Diskreetne matemaatika 2012

5. praktikum

Reimo Palm

Käesolevas teemas vaatleme komplekti omavahel ekvivalentseid teoreeme, mis on märkimisväärselt tugevad ja sisukad. Nende hulka kuuluvad Fordi-Fulkersoni teoreem, Königi-Egerváry teoreem, Halli teoreem, Königi teoreem, Mengeri teoreem, Dilworthi teoreem, Birkhoffi – Von Neumanni teoreem, Berge'i teoreem, Tutte'i teoreem.

Praktikumiülesanded

1. 52-kaardilise kaardipaki kaardid laotakse tabelisse, millel on 13 rida ja 4 veergu. Tõestada, et on võimalik valida igast reast üks kaart nii, et valitud 13 kaardi hulka kuulub täpselt üks kaart igast kõrgusest.

Juhis. $X = \{\text{kõrgused}\}$, $Y = \{\text{read}\}$, $E = \{\{x, y\}\colon \text{kaart kõrgusega } x$ esineb tabeli reas $y\}$.

2. Olgu $m \leqslant n$. *Ladina ristkülikuks* nimetatakse maatriksit mõõtmetega $m \times n$, mille elemendid kuuluvad hulka $\{1, 2, \ldots, n\}$ ning esinevad selle maatriksi igas reas ja igas veerus mitte üle ühe korra. *Ladina ruuduks* nimetatakse ladina ristkülikut, kus $m = n$. Tõestada, et iga ladina ristküliku saab $n - m$ rea lisamise teel täiendada ladina ruuduks.

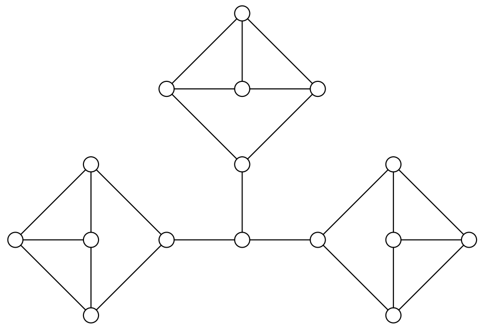
Juhis. Induktsioon; $X = \{\text{maatriksi veerud}\}$, $Y = \{1, 2, \ldots, n\}$, $E = \{\{i, j\}\colon \text{veerus } i \text{ puudub arv } j\}$.

3. Hulkade A_1, A_2, …, A_n *transversaaliks* nimetatakse hulka T, mille saab elemente sobivalt järjestades esitada kujul $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, kus iga i korral $t_i \in A_i$. Tõestada, et hulkadel A_1, A_2, …, A_n leidub transversaal parajasti siis, kui iga $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ korral $|\cup_{i \in I} A_i| \geqslant |I|$.

Juhis. $X = \{A_i\}$, $Y = \cup A_i$, $E = \{\{A, x\}\colon \text{hulk } A \text{ sisaldab elementi } x\}$.

4. Kas hulga $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kõigi 3-elemendiliste alamhulkade komplektil leidub transversaal?

5. Tõestada Halli teoreemi piisavuse osa Mengeri teoreemi abil.



Joonis 1.

a) Lisada graafile G kaks tippu u ja v, millest üks on seotud alusega X ja teine alusega Y.

b) Tõestada, et Halli teoreemis nimetatud omadusega kooskõla leidub parajasti siis, kui paarikaupa ühiste sisetippudeta ahelate arv tipust s tippu t on $|X|$.

c) Järeldada Mengeri teoreemist, et see tingimus on täidetud siis, kui iga tippe s ja t eraldav tippude hulk S graafis G koosneb vähemalt $|X|$ tipust.

d) Jaotada hulga S tipud vastavalt alustele X ja Y kaheks hulgaks A ja B.

e) Tõestada, et $|X \setminus A| \leqslant |B|$, kasutades asjaolu, et S on eraldav hulk ning et $X \setminus A$ rahuldab Halli teoreemi piisavuse osa eeldusi.

f) Järeldada, et $|S| \geqslant |X|$.

6. Vaatleme *Sylvesteri graafi* (joonis 1).

a) Leida Sylvesteri graafis maksimaalne kooskõla.

b) Leida Sylvesteri graafis minimaalne kate.

c) Võrrelda tulemusi. Kas siin on vastuolu mõne teoreemiga?

d) Tõestada, et Sylvesteri graafis ei leidu *täielikku kooskõla*, st kooskõla, mis haarab kõik tipud.

e) Tõestada, et iga $r > 1$ korral leidub regulaarne lihtgraaf astmega r, milles pole täielikku kooskõla.

Märkus. Sylvesteri graaf on on vähim paaritu astmega regulaarne graaf, kus ei leidu täielikku kooskõla.

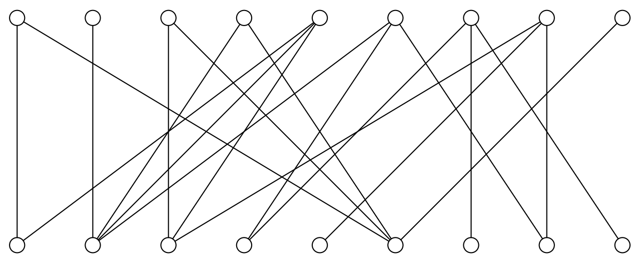
7. Leida maksimaalne kooskõla n-mõõtmelises kuubis Q_n. Mitu serva see sisaldab? Kas see on täielik kooskõla?

8. Kui palju täielikke kooskõlasid leidub

a) graafil $K_{n,n}$;

b) graafil K_{2n}?

9. Ettevõtte tegevjuht soovib mitmest arendamisel olevast tootest valida välja parima, mida turule tuua. Selleks laseb ta iga toodet analüüsida kaheliikmelisel meeskonnal, mis koosneb arendajast ja müüjast, kes kirjutavad koos toote kohta aruande. Meeskonnad moodustatakse järgmise graafi põhjal; iga serv vastab ühele tootele ning selle otspunktid arendajale ja müüjale (vastavalt hulgad A ja M), kes seda analüüsivad. Milline on vähim inimeste arv, keda tegevjuht peab koosolekule kutsuma, et iga toote kohta oleks aruanne olemas? (Aruande võib esitada kas arendaja või müüja.)



10. Tootmisüksuses tuleb ära teha n tööd 1, 2, ..., n, igaüks võtab aega ühe päeva. Tööde tegemiseks on tootmisüksusel olemas kaks masinat. Esimene teeb korraga ühte tööd ja teeb selle ära ühe päevaga, teine aga teeb korraga kahte tööd ja teeb need mõlemad ära ühe päevaga. Tööde vahel kehtib osaline eelnevusjärjestus $\leqslant$, kus $i \leqslant j$ tähendab, et töö i peab olema tehtud enne, kui tööga j saab alustada. Eesmärk on teha ära kõik tööd nii, et suurus $p_1 + p_2$ oleks minimaalne, kus p_i on päevade arv, mille jooksul masin i on kasutuses. Formuleerida see ülesanne maksimaalse kooskõla leidmise ülesandena sobivalt defineeritud graafis.

11. a) Olgu M kooskõla graafis G. Tõestada, et graafis G leidub maksimaalne kooskõla, mis katab kõiki neid tippe, mida katab ka M. *Juhis.* Berge'i teoreem.

b) Järeldada sellest, et iga tipu sidusas mittetriviaalses graafis saab katta mingi maksimaalse kooskõlaga.

c) Olgu $G = (X \cup Y, E)$ kahealuseline graaf ning $A \subseteq X$ ja $B \subseteq Y$. Tõestada, et kui graafis G leidub kooskõla, mis katab hulga A kõik tipud, ja kooskõla, mis katab hulga B kõik tipud, siis leidub graafis G ka kooskõla, mis katab hulga $A \cup B$ kõik tipud.

12. Olgu $G = (X \cup Y, E)$ kahealuseline graaf. Tõestada, et servade arv graafi G maksimaalses kooskõlas on $|X| - \max_{X' \subseteq X}\{|X'| - |N(X')|\}$.

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused.

13. Olgu X hulk, millel on kaks tükeldust (st esitust paarikaupa ühisosata mittetühjade alamhulkade ühendina) $X = \cup_{i=1}^{n} A_i = \cup_{i=1}^{n} B_i$, kus iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral $|A_i| = |B_i| = k$. Tõestada, et leidub hulk $T \subseteq X$, mis on nii hulkade komplekti $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ kui ka hulkade komplekti $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ transversaal.

Juhis. $X = \{A_i\}$, $Y = \{B_i\}$, $E = \{\{A, B\} \colon A \cap B \neq \emptyset\}$.

14. Antud on graaf G. Kaks mängijat A ja B mängivad järgmist mängu. Käigul olles märgistab kumbki mängija graafis ühe varem märgistamata tipu, mis (alates teisest käigust) on servaga ühendatud vastase poolt eelmisel käigul märgistatud tipuga. Käike tehakse kordamööda, alustab A. Võidab see, kes teeb viimase käigu.

a) Tõestada, et kui graafis G leidub täielik kooskõla, siis leidub võitev strateegia mängijal B.

b) Tõestada, et kui graafis G ei leidu täielikku kooskõla, siis leidub võitev strateegia mängijal A.

15. a) Tõestada, et kahealuselises graafis G leidub täielik kooskõla parajasti siis, kui iga $S \subseteq V(G)$ korral $|N(S)| \geqslant |S|$.

b) Tuua näide, millest nähtub, et eelnev väide ei jää kehtima, kui graafi G kahealuselisuse tingimusest loobuda.

16. Olgu A lõplik hulk, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tema alamhulgad ning $d_1, d_2, \ldots d_n$ naturaalarvud. Tõestada, et järgmised väited on omavahel samaväärsed.

a) Leiduvad paarikaupa ühisosata hulgad $D_1, D_2, \ldots, D_n$ nii, et iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral $D_i \subseteq A_i$ ja $|D_i| = d_i$.

b) Iga $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ korral

$$\Big|\bigcup_{i\in I} A_i\Big| \geqslant \sum_{i\in I} d_i.$$