Diskreetne matemaatika 2012

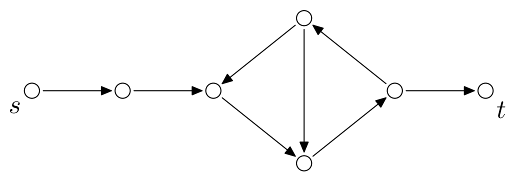
4. praktikum

Reimo Palm

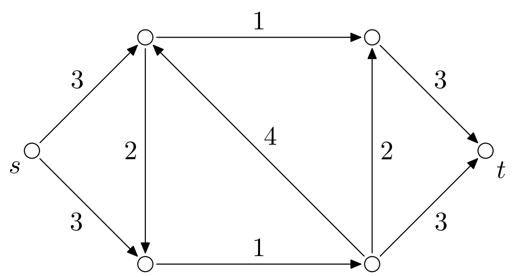
Praktikumiülesanded

Transpordivõrke, mille abil saadetakse kaupu tootmiskohtadest turustamiskohtadesse, saab kõige efektiivsemalt analüüsida nii, et vaadeldakse neid teatava lisastruktuuriga suunatud graafidena. Vastav põhiteooria on käesoleva nädala teemaks. Sellel on lai valik olulisi rakendusi ja järeldusi.

1. Joonisel kujutatud graafis on iga kaare läbilaskevõime 3. Kas selles graafis leidub voog, mille väärtus igal kaarel on nullist erinev?



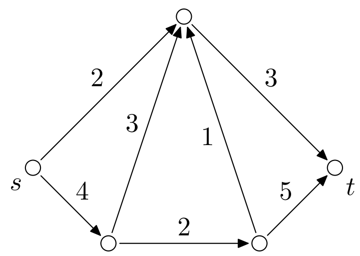
2. Leida võrgus



a) kõik täisarvulised vood;

b) maksimaalse voo väärtus.

3. Leida võrgus



a) kõik lõiked;

b) minimaalse lõike läbilaskevõime.

4. Leida

a) ülesandes 2 minimaalne lõige;

b) ülesandes 3 maksimaalne voog.

5. Vaatleme graafide õpikus (A. Buldas, P. Laud, J. Willemson. *Graafid.* Tartu 2008) lk 46 defineeritud funktsiooni φ' võrgul (G, ψ). Tõestada, et φ' on tõepoolest voog ning et voo φ' väärtus on ε võrra suurem kui voo φ väärtus.

6. Antud on suunatud graaf G. Defineerime graafi G kaartel määratud funktsioonide $\omega\colon E(G) \to \mathbb{R}$ summa ja skalaariga korrutise tavalisel viisil, st funktsioonide $\omega_1\colon E(G) \to \mathbb{R}$ ja $\omega_2\colon E(G) \to \mathbb{R}$ summa rahuldab seost $(\omega_1+\omega_2)(e) = \omega_1(e)+\omega_2(e)$ ning funktsiooni $\omega\colon E(G) \to \mathbb{R}$ korrutis reaalarvuga a seost $(a\varphi)(e) = a \cdot \varphi(e)$. Tõestada, et võrgu (G, ψ) voogude hulk on kumer, st kui φ_1 ja φ_2 on vood, siis iga reaalarvu $a \in [0, 1]$ korral on ka $a\varphi_1 + (1 - a)\varphi_2$ voog.

7. Tihtipeale defineeritakse lõige kui võrgu tippude hulga alamhulk, mis sisaldab võrgu sisendit, aga ei sisalda võrgu väljundit. Lõike X läbilaskevõime on kõigi selliste kaarte läbilaskevõimete summa, mille algtipp kuulub hulka X ja lõpptipp ei kuulu hulka X. Niisuguse lähenemise üheks eeliseks on võimalus teha lõigetega hulgateoreetilisi tehteid.

Tõestada, et kui X, $Y \subseteq V(G)$ on võrgu (G, ψ) minimaalsed (st minimaalse läbilaskevõimega) lõiked, siis ka $X \cup Y$ ja $X \cap Y$ on võrgu (G, ψ) minimaalsed lõiked. (See tähendab, võrgu minimaalsete lõigete hulk moodustab hästituntud matemaatilise struktuuri, võre.)

8. Olgu (G, ψ) võrk, millel on mitu sisendit ja mitu väljundit, ning X ja Y vastavalt selle graafi sisendite hulk ning väljundite hulk. Olgu φ mingi voog sellel võrgul.

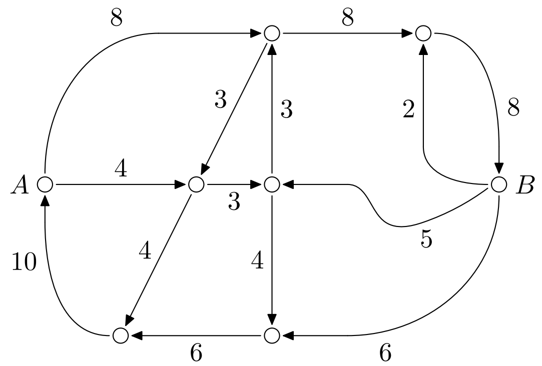
a) Tõestada, et summaarne voog hulgast X välja ja summaarne voog hulka Y sisse on võrdsed.

b) Defineerida voo φ väärtus võrgul (G, ψ).

c) Taandada mitme sisendi ja mitme väljundiga võrk ühe sisendi ja ühe väljundiga võrguks, lisades võrgule (G, ψ) kaks tippu sobivate läbilaskevõimetega.

d) Defineerida voole φ vastav voog sellel ühe sisendi ja ühe väljundiga võrgul.

9. Järgnev plaan kujutab linna bussiliine 8 peamise bussipeatuse vahel. Bussid sõidavad ainult noolte suundades. Kaarte läbilaskevõimed näitavad, mitu bussi tunnis maksimaalselt võib igal teelõigul sõita. Igal teelõigul peab tunnis sõitma vähemalt üks buss. Üks buss suudab vedada kuni 50 reisijat. Leida maksimaalne reisijate arv, mis võib tunnis liikuda punktist A (elamurajoonist) punkti B (kesklinna).

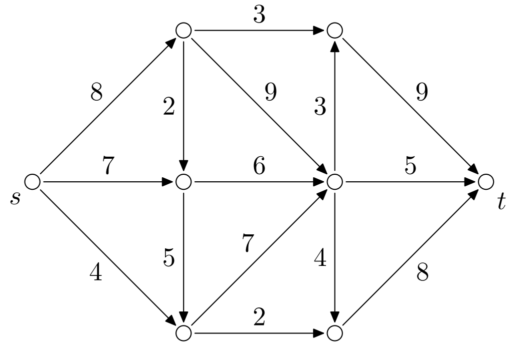


Märkus. Tegemist on graafiga, kus puuduvad sisendid ja väljundid. Busside koguarv süsteemis peab igal ajahetkel jääma samaks.

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused.

10. Leida võrgus



maksimaalne voog ja minimaalne lõige.

11. Olgu (G, ψ) võrk ja φ voog sellel. Olgu $S \subset V(G)$ selline hulk, et $s \notin S$ ja $t \notin S$ ning $S' = V(G) \setminus S$. Tõestada, et

$$\sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in S \times S'}} \varphi(e) = \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in S' \times S}} \varphi(e).$$

12. Olgu (G, ψ) võrk, kus $\psi(e) = 1$ iga $e \in E(G)$ korral, ning s ja t vastavalt võrgu sisend ja väljund. Tõestada, et selle võrgu maksimaalse voo väärtus võrdub paarikaupa ühiste kaarteta suunatud ahelate arvuga tipust s tippu t.