Diskreetne matemaatika 2012

6. praktikum

Reimo Palm

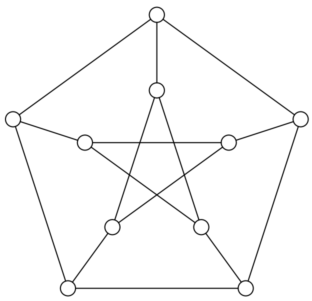
Järgnevad ülesanded on seotud Tutte'i teoreemiga.

Praktikumiülesanded

1. a) Tõestada Tutte'i teoreemi abil, et Sylvesteri graafis (vt eelmist praktikumi) ei leidu täielikku kooskõla.

b) Sylvesteri graaf on regulaarne graaf astmega 3. Selgitada, miks eelmise punkti tulemuses pole vastuolu loengumaterjalides Tutte'i teoreemist tehtud järeldusega (Peterseni teoreem, 1891).

2. Kas *Peterseni graafis*



leidub täielik kooskõla?

3. Leida kõik naturaalarvud n, mille korral täielikus kolmealuselises graafis $K_{n,n,n}$ leidub täielik kooskõla.

4. a) Tõestada, et puus $G = (V, E)$ leidub täielik kooskõla parajasti siis, kui iga tipu $v \in V$ korral $\operatorname{odd}(G \setminus v) = 1$.

b) Kus kasutatakse selles tõestuses eeldust, et G on puu?

5. Olgu $G = (V, E)$ graaf ja $m(G)$ selle graafi maksimaalse kooskõla servade arv. Kehtib *Tutte'i-Berge'i valem*, mille kohaselt

$$m(G) = \frac{1}{2} \min_{S \subseteq V} \bigl(|V| + |S| - \operatorname{odd}(G \setminus S)\bigr).$$

Ülesandeks on tõestada sellest võrdusest võrratuse $\leqslant$ osa.

a) Valida suvaline alamhulk $S \subseteq V$.

b) Hinnata graafi G maksimaalse kooskõla servade arvu hulga S elementide arvu ja graafi $G \setminus S$ maksimaalse kooskõla servade arvu kaudu.

c) Arvestades, et iga kooskõla korral leidub graafi igas paaritu tippude arvuga sidusas komponendis vähemalt üks tipp, mida see kooskõla ei kata, hinnata graafi $G \setminus S$ maksimaalse kooskõla servade arvu selle graafi paaritute sidusate komponentide arvu ja teatavate hulkade elementide arvude kaudu.

d) Leida kahe eelneva punkti põhjal saadud avaldisest miinimum, arvestades, et üks pool sõltub hulgast S, aga teine pool ei sõltu.

Tutte'i-Berge'i valemi tõestuse põhiosa on võrratus $\geqslant$, sellest järeldub muu hulgas ka Tutte'i teoreem.

6. Olgu $G = (V, E)$ graaf. Olgu $X \subseteq V$ ning $F = G[X]$ tippude hulga X poolt indutseeritud alamgraaf. Moodustame graafist G graafi H järgmisel viisil.

- Lisame serva iga kahe ühendamata tipu vahele hulgast $V \setminus X$.
- Kui $|V|$ on paaritu, siis lisame uue tipu ja ühendame ta iga tipuga hulgast $V \setminus X$.

a) Tõestada, et graafis G leidub kõiki hulga X tippe kattev kooskõla parajasti siis, kui graafis H leidub täielik kooskõla.

b) Kasutades Tutte'i teoreemi, järeldada sellest, et graafis G leidub kõiki hulga X tippe kattev kooskõla parajasti siis, kui iga $S \subseteq V$ korral on graafi $G \setminus S$ selliste paaritute komponentide arv, mis on graafi $F \setminus S$ alamgraafid, ülimalt $|S|$.

c) Eelmise punkti abil järeldada Tutte'i teoreemist Halli teoreemi piisavuse osa.

7. Nimetame graafi *k-sidusaks*, kui vähim servade arv, mille eemaldamise järel saab graaf olla mittesidus, on k. Näiteks silda sisaldav graaf on 1-sidus.

a) Tõestada, et kui G on paaris tippude arvuga $(k-1)$-sidus regulaarne graaf astmega $k \geqslant 1$, siis graafis G leidub täielik kooskõla.

b) Tõestada, et kui G on paaris tippude arvuga $(k-2)$-sidus regulaarne graaf astmega $k \geqslant 2$, siis graafis G ei tarvitse leiduda täielikku kooskõla.

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused.

8. Olgu G kahealuseline graaf alustega X ja Y ning olgu S_1 ja S_2 hulga X alamhulgad.

a) Tõestada, et

$$|N(S_1)| + |N(S_2)| \geqslant |N(S_1 \cup S_2)| + |N(S_1 \cap S_2)|.$$

b) Tuua näide, mille korral eelmine võrratus on range.

9. Tõestada, et kui G on puu, siis on graafil G ülimalt üks täielik kooskõla.

10. Tõestada, et kui G on regulaarne graaf astmega 3, kus esineb täpselt üks sild, siis graafis G leidub täielik kooskõla.