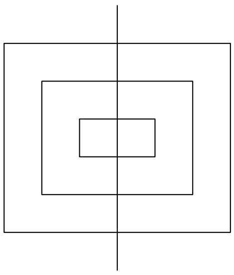
Diskreetne matemaatika 2012

3. praktikum

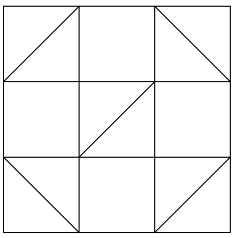
Reimo Palm

Praktikumiülesanded

1. Teha kindlaks, kas järgmisi kujundeid saab joonistada ilma pliiatsit paberilt tõstmata ja ühtegi joont korduvalt läbimata.



a)



b)

Lahendus. a) Loeme graafi tippudeks kõik otspunktid, nurkpunktid ja lõikepunktid. Graafis leidub täpselt kaks paaritu astmega tippu – keskmise vertikaallõigu otspunktid. Kui need omavahel servaga ühendada, siis tekib graaf, mis on sidus ja mille iga tipu aste on paaris, seega seal leidub Euleri tsükkel. Kui nüüd lisatud serv uuesti eemaldada, jaguneb see Euleri tsükkel Euleri ahelaks. Järelikult saab seda kujundit joonistada ühe joonega.

b) Samal põhjusel saab ka seda kujundit joonistada ühe joonega. Kaks paaritu astmega tippu on keskmise diagonaallõigu otspunktid.

2. a) Tõestada, et kui sidusas graafis leidub täpselt kaks paaritu astmega tippu, siis leidub graafis Euleri ahel, mis algab ühes neist tippudest ja lõpeb teises.

b) Olgu G sidus graaf, milles leidub $m > 0$ paaritu astmega tippu. Tõestada, et graafis leidub $m/2$ ahelat nii, et graafi G iga serv asub täpselt ühel neist ahelatest.

Lahendus. a) Ühendame need tipud omavahel servaga. Kui nad olid juba ühendatud, siis lisame teise serva. Tekib sidus graaf, mille iga tipu aste on paaris. Seega leidub selles graafis Euleri tsükkel. Liikudes mööda seda tsüklit, saab alguspunkti valida nii, et lisatud serv läbitakse kõige esimesena. Kui nüüd see serv eemaldada, siis jääb sellest tsüklist alles ahel, mis algab serva ühes otspunktis ja jõuab välja teise.

b) Et graafis on paaritu astmega tippe paarisarv, siis on m alati paaris. Ühendame paaritu astmega tipud paarikaupa servadega. Siis tekib sidus graaf, kus iga tipu aste on paarisarv. Selles graafis leidub Euleri tsükkel. Lisatud servad jaotavad selle tsükli $m/2$ tükiks, mis ongi otsitavad ahelad.

3. a) Tõestada, et igas suunamata graafis G saab servadele omistada suunad nii, et iga tipu $v \in G$ korral $|\overrightarrow{\deg}(v) - \overleftarrow{\deg}(v)| \leqslant 1$.

b) Leida selline servade suunamise viis ülesandes 7c) kujutatud Peterseni graafis.

Lahendus. a) Ühendame paaritu astmega tipud paarikaupa servadega. Sellega saame graafi, milles iga tipu aste on paarisarv. Selle graafi iga sidus komponent on Euleri graaf. Määrame igas sidusas komponendis servadele suunad tsükli liikumissuunas. Siis on iga tipu juures sisenevaid servi samapalju kui väljuvaid. Kui lisatud servad eemaldada, siis muutub sisenevate ja väljuvate servade vahe ülimalt ühe võrra, sest iga tipu juures eemaldatakse mitte rohkem kui üks serv.

b) Määrame nii välimise kui ka sisemise tsükli servadele suunad tsükli liikumise suunas. Siis on igas tipus täpselt üks sisenev ja täpselt üks väljuv serv. Seejärel määrame kahte tsüklit ühendavatele servadele suvalised suunad. Sellega on igas tipus kas kaks sisenevad ja üks väljuv või kaks väljuvat ja üks sisenev serv.

4. Näituseruum jaguneb paljudeks üksteisega lõikuvateks koridorideks. Koridoride seintele on välja pandud pildid mõlemat kätt. Külastaja võib mööda koridori liikudes vaadata pilte kas ainult ühel seinal või mõlemal seinal. Ruumil on ainult üks uks. Tõestada, et külastaja võib siseneda näituseruumi, teha ringkäigu ja väljuda nii, et ta näeb iga pilti täpselt üks kord.

Lahendus. Moodustame graafi, mille servad on koridorid ja tipud koridoride lõikepunktid ning välisuks. Asendame iga serva kahe servaga, millest üks on suunatud ühtepidi, teine teistpidi. Sellega tekib suunatud graaf, mille iga tipu sisendaste ja väljundaste on võrdsed selle tipu astmega esialgses graafis. Järelikult leidub selles suunatud graafis Euleri tsükkel. Alustades seda tsüklit välisuksele vastavast tipust, liigume mööda seda tsüklit, vaadates igas kordidoris läbi selle seina pildid, mida me veel pole vaadanud.

5. Tõestada, et iga sidusa lihtgraafi G puhul kehtib üks järgmistest tingimustest.

a) G on Euleri graaf.

b) G on saadav teatavast Euleri lihtgraafist ühe tipu kustutamise teel.

Kas leidub sidus lihtgraaf, mis rahuldab korraga mõlemat tingimust?

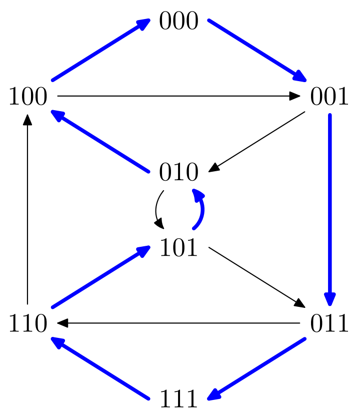
Lahendus. Eeldame, et G ei ole Euleri graaf. Et G on sidus lihtgraaf, siis ta sisaldab paaritu astmega tippe. Neid tippe on paarisarv. Lisame graafile uue tipu ja ühendame ta iga paaritu astmega tipuga. Saame sidusa lihtgraafi, kus iga tipu aste on paarisarv, st Euleri graafi. Esialgne graaf G saadakse nüüd sellest graafist lisatud tipu kustutamisel.

Sellist lihtgraafi, mis rahuldab mõlemat tingimust, ei leidu. Kui graaf on saadav mingist Euleri lihtgraafist ühe tipu kustutamise teel, siis ta sisaldab paaritu astmega tippe, sest Euleri lihtgraafist tipu kustutamisel muutub selle tipu naabertippude aste paarisarvust paarituks.

6. Paigutada ringjoonele 4 nulli ja 4 ühte nii, et saadav numbrite ring sisaldaks päripäeva lugedes iga arvukolmikut 000, 001, ..., 111 täpselt üks kord.

Juhis. Vaadelda suunatud graafi tippudega 000, 001, ..., 111 ning leida selles Hamiltoni tsükkel.

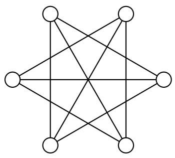
Lahendus. Moodustame suunatud graafi mille tippudeks on antud kahend-

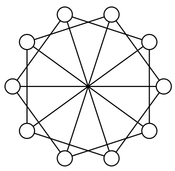


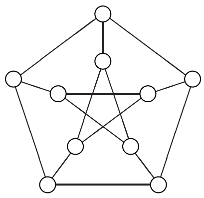
Joonis 1.

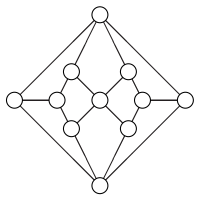
arvud ja serv kahe tipu vahel näitab, et teine arv saab otsitavas järjendis asuda esimesest arvust ühe positsiooni võrra paremal (joonis 1). Leiame selles graafis Hamiltoni tsükli. Sellest näeme, et üks sobiv arvujärjend on 00011101 (kusjuures viimasele arvule järgneb esimene).

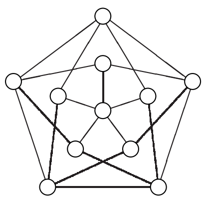
7. Kui graafis leidub Hamiltoni tsükkel, siis leida see. Vastasel korral tõestada, et Hamiltoni tsüklit ei ole.

a) 

b) 

c)  *Peterseni graaf*

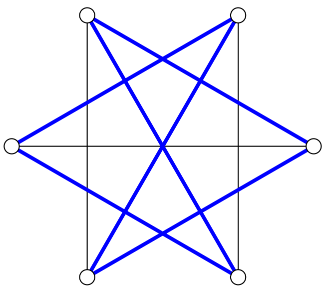
d)  *Herscheli graaf*

e)  *Grötzschi graaf*

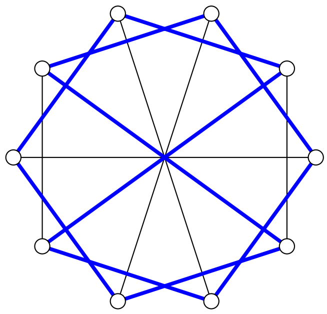
Lahendus. a) Graafis leidub Hamiltoni tsükkel (joonis 2).

b) Graafis leidub Hamiltoni tsükkel (joonis 3).

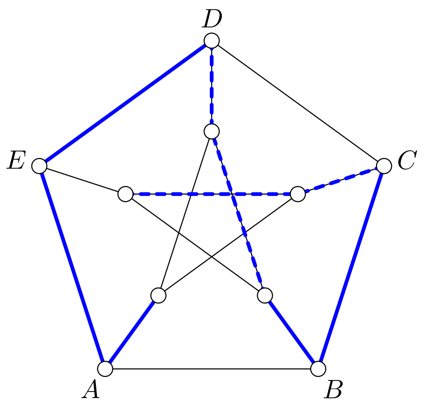
c) Võimalik Hamiltoni tsükkel peab jätma välimises viieses tsüklis vähemalt ühe serva katmata, olgu see serv AB (joonis 4). Samuti peab ta külastama tippu D, neist kahest servast vähemalt üks, näiteks DE, peab asuma välimisel tsüklil. Seega pidevjoonega tähistatud servad kuuluvad Hamiltoni tsüklisse. Kui tipust D viiks serv tippu C, siis ei saaks sisemises viieses tsüklis ahela otstippe omavahel ühendada nii, et kõik ülejäänud tipud läbitud



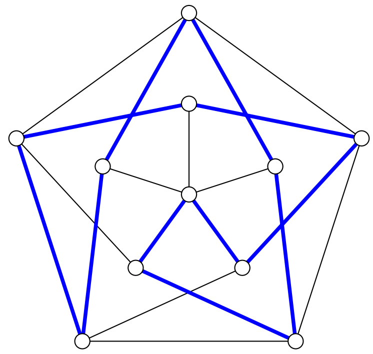
Joonis 2.



Joonis 3.



Joonis 4.



Joonis 5.

saaksid. Nüüd aga on ülejäänud servade asukoht üheselt määratud (joonisel punktiirjoonega). Seega Peterseni graafis ei leidu Hamiltoni tsüklit (kuid leidub Hamiltoni ahel).

d) Herscheli graaf on kahealuseline (ühe aluse moodustavad keskmises reas kolm keskmist tippu koos kõige ülemise ja kõige alumise tipuga). Võimalik Hamiltoni tsükkel sellises graafis külastab kumbagi alust vahelduvalt, seetõttu peab kummaski aluses olema võrdne arv tippe. Seega peab graafi tippude koguarv olema paaris. Et aga Herscheli graafil on paaritu arv tippe, siis seal Hamiltoni tsüklit ei leidu.

e) Grötzschi graafis leidub Hamiltoni tsükkel (joonis 5).

8. Tõestada, et $K_{n,n+1}$ ei ole Hamiltoni graaf ühegi $n \geqslant 1$ korral.

Lahendus. Oletame, et mingis kahealuselises graafis leidub Hamiltoni tsükkel. Hakkame mööda seda tsüklit liikuma, märgistades igal sammul tipu, kuhu satume. Sellega märgistame tippe vahelduvalt ühes ja teises aluses ning igal sammul märgistame uue tipu. Jõudes tagasi tsükli algusesse, oleme märgistanud kummaski aluses võrdse arvu tippe, kusjuures kõik graafi tipud on märgistatud, sest liikusime mööda Hamiltoni tsüklit. Järelikult on kahealuselises graafis, kus leidub Hamiltoni tsükkel, alused võrdse võimsusega. Graafis $K_{n,n+1}$ aga on alused erineva võimsusega. Seetõttu seal Hamiltoni tsüklit ei leidu.

9. Tõestada, et $K_{n,n}$ on Hamiltoni graaf iga $n \geqslant 2$ korral.

Lahendus. Olgu A_1, A_2, ..., A_n esimese aluse tipud ning B_1, B_2, ..., B_n teise aluse tipud. Otsitav Hamiltoni tsükkel on siis $A_1B_1A_2B_2 \ldots A_nB_nA_1$. Et graafis $K_{n,n}$ on iga kahe erineva aluse tipu vahel serv, siis selline tsükkel seal tõepoolest leidub.

10. Tõestada, et kui igal koosviibimisest osavõtjal on ülejäänute hulgas tuttavaid rohkem kui võõraid, siis saab kõik osavõtjad panna istuma ümmarguse laua ümber nii, et igaüks tunneb oma mõlemat naabrit.

Lahendus. Olgu n osavõtjate arv. Kujutame tutvusseoseid n-tipulise graafina. Ülesande tingimuste kohaselt on seal iga tipu aste suurem kui $\frac{n-1}{2}$ ehk vähemalt $\frac{n}{2}$. Diraci teoreemi kohaselt leidub selles graafis Hamiltoni tsükkel. Seega piisab külalised istuma panna selle tsükli ümberkäigu järjekorras.

11. Olgu G selline vähemalt 4-tipuline graaf, et iga kolme erineva tipu u, v, w korral sisaldab nende tippude poolt indutseeritud alamgraaf vähemalt kaks serva. Tõestada, et G on Hamiltoni graaf.

Lahendus. Olgu u ja v suvalised tipud, mille vahel serv puudub. Ülesande tingimuste põhjal on siis aga iga teise tipu w korral olemas nii serv uw kui ka serv vw. Järelikult $\deg(u) + \deg(v) \geqslant (n-2) + (n-2) \geqslant n$ (eeldusel $n \geqslant 4$), kus n on graafi tippude arv. Ore teoreemi põhjal leidub graafis Hamiltoni tsükkel.

12. *Gray kood* on n-bitiste kahendarvude 0, 1, ..., $2^n - 1$ järjestus, kus iga kaks järjestikust kahendarvu erinevad täpselt ühe biti poolest.

a) Tõlgendada n-bitist Gray koodi n-mõõtmelise kuubi (vt eelmise praktikumi ülesanded) abil.

b) Leida üks 3-bitine Gray kood.

c) Tõestada, et iga positiivse täisarvu n korral leidub n-bitine Gray kood.

Lahendus. a) Gray kood on Hamiltoni ahel (või tsükkel) graafis Q_n.

b) 000, 100, 110, 010, 110, 111, 110, 100.

c) Tõestame väite induktsiooniga n järgi. Kui $n = 1$, siis Gray koodiks sobib 0, 1. Kui $n > 1$, siis moodustame kaks eksemplari $(n-1)$-bitist Gray koodi, muudame teises neist arvude järjekorra vastupidiseks ning kirjutame esimese eksemplari igale arvule ette numbri 0 ja teise eksemplari igale arvule ette numbri 1 (st vaatleme koodi $0x_1$, $0x_2$, ..., $0x_{2^{n-1}}$, $1x_{2^{n-1}}$, ..., $1x_2$, $1x_1$, kus x_1, x_2, ..., $x_{2^{n-1}}$ on $(n-1)$-bitine Gray kood). Saadud arvujärjendi esimeses ja teises pooles erinevad järjestikused arvud täpselt ühe biti poolest induktsiooni eelduse tõttu. Esimese poole viimane ja teise poole esimene arv erinevad samuti täpselt ühe biti poolest, sest konstruktsiooni põhjal on kummagi arvu esimesele bitile järgnevad osad samad.

Koduülesanded

Valida vähemalt kaks järgmistest ülesannetest ja esitada nende lahendused kahe nädala jooksul.

13. Olgu n positiivne täisarv ja $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Vaatleme graafi G_n, mille korral $V(G) = \{A \subseteq X_n \colon |A| = 2\}$ ning $E(G) = \{\{A, B\} \colon A \cap B \neq \emptyset\}$. Leida kõik positiivsed täisarvud n, mille korral G_n on Euleri graaf.

Lahendus. Selleks, et graaf G_n oleks olemas (tippude hulk oleks mittetühi), peab ilmselt kehtima $n \geqslant 2$. Siis on graaf ka sidus, sest kui $\{i, j\}$ ja $\{k, l\}$ ei ole naabertipud, siis leidub nende vahel näiteks ahel $\{i, j\}$ – $\{j, k\}$ – $\{k, l\}$, sest $j \neq k$. Kasutame teoreemi, mille kohaselt sidus graaf on Euleri graaf parajasti siis, kui iga tipu aste on paarisarv, ja leiame tipu $\{i, j\}$ astme. Tipu $\{i, j\}$ naabrid on kõik tipud $\{i, k\}$ ja $\{k, j\}$, kus $k = 1, 2, \dots, n$, $k \neq i$, $k \neq j$. Et kõik need naabrid on erinevad (esimese rühma alamhulgad sisaldavad arvu i, aga teise rühma omad ei sisalda), siis on tipu $\{i, j\}$ aste $(n-2) + (n-2) = 2n - 4$. See on paarisarv iga $n \geqslant 2$ korral. Järelikult on graaf G Euleri graaf iga $n \geqslant 2$ korral.

14. Samal tippude hulgal määratud graafide G_1 ja G_2 *sümmeetriliseks vaheks* nimetatakse graafi $G = G_1 \,\Delta\, G_2$, mille tippude hulk on $V(G) = V(G_1) = V(G_2)$ ning servade hulk $E(G) = E(G_1) \,\Delta\, E(G_2)$. Tõestada, et kui G_1 ja G_2 on graafid, mille iga sidus komponent on Euleri graaf, siis ka $G_1 \,\Delta\, G_2$ on graaf, mille iga sidus komponent on Euleri graaf.

Lahendus. Kui graafide G_1 ja G_2 iga sidus komponent on Euleri graaf, siis on nende graafide kõigi tippude astmed paarisarvud. Vaatleme suvalist tippu $v \in V(G)$. Et kahe hulga sümmeetrilisse vahesse kuuluvad parajasti need elemendid, mis kuuluvad täpselt ühte nendest hulkadest, siis tipu v aste graafis G on $\deg_G(v) = (\deg_{G_1}(v) - \deg_{G_1 \cap G_2}(v)) + (\deg_{G_2}(v) - \deg_{G_1 \cap G_2}(v)) = \deg_{G_1}(v) + \deg_{G_2}(v) - 2\deg_{G_1 \cap G_2}(v)$. Et $\deg_{G_1}(v)$ ja $\deg_{G_2}(v)$ on paarisarvud, siis ka $\deg_G(v)$ on paarisarv. Järelikult on G graaf, mille iga tipu aste on paarisarv. Sellise graafi iga sidus komponent on sidus graaf ning on vastavalt teoreemile Euleri graaf.

15. Graafide G ja H *korrutiseks* $G \times H$ nimetatakse graafi tippude hulgaga $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ ning servade hulgaga $E(G \times H) = \{\{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\}\colon u_1 = u_2,\ \{v_1, v_2\} \in E(G)$ või $v_1 = v_2,\ \{u_1, u_2\} \in E(G)\}$. Olgu G ja H mõlemad n-tipulised ahelad. Tõestada, et graafis $G \times H$ leidub Hamiltoni tsükkel parajasti siis, kui n on paarisarv.

Lahendus. a) Kui n on paarisarv, siis leidub graafis Hamiltoni tsükkel $(u_1, v_1) - (u_2, v_1) - \ldots - (u_n, v_1) - (u_n, v_2) - \ldots - (u_2, v_2) - (u_2, v_3) - \ldots - (u_n, v_3) - (u_n, v_4) - \ldots - (u_2, v_n) - (u_1, v_n) - \ldots - (u_1, v_1)$.

b) Kui n ei ole paarisarv, siis värvime graafi tipud mustaks ja valgeks nii, et kõik tipud (u_i, v_j), mille korral $i + j$ on paarisarv, on mustad ja ülejäänud tipud valged. Siis on iga must tipp ühendatud ainult valgete tippudega ja vastupidi. Seega on tegemist kahealuselise graafiga, kus üks alus koosneb mustadest, teine valgetest tippudest. Kahealuselises graafis on iga tsükli pikkus paarisarv, sest tsükkel peab külastama kumbagi alust võrdne arv kordi. Võimaliku Hamiltoni tsükli pikkus graafis $G \times H$ aga oleks n^2 tippu, mis paaritu n korral on paaritu. Järelikult graafis sellist tsüklit ei leidu.

16. Tõestada, et kui graafist G saab eemaldada mingi arvu m tippe nii, et järelejääv graaf koosneb rohkem kui m sidusast komponendist, siis graaf G ei ole Hamiltoni graaf.

Lahendus. Oletame, et G on Hamiltoni graaf. Olgu C Hamiltoni tsükkel ja S mingi m-tipuline eemaldatavate tippude hulk. Määrame tsüklil C käigusuuna ning seame igale tipule hulgast S vastavusse sidusa komponendi, kuhu kuulub mööda tsüklit liikudes esimene hulka S mittekuuluv tipp. Nii saame teatava funktsiooni $f\colon S \to K(G)$, kus $K(G)$ on graafi G sidusate komponentide hulk. See funktsioon on sürjektiivne, sest iga sidusa komponendi puhul saame mööda tsüklit tagasi liikudes leida koha, kus komponenti $K(G)$ kuuluvale tipule eelneb mingi hulka S kuuluv tipp. Järelikult $|K(G)| \leqslant |S| \leqslant m$ ehk graafi G sidusate komponentide arv ei saa olla suurem kui m.

Lahendus 2. Oletame, et G on Hamiltoni graaf, olgu C Hamiltoni tsükkel selles. Kui me eemaldame graafist ühe tipu, siis tsükkel katkeb, aga graaf jääb sidusaks, sest ülejäänud tipud jäävad omavahel ühendatuks tsüklist C järelejäänud ahelaga. Kui me eemaldame teise tipu, siis sidusate komponentide arv on ülimalt 2, sest see ahel saab tipu eemaldamisega jaguneda maksimaalseks kaheks ahelaks. Kui me eemaldame kolmanda tipu, siis on sidusate komponentide arv ülimalt 3, sest ainult üks neist kahest ahelast saab jaguneda kaheks osaks. Seega iga tipu eemaldamisega saab sidusate komponentide arv kasvada ülimalt 1 võrra (aga võib ka mitte kasvada), nii et pärast m tipu eemaldamist on sidusate komponentide arv ülimalt m.