Diskreetne matemaatika 2012

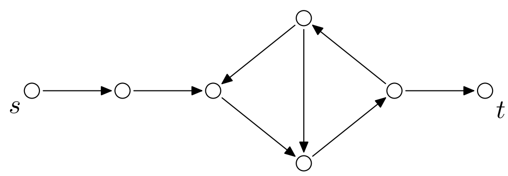
4. praktikum

Reimo Palm

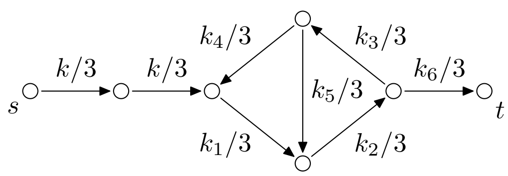
Praktikumiülesanded

Transpordivõrke, mille abil saadetakse kaupu tootmiskohtadest turustamiskohtadesse, saab kõige efektiivsemalt analüüsida nii, et vaadeldakse neid teatava lisastruktuuriga suunatud graafidena. Vastav põhiteooria on käesoleva nädala teemaks. Sellel on lai valik olulisi rakendusi ja järeldusi.

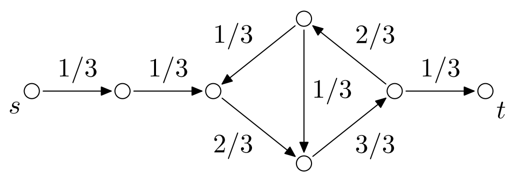
1. Joonisel kujutatud graafis on iga kaare läbilaskevõime 3. Kas selles graafis leidub voog, mille väärtus igal kaarel on nullist erinev?



Lahendus. Tähistame voo väärtused kaartel nii, nagu kujutatud joonisel 1. Et igas tipus peab sisendvoog võrduma väljundvooga, siis peavad kehtima võrdused $k + k_4 = k_1$, $k_1 + k_5 = k_2$, $k_2 = k_3 + k_6$, $k_3 = k_4 + k_5$. Siit $k = k_6$ ning $k_1 = k + k_4$, $k_2 = k + k_4 + k_5$, $k_3 = k_4 + k_5$. Seega võime võtta $k = k_4 = k_5 = k_6 = 1$, siis $k = 1 = k_3 = 2$ ja $k_2 = 3$ (joonis 2).

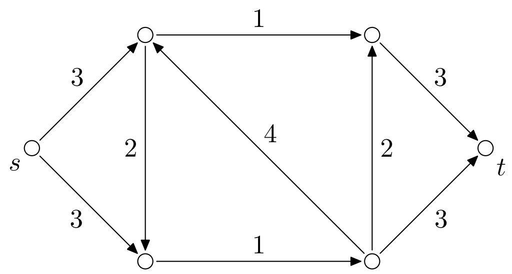


Joonis 1.



Joonis 2.

2. Leida võrgus



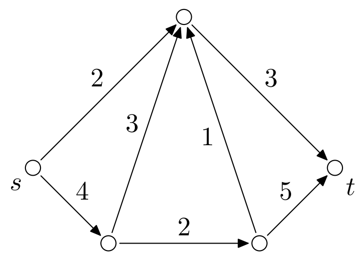
a) kõik täisarvulised vood;

b) maksimaalse voo väärtus.

Lahendus. a) Kokku on selles võrgus 13 erinevat täisarvulist voogu (täisarvuline voog on voog, mille väärtus igal kaarel on täisarv).

b) Maksimaalse voo väärtus on 2.

3. Leida võrgus



a) kõik lõiked;

b) minimaalse lõike läbilaskevõime.

Lahendus. a) Kokku on selles võrgus 77 erinevat lõiget. Et s–2–3–t ja s–4–2–5–t on kaks paarikaupa ühiste servadeta ahelat, siis peab iga lõige sisaldama vähemalt ühte kaart esimesest ja vähemalt ühte kaart teisest ahelast.

b) Minimaalse lõike läbilaskevõime on 5.

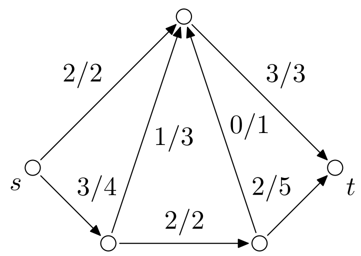
4. Leida

a) ülesandes 2 minimaalne lõige;

b) ülesandes 3 maksimaalne voog.

Lahendus. a) Minimaalne lõige koosneb kahest servast läbilaskevõimega 1. Selle lõike läbilaskevõime on võrdne maksimaalse voo väärtusega 2.

b) Maksimaalne voog on kujutatud joonisel 3. Selle väärtus on võrdne minimaalse lõike läbilaskevõimega 5.



Joonis 3.

5. Vaatleme graafide õpikus (A. Buldas, P. Laud, J. Willemson. *Graafid.* Tartu 2008) lk 46 defineeritud funktsiooni φ' võrgul (G, ψ). Tõestada, et φ' on tõepoolest voog ning et voo φ' väärtus on ε võrra suurem kui voo φ väärtus.

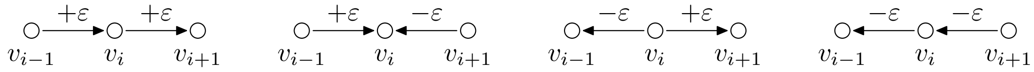
Lahendus. Kontrollime, et φ' rahuldab voo definitsiooni tingimusi, st et iga kaare e korral kehtib $0 \leqslant \varphi'(e) \leqslant \psi(e)$ ning et iga tipu v korral, kus $v \neq s$, $v \neq t$ kehtib $\overrightarrow{\deg}_{\varphi'}(v) = \overleftarrow{\deg}_{\varphi'}(v)$.

- Kui teoreemi tõestuses $e \notin \{e_1, \ldots, e_m\}$, siis $\varphi'(e) = \varphi(e)$ ning $0 \leqslant \varphi'(e) \leqslant \psi(e)$ kehtib seetõttu, et φ on voog.

- Kui mingi i korral $e = e_i = (v_{i-1}, v_i)$, siis ühelt poolt $\varphi'(e) = \varphi(e) + \varepsilon > \varphi(e) \geqslant 0$, sest $\varepsilon > 0$. Teiselt poolt aga $\varphi'(e) = \varphi'(e_i) = \varphi(e_i) + \varepsilon \leqslant \varphi(e_i) + \delta_i = \varphi(e_i) + (\psi(e_i) - \varphi(e_i)) = \psi(e_i)$, sest $\varepsilon \leqslant \delta_i$.

- Kui mingi i korral $e = e_i = (v_i, v_{i-1})$, siis ühelt poolt $\varphi'(e) = \varphi'(e_i) = \varphi(e_i) - \varepsilon \geqslant \delta_i - \varepsilon \geqslant 0$ ning teiselt poolt $\varphi'(e) = \varphi(e) - \varepsilon < \varphi(e) \leqslant \psi(e)$.

Kui tipp v ei kuulu teoreemi tõestuses vaadeldud suurendavale ahelale, siis $\overrightarrow{\deg}_{\varphi'}(v) = \overrightarrow{\deg}_{\varphi}(v) = \overleftarrow{\deg}_{\varphi}(v) = \overleftarrow{\deg}_{\varphi'}(v)$. Kui v aga kuulub sellele suurendavale ahelale tipuna v_i, siis leidub täpselt kaks kaart, millel voo väärtus muutub voo φ väärtusega võrreldes. Kui üks neist kaartest on sisenev ja teine väljuv, siis muutuvad tipu φ-sisendaste kui ka φ-väljundaste sama suuruse võrra. Kui aga mõlemad kaared on sisenevad või mõlemad väljuvad, siis tasakaalustavad need muutused teineteist ja nii φ-sisendaste kui ka φ-väljundaste jäävad samaks (joonis 4).



Joonis 4.

Et tipust s kaared ainult väljuvad, siis ka suurendav ahel algab tipust s väljuva kaarega. Sellel kaarel muutub voo väärtus ε võrra suuremaks, ülejäänud tipust s väljuvatel kaartel aga jääb samaks. Seega suureneb voo väärtus kokkuvõttes ε võrra.

6. Antud on suunatud graaf G. Defineerime graafi G kaartel määratud funktsioonide $\omega\colon E(G) \to \mathbb{R}$ summa ja skalaariga korrutise tavalisel viisil, st funktsioonide $\omega_1\colon E(G) \to \mathbb{R}$ ja $\omega_2\colon E(G) \to \mathbb{R}$ summa rahuldab seost $(\omega_1+\omega_2)(e) = \omega_1(e)+\omega_2(e)$ ning funktsiooni $\omega\colon E(G) \to \mathbb{R}$ korrutis reaalarvuga a seost $(a\varphi)(e) = a \cdot \varphi(e)$. Tõestada, et võrgu (G, ψ) voogude hulk on kumer, st kui φ_1 ja φ_2 on vood, siis iga reaalarvu $a \in [0, 1]$ korral on ka $a\varphi_1 + (1 - a)\varphi_2$ voog.

Lahendus. Kontrollime voo definitsiooni tingimusi. Suvalise serva $e \in E(G)$ korral $(a\varphi_1 + (1 - a)\varphi_2)(e) = a\varphi_1(e) + (1 - a)\varphi_2(e) \geqslant 0$, sest $\varphi_1(e) \geqslant 0$, $\varphi_2(e) \geqslant 0$ ja $a \in [0, 1]$. Samuti $(a\varphi_1 + (1-a)\varphi_2)(e) = a\varphi_1(e) + (1-a)\varphi_2(e) \leqslant a\psi(e) + (1 - a)\psi(e) = \psi(e)$, sest $\varphi_1(e) \leqslant \psi(e)$, $\varphi_2(e) \leqslant \psi(e)$ ja $a \in [0, 1]$.

Iga tipu v, $v \neq s$, $v \neq t$ korral

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\deg}_{a\varphi_1+(1-a)\varphi_2}(v) = &\sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in V(G)\times\{v\}}} (a\varphi_1 + (1 - a)\varphi_2)(v) = \\
= &\sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in V(G)\times\{v\}}} (a\varphi_1(v) + (1 - a)\varphi_2(v)) = \\
= a\sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in V(G)\times\{v\}}} \varphi_1(v) + (1 - a)&\sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in V(G)\times\{v\}}} \varphi_2(v) = a\,\overrightarrow{\deg}_{\varphi_1}(v) + (1 - a)\,\overrightarrow{\deg}_{\varphi_2}(v).
\end{aligned}$$

Analoogiliselt saame

$$\overleftarrow{\deg}_{a\varphi_1+(1-a)\varphi_2}(v) = a\,\overleftarrow{\deg}_{\varphi_1}(v) + (1 - a)\,\overleftarrow{\deg}_{\varphi_2}(v).$$

Et $\overrightarrow{\deg}_{\varphi_1}(v) = \overleftarrow{\deg}_{\varphi_1}(v)$ ja $\overrightarrow{\deg}_{\varphi_1}(v) = \overleftarrow{\deg}_{\varphi_1}(v)$, siis ka $\overrightarrow{\deg}_{a\varphi_1+(1-a)\varphi_2}(v) = \overleftarrow{\deg}_{a\varphi_1+(1-a)\varphi_2}(v)$.

7. Tihtipeale defineeritakse lõige kui võrgu tippude hulga alamhulk, mis sisaldab võrgu sisendit, aga ei sisalda võrgu väljundit. Lõike X läbilaskevõime on kõigi selliste kaarte läbilaskevõimete summa, mille algtipp kuulub hulka X ja lõpptipp ei kuulu hulka X. Niisuguse lähenemise üheks eeliseks on võimalus teha lõigetega hulgateoreetilisi tehteid.

Tõestada, et kui X, $Y \subseteq V(G)$ on võrgu (G, ψ) minimaalsed (st minimaalse läbilaskevõimega) lõiked, siis ka $X \cup Y$ ja $X \cap Y$ on võrgu (G, ψ) minimaalsed lõiked. (See tähendab, võrgu minimaalsete lõigete hulk moodustab hästituntud matemaatilise struktuuri, võre.)

Lahendus. Kõigepealt, $X \cup Y$ ja $X \cap Y$ on samuti lõiked, sest nad on võrgu tippude hulga alamhulgad, mis sisaldavad võrgu sisendit, aga mitte väljundit. Tähistagu sümbol $c(Z)$ lõike Z kaalu ning olgu $Z' = V(G) \setminus Z$. Samuti tähistame $d(U, V) = \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in U \times V}} \psi(e)$. Siis

$$\begin{aligned}
c(X) = d(X, X') &= d(X \cap Y, X' \cap Y) + d(X \cap Y, X' \cap Y') + \\
&\quad + d(X \cap Y', X' \cap Y) + d(X \cap Y', X' \cap Y'), \\
c(Y) = d(Y, Y') &= d(X \cap Y, X \cap Y') + d(X \cap Y, X' \cap Y') + \\
&\quad + d(X' \cap Y', X \cap Y') + d(X' \cap Y', X' \cap Y'), \\
c(X \cup Y) = d(X \cup Y, (X \cup Y)') &= d(X \cap Y, X' \cap Y') + \\
&\quad + d(X' \cap Y, X' \cap Y') + d(X \cap Y', X' \cap Y'), \\
c(X \cap Y) = d(X \cap Y, (X \cap Y)') &= d(X \cap Y, X' \cap Y') + \\
&\quad + d(X \cap Y, X' \cap Y) + d(X \cap Y, X \cap Y')
\end{aligned}$$

Järelikult

$$c(X) + c(Y) - c(X \cup Y) - c(X \cap Y) = d(X \cap Y', X' \cap Y) + d(X' \cap Y, X \cap Y') \geqslant 0.$$

Seega $c(X) + c(Y) \geqslant c(X \cup Y) + c(X \cap Y)$. Et X ja Y on lõiked, mille läbilaskevõimed on minimaalsed, siis peavad olema ka lõigete $X \cup Y$ ja $X \cap Y$ läbilaskevõimed minimaalsed.

8. Olgu (G, ψ) võrk, millel on mitu sisendit ja mitu väljundit, ning X ja Y vastavalt selle graafi sisendite hulk ning väljundite hulk. Olgu φ mingi voog sellel võrgul.

a) Tõestada, et summaarne voog hulgast X välja ja summaarne voog hulka Y sisse on võrdsed.

b) Defineerida voo φ väärtus võrgul (G, ψ).

c) Taandada mitme sisendi ja mitme väljundiga võrk ühe sisendi ja ühe väljundiga võrguks, lisades võrgule (G, ψ) kaks tippu sobivate läbilaskevõimetega.

d) Defineerida voole φ vastav voog sellel ühe sisendi ja ühe väljundiga võrgul.

Lahendus. a) Tähistame lühiduse mõttes $V(G) \setminus (X \cup Y) = Z$. Hulgad X, Y ja Z on lõikumatud. Et φ on voog, siis hulga Z iga tipu φ-sisendaste võrdub tema φ-väljundasmega. Seega iga tipu $v \in Z$ korral

$$\sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in \{v\} \times V}} \varphi(e) = \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in V \times \{v\}}} \varphi(e).$$

Summeerides üle hulga Z, saame

$$\sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in Z\times V}} \varphi(e) = \sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in V\times Z}} \varphi(e).$$

Arvestades, et võrgus puuduvad kaared, mis sisenevad hulga X tippudesse, ning kaared, mis väljuvad hulga Y tippudest, on selle võrduse vasak ja parem pool vastavalt

$$\sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in Z\times V}} \varphi(e) = \sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in Z\times Y}} \varphi(e) + \sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in Z\times Z}} \varphi(e), \qquad \sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in V\times Z}} \varphi(e) = \sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in X\times Z}} \varphi(e) + \sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in Z\times Z}} \varphi(e).$$

Et mõlema summa paremal poolel on teised liikmed võrdsed, siis on võrdsed ka esimesed liikmed:

$$\sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in Z\times Y}} \varphi(e) = \sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in X\times Z}} \varphi(e).$$

Nüüd aga

$$\sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in X\times V}} \varphi(e) = \sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in X\times (Y\cup Z)}} \varphi(e) = \sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in X\times Y}} \varphi(e) + \sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in X\times Z}} \varphi(e) =$$
$$= \sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in X\times Y}} \varphi(e) + \sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in Z\times Y}} \varphi(e) = \sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in (X\cup Z)\times Y}} \varphi(e) = \sum_{\substack{e\in E(G)\\ e\in V\times Y}} \varphi(e),$$

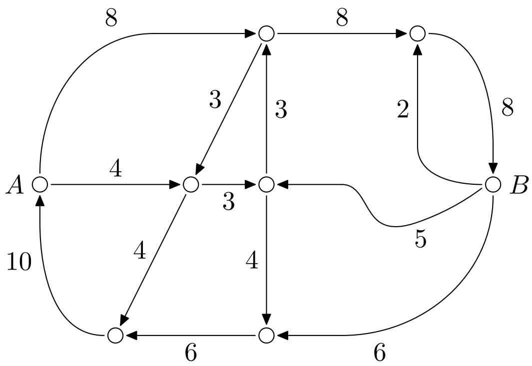
mida oligi tarvis tõestada.

b) Mitme sisendiga võrgul määratud voo φ väärtus on võrgu sisendite φ-väljundastmete summa.

c) Lisame graafile tipu s ja tõmbame kaare tipust s igasse hulga X tippu. Iga kaare läbilaskevõimeks loeme tema lõpptipust väljuvate kaarte läbilaskevõimete summa. Analoogiliselt lisame graafile teise tipu t ning tõmbame kaare igast hulga Y tipust tippu t. Iga sellise kaare läbilaskevõimeks loeme tema algtippu suubuvate kaarte läbilaskevõimete summa.

d) Kui on antud voog φ mitme sisendi ja väljundiga võrgul (G, ψ), siis täiendades seda voogu nii, et igale tipust s väljuvale kaarele seada vastavusse kaare lõpptipu φ-väljundaste ning igale tippu t suubuvale kaarele seada vastavusse kaare algtipu φ-sisendaste, siis saame voo vastaval ühe sisendi ja ühe väljundiga graafil. Lihtne on kontrollida, et see voog rahuldab voo definitsiooni nõudeid.

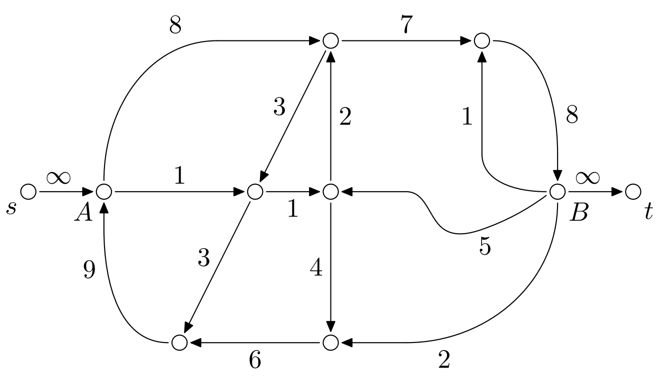
9. Järgnev plaan kujutab linna bussiliine 8 peamise bussipeatuse vahel. Bussid sõidavad ainult noolte suundades. Kaarte läbilaskevõimed näitavad, mitu bussi tunnis maksimaalselt võib igal teelõigul sõita. Igal teelõigul peab tunnis sõitma vähemalt üks buss. Üks buss suudab vedada kuni 50 reisijat. Leida maksimaalne reisijate arv, mis võib tunnis liikuda punktist A (elamurajoonist) punkti B (kesklinna).



Märkus. Tegemist on graafiga, kus puuduvad sisendid ja väljundid. Busside koguarv süsteemis peab igal ajahetkel jääma samaks.

Lahendus. Meil on vaja määrata graafi kaarte läbilaskevõimed nii, et 1) iga kaare läbilaskevõime jääb lubatud piiridesse, 2) iga tipu sisendaste võrdub väljundastmega ning 3) kui graafile lisada tipud s ja t koos piiramatu läbilaskevõimega kaartega $s \to A$ ja $B \to t$, siis on saadava võrgu maksimaalne voog võimalikult suur.

Sellised läblaskevõimed on kujutatud joonisel 5. Selle võrgu maksimaalne voog on 7: näiteks voog, mille väärtus võrgu ülemise ääre kaartest koosneval ahelal on 7 ning ülejäänud kaartel 0. Läbilaskevõimeid, mille puhul võrgu maksimaalse voo väärtus oleks 8, graafi kaartele omistada ei saa, sest ülemisest vasakpoolsest tipust tippu B viiva kaare läbilaskevõime on ülimalt 8, tipust B sinna tagasi toova kaare läbilaskevõime aga vähemalt 1. Seega saab teise sellesse tippu siseneva kaare läbilaskevõime olla ülimalt 7. Samas see kaar on võrgu lõige.

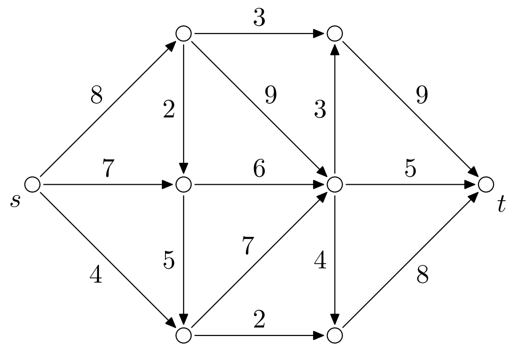


Joonis 5.

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused.

10. Leida võrgus

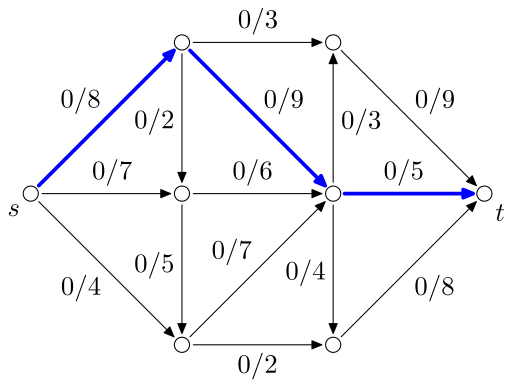


maksimaalne voog ja minimaalne lõige.

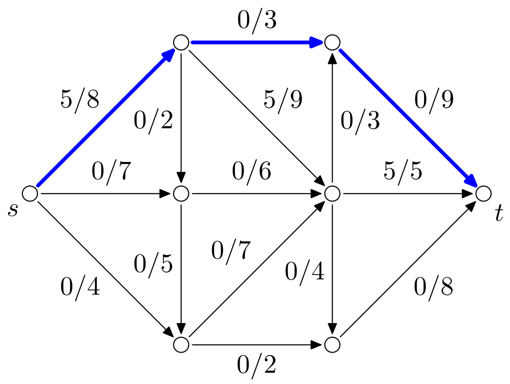
Lahendus. Kasutame Fordi-Fulkersoni algoritmi (Edmondsi-Karpi täiendusega). Algoritmi sammude tulemused on kujutatud joonistel 6–12. Lõpptulemuseks joonisel 12 on voog väärtusega 17. Joonisel 13 on kujutatud lõige läbilaskevõimega samuti 17. Järelikult on tegemist maksimaalse vooga (ja minimaalse lõikega).

11. Olgu (G, ψ) võrk ja φ voog sellel. Olgu $S \subset V(G)$ selline hulk, et $s \notin S$ ja $t \notin S$ ning $S' = V(G) \setminus S$. Tõestada, et

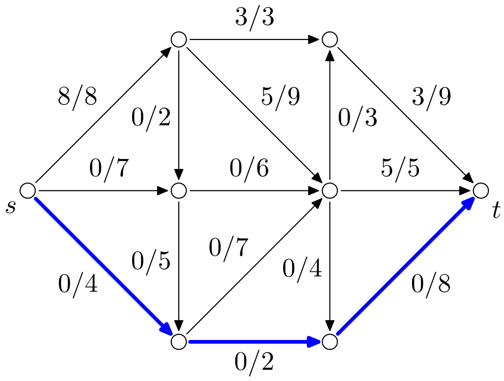
$$\sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in S \times S'}} \varphi(e) = \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in S' \times S}} \varphi(e).$$



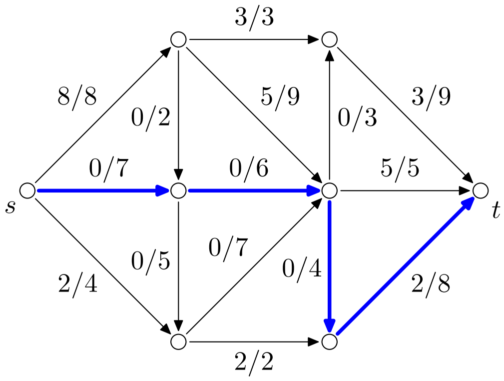
Joonis 6.



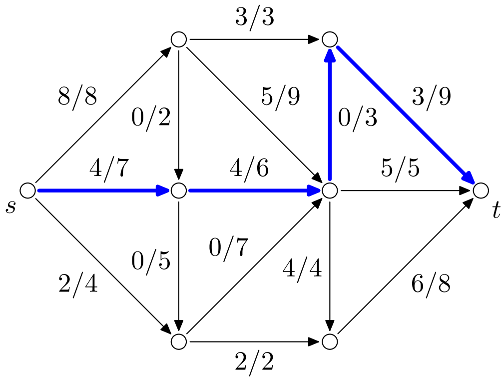
Joonis 7.



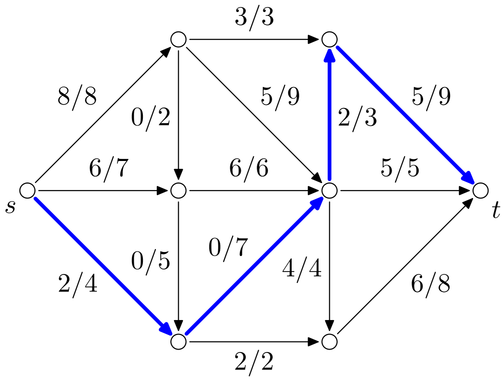
Joonis 8.



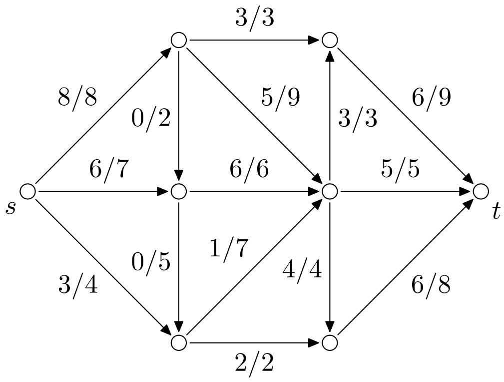
Joonis 9.



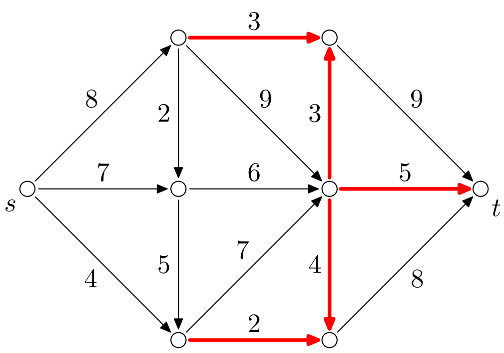
Joonis 10.



Joonis 11.



Joonis 12.



Joonis 13.

Lahendus. Et vastavalt voo definitsioonile on iga tipu φ-sisendaste võrdne tipu φ-väljundastmega, siis iga tipu $v \in V(G)$ korral

$$\sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in \{v\} \times V(G)}} \varphi(e) = \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in V(G) \times \{v\}}} \varphi(e).$$

Summeerides need võrdused üle hulga S, saame

$$\sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in S \times V(G)}} \varphi(e) = \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in V(G) \times S}} \varphi(e).$$

Et $V(G) = S \cup S'$, siis järelikult

$$\sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in S \times S}} \varphi(e) + \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in S \times S'}} \varphi(e) = \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in S \times S}} \varphi(e) + \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in S' \times S}} \varphi(e).$$

Koondades vasakult ja paremalt võrdsed liikmed, jõuamegi võrduseni

$$\sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in S \times S'}} \varphi(e) = \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in S' \times S}} \varphi(e).$$

12. Olgu (G, ψ) võrk, kus $\psi(e) = 1$ iga $e \in E(G)$ korral, ning s ja t vastavalt võrgu sisend ja väljund. Tõestada, et selle võrgu maksimaalse voo väärtus võrdub paarikaupa ühiste kaarteta suunatud ahelate arvuga tipust s tippu t.

Lahendus. Olgu n paarikaupa ühiste kaarteta ahelate maksimaalne arv tipust s tippu t selles võrgus. Vaatleme mingit n sellist ahelat. Defineerime voo φ nii, et iga nendesse ahelatesse kuuluva kaare e korral $\varphi(e) = 1$ ning ülejäänud kaarte korral $\varphi(e) = 0$. See on tõesti voog, sest arvestades, et ahelad on ühiste kaarteta, on igas tipus v, kus mõned neist ahelatest omavahel lõikuvad, nende ahelate kaarte seas tippu v sisenevaid kaari sama palju kui väljuvaid. Selle voo väärtus on n. Järelikult on võrgu maksimaalse voo väärtus vähemalt n.

Et võrgu (G, ψ) kaarte läbilaskevõimed on täisarvud, siis Fordi-Fulkersoni algoritm peatub ja annab tulemuseks maksimaalse voo φ, mille väärtus igal kaarel on samuti täisarv. Ülesande tingimuste kohaselt saavad need täisarvud olla ainult 0 või 1. Vaatleme suvalist suunatud ahelat p tipust s tippu t, mille iga serva e korral $\varphi(e) = 1$. Kui voo φ väärtus on nullist suurem, siis selline ahel leidub. Muudame nüüd selle ahela kaarte väärtused 0-ks. Tulemuseks saame samuti voo, sest iga tippudest s ja t erineva tipu φ-sisendaste ja φ-väljundaste kas vähenesid mõlemad ühe võrra või jäid mõlemad samaks.

Saadud voo väärtus on 1 võrra väiksem kui esialgse voo väärtus. Analoogiliselt eelnevaga leiame nüüd uue ahela tipust s tippu t. Seda tegevust kordame kuni voo väärtus kahaneb nulliks. Tulemuseks saame teatud arvu paarikaupa ühiste kaarteta ahelaid tipust s tippu t. Nende ahelate arv võrdub voo φ väärtusega. Järelikult on võrgu maksimaalse voo väärtus ülimalt nii suur kui selliste ahelate maksimaalne arv n.

Kahe eelneva lõigu tulemusi kokku võttes saamegi, et võrgu maksimaalse voo väärtus on n.