48-tipulise täisgraafi K_{48} värvimisviis, kus graafis pole ühevärvilist alamgraafi K_5, aga kui $r(5,5)$ peaks olema 48, siis tõestamiseks, et igas 48-tipulises kahte värvi servadega täisgraafis leidub ühevärviline alamgraaf K_5, enam ühest sobivast värvimisest ei piisa. Parameetrite k ja l suurenedes kasvab $r(k,l)$ arvutamisega seotud variantide arv väga kiiresti. Paul Erdős kommenteeris seda olukorda nii: „Kujutleme, et meist väga palju arenenumad tulnukad saabuvad Maale ja nõuavad meie käest arvu $r(5,5)$, ähvardades vastasel korral Maa hävitada. Sel juhul peaksime koondama kokku kõik oma arvutid ja matemaatikud ning püüdma vastuse kindlaks teha. Ent oletame, et nad nõuavad arvu $r(6,6)$. Sel juhul peaksime püüdma hävitada tulnukad.“

8. a) Tõestada, et kui täisgraafi K_{17} servad värvida kolme värviga, siis leidub värvitud graafis alati ühte värvi servadega kolmnurk.

b) Olgu $n_m = m!(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{m!}) + 1$. Värvime täisgraafi K_{n_m} servad m värviga. Tõestada, et värvitud graafis leidub ühte värvi servadega kolmnurk.

Lahendus. a) Valime suvalise tipu v. Selle tipuga on intsidentsed 16 serva. Vähemalt 6 serva nendest on ühte värvi. Vaatleme nende 6 serva teisi otstippe. Kui nende 6 tipu seas leidub kaks tippu, millevaheline serv on sama värvi nagu tippu v viiv serv, siis moodustavad otsitava kolmnurga need kaks tippu koos tipuga v. Kui nende 6 tipu seas ei leidu sellist kahte tippu, siis on kõik nendevahelised servad kahte ülejäänud värvi ning ühte värvi servadega kolmnurk leidub selles alamgraafis graafide õpiku teoreemi 9.1 põhjal.

b) Tõestame väite induktsiooniga m järgi. Kui $m = 1$, siis $n_m = 3$ ning K_{n_m} ongi juba ise ühevärviline tsükkel. Eeldame, et väide kehtib $m = k$ korral, ning olgu $m = k+1$. Vaatleme n_{k+1}-tipulist täisgraafi mille servad on värvitud $k+1$ värviga. Valime suvalise tipu v. Et

$$n_{k+1} - 1 = (k+1)!\Big(\frac{n_k - 1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!}\Big) = (k+1)(n_k - 1) + 1 > (k+1)(n_k - 1),$$

siis leidub tipuga v intsidentse $n_{k+1}-1$ serva hulgas n_k serva, mis on ühte värvi, näiteks värvi c. Vaatleme nende servade teisi otstippe. Kui nende hulgas leiduvad tipud x ja y, millevaheline serv on värvi c, siis moodustavad ühte värvi servadega kolmnurga tipud v, x, y. Kui aga sellist serva ei leidu, siis moodustavad need otstipud n_k-tipulise alamgraafi, mille servad on värvitud k värviga; seal leidub ühte värvi servadega kolmnurk induktsiooni eelduse põhjal.

9. Tõestada, et arv $r(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ leidub kõigi positiivsete täisarvude k_1, k_2, …, k_m korral.

Lahendus. Tõestame väite induktsiooniga k_1, k_2, …, k_m järgi. Kui vähemalt üks arvudest k_1, k_2, …, k_m on 1, siis triviaalselt $r(k_1, k_2, \ldots, k_m) = 1$. Seetõttu eeldame, et iga $i = 1$, 2, …, m korral $k_i \geqslant 2$. Olgu

$$N = \sum_{i=1}^{m} r(k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, \ldots, k_m) - m + 2.$$

Vaatleme N-tipulist täisgraafi, mille servad on mingil viisil värvitud kahe värviga. Olgu v suvaline tipp. See tipp on intsidentne $N-1$ servaga. Kui nende servade hulgas oleks iga $i = 1, \ldots, m$ korral i-ndat värvi servi ülimalt $r(k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, \ldots, k_m) - 1$, siis oleks tipu v juures servi kokku ülimalt $N-2$. Järelikult mingi $i = 1, \ldots, m$ korral on i-ndat värvi servi vähemalt $r(k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, \ldots, k_m)$. Vaatleme nende servade teiste otstippude poolt indutseeritud alamgraafi. Induktsiooni eelduse põhjal leidub selles mingi $j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m$ korral j-ndat värvi alamgraaf K_{k_j} või i-ndat värvi alamgraaf K_{k_i-1}. Esimesel juhul sobib see alamgraaf ka esialgse graafi otsitavaks alamgraafiks, teisel juhul sobib otsitavaks alamgraafiks graaf K_{k_i-1}, millele on lisatud tipp v.

10. Tähistame $r_m(k) = r(k, k, \ldots, k)$, kus teises avaldises on m argumenti.

a) Tõestada, et $r_m(3) \leqslant m(r_{m-1}(3) - 1) + 2$.

b) Järeldada, et $r_m(3) \leqslant \lfloor \mathrm{e}\, m! \rfloor + 1$.

Lahendus. a) Olgu $N = m(r_{m-1}(3) - 1) + 2$. Vaatleme N-tipulist täisgraafi, mille servad on värvitud m värviga. Olgu v selle graafi suvaline tipp. Et $N - 1 > m(r_{m-1}(3) - 1)$, siis leidub selle tipuga intsidentsete servade hulgas mingid $r_{m-1}(3)$ ühte värvi serva. Olgu see ühine värv c. Vaatleme nende servade teisi otstippe. Kui neid omavahel ühendavatest servadest mõni on värvi c, siis moodustab see serv koos tipuga v ühte värvi kolmnurga. Kui ükski neist servadest pole värvi c, siis on need $r_{m-1}(3)$ tippu omavahel ühendatud $m-1$ värvi servadega ning nende tippude hulgas leidub ühte värvi servadega kolmnurk arvu $r_{m-1}(3)$ definitsiooni põhjal.

b) Iga $m \geqslant 1$ korral

$$\mathrm{e}\, m! = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{m!}{i!} = \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)(m+2)\cdot \ldots \cdot i}.$$

Esimene summa on täisarv, teine summa aga on väiksem kui $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^j} = \frac{1}{m} \leqslant 1$. Järelikult $\lfloor \mathrm{e}\, m! \rfloor = \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!}$.

Ülesande väide kehtib, kui $m = 1$, sest $r_1(3) = 3$ ja ka $\lfloor \mathrm{e} \cdot 1! \rfloor + 1 = 3$. Kui $m > 1$, siis

$$r_m(3) \leqslant m(r_{m-1}(3) - 1) + 2 \leqslant m(\lfloor \mathrm{e}\,(m-1)! \rfloor + 1 - 1) + 2 =$$
$$= m \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(m-1)!}{i!} + 1 + 1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{m!}{i!} + 1 = \lfloor \mathrm{e}\, m! \rfloor + 1.$$

11. Tõestada, et iga positiivse täisarvu k korral leidub selline täisarv N, et kui värvida hulga $\{1, 2, \ldots, N\}$ elemendid m värviga, siis leiduvad alati ühte värvi arvud x, y, z (mitte tingimata erinevad), et $x + y = z$.

Lahendus. Olgu $N = r_m(3)$. Moodustame täisgraafi K_N tippude hulgaga $\{1, 2, \ldots, N\}$ ning määrame iga serva $\{i, j\}$ värviks arvu $|i - j|$ värvi. Et N on Ramsey arv, siis selles graafis leidub ühevärviline kolmnurk. Olgu a, b, c, kus $a < b < c$, selle kolmnurga tipud. Võttes $x = b - a$, $y = c - b$, $z = c - a$, on arvud x, y ja z ühte värvi ning $x + y = z$.

12. Olgu k naturaalarv. Ütleme, et graafil G on omadus Q_k, kui iga kahe ühisosata k-elemendilise tippude hulga A ja B korral leidub graafis tipp, mis on iga hulka A kuuluva tipu naaber, aga pole ühegi hulka B kuuluva tipu naaber.

a) Leida graaf, millel on omadus Q_1.

b) Tõestada, et iga naturaalarvu k korral leidub graaf, millel on omadus Q_k.

Lahendus. a) Vähim selline graaf on tsükkel C_5.

b) Vaatleme juhuslikku n-tipulist graafi, milles iga kahe tipu korral leidub nende vahel serv tõenäosusega $1/2$. Olgu A ja B mingid kaks ühisosata k-elemendilist tippude hulka ning v suvaline tipp väljaspool neid hulki. Tõenäosus, et tipust v viib serv igasse hulga A tippu, aga ei vii serva ühessegi hulga B tippu, on $2^{-k} \cdot 2^{-k} = 2^{-2k}$. Tõenäosus, et tipp v ei ole sellise omadusega, on $1 - 2^{-2k}$. Tõenäosus, et ükski hulkadest A ja B väljapoole jääv tipp ei ole sellise omadusega, st hulkade A ja B korral ülesande tingimustele vastavat tippu ei leidu, on $(1 - 2^{-2k})^{n-2k}$.

Vaatleme nüüd kõiki hulkade paare (A, B), kus A ja B on ühisosata k-elemendilised tippude hulgad. Nimetame paari *halvaks*, kui sinna kuuluvate hulkade korral ei leidu graafis vajalikku tippu. Üldse on n-tipulises graafis selliseid paare $\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}$ tükki – valime kõigepealt n tipust k tippu hulgaks A ning seejärel ülejäänud $n-k$ tipust k tippu hulgaks B. Iga paar (A, B) on halb tõenäosusega $(1-2^{-2k})^{n-2k}$. Järelikult on halbade paaride arvu keskväärtus n-tipulises graafis $\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}(1-2^{-2k})^{n-2k}$. Et $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \leqslant \frac{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} = n^k$ ja analoogiliselt $\binom{n-k}{k} \leqslant n^k$, siis

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}(1-2^{-2k})^{n-2k} \leqslant n^{2k}(1-2^{-2k})^{n-2k}.$$

Iga fikseeritud k korral läheneb parempoolne avaldis n kasvades nullile, sest ta on astmefunktsiooni ja ühest väiksema astendatavaga eksponentfunktsiooni korrutis. Järelikult mingi $n = n_0$ korral on see keskväärtus väiksem kui 1. See tähendab, et n_0-tipuliste graafide seas leidub graaf, milles pole ühtegi halba paari ja millel seetõttu on omadus Q_k.

Sellest tõestusest järeldub muu hulgas ka, et iga k korral, kui tippude arv on piisavalt suur, siis graafe, millel on omadus Q_k, on kõigi vastava tippude arvuga graafide hulgas valdav enamus.