Diskreetne matemaatika 2012

6. praktikum

Reimo Palm

Järgnevad ülesanded on seotud Tutte'i teoreemiga.

Praktikumiülesanded

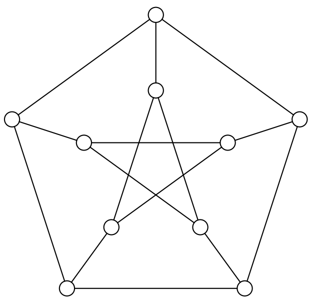
1. a) Tõestada Tutte'i teoreemi abil, et Sylvesteri graafis (vt eelmist praktikumi) ei leidu täielikku kooskõla.

b) Sylvesteri graaf on regulaarne graaf astmega 3. Selgitada, miks eelmise punkti tulemuses pole vastuolu loengumaterjalides Tutte'i teoreemist tehtud järeldusega (Peterseni teoreem, 1891).

Lahendus. a) Kui eemaldada graafist keskmine tipp, siis on järelejäänud graafis kolm paaritut komponenti (igaühes 5 tippu).

b) Nimetatud teoreem kehtib ainult nende graafide kohta, kus pole sildu.

2. Kas *Peterseni graafis*

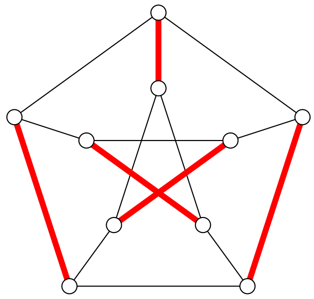


leidub täielik kooskõla?

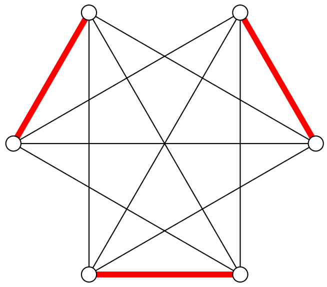
Lahendus. Jah, leidub küll (joonis 1).

3. Leida kõik naturaalarvud n, mille korral täielikus kolmealuselises graafis $K_{n,n,n}$ leidub täielik kooskõla.

Lahendus. Graafis $K_{n,n,n}$ on kokku $3n$ tippu. Kui n on paaritu, siis ka graafi tippude arv on paaritu ning täielikku kooskõla kindlasti ei leidu.



Joonis 1.



Joonis 2.

Seega eeldame, et n on paaris. Kui $n = 2$, siis graafis leidub täielik kooskõla (joonis 2). Kui $n = 2k$, kus $k > 1$, siis eraldame välja kõigis kolmes aluses igaühes kaks tippu. Nende tippude poolt indutseeritud alamgraaf on parajasti graaf $K_{2,2,2}$, milles leidub täielik kooskõla. Ülejäänud tippude poolt indutseeritud alamgraaf on täielik kolmealuseline graaf $K_{2k-2,2k-2,2k-2}$, milles võime leida täieliku kooskõla induktsiooni abil.

4. a) Tõestada, et puus $G = (V, E)$ leidub täielik kooskõla parajasti siis, kui iga tipu $v \in V$ korral $\mathrm{odd}(G \setminus v) = 1$.

b) Kus kasutatakse selles tõestuses eeldust, et G on puu?

Lahendus. a) ($\Rightarrow$) Eeldame, et puus $G = (V, E)$ leidub täielik kooskõla. Valime suvalise tipu $v \in V$. Vastavalt Tutte'i teoreemile siis $\mathrm{odd}(G \setminus v) \leqslant 1$. Teiselt poolt, et puus G leidub täielik kooskõla, siis on tema tippude arv paaris. Järelikult on graafi $G \setminus v$ tippude arv paaritu, mis tähendab, et selles graafis leidub vähemalt üks paaritu arvu tippudega sidus komponent. Seega $\mathrm{odd}(G \setminus v) \geqslant 1$. Koos eelneva võrratusega saame siit $\mathrm{odd}(G \setminus v) = 1$.

($\Leftarrow$) Eeldame, et puus $G = (V, E)$ kehtib iga tipu $v \in V$ korral $\mathrm{odd}(G \setminus v) = 1$. Kõigepealt paneme tähele, et puus G on paarisarv tippe, sest kui eemaldada üks leht, siis jääb järele üks sidus komponent, mis eelduse põhjal on paaritu. Tõestame induktsiooniga, et puus G leidub täielik kooskõla. Kui puu on 2-tipuline, siis täielik kooskõla leidub. Eeldame nüüd, et puu tippude arv on mingi suurem paarisarv. Eemaldame puust mingi lehe x koos tema naabertipuga y. Sellega laguneb puu G teatavaks arvuks sidusateks komponentideks, millest igaüks on jällegi puu. Iga komponent on paarisarvuline, sest need komponendid on samad, mis tekivad esialgsest graafist tipu y eemaldamisel. Kuid esialgses graafis G tipu y eemaldamisel tekib veel ühetipuline komponent $\{x\}$, mis eelduse põhjal on ainus paaritu komponent.

Tõestame, et iga tippude x ja y eemaldamisel tekkinud komponent H rahuldab tingimust, et iga tipu $v \in H$ korral $\mathrm{odd}(H \setminus v) = 1$. Tõepoolest, kui eemaldada tipp $v \in H$ graafist H, siis laguneb H komponentideks. Siis need komponendid peale ühe on samad nagu graafis G tipu v eemaldamisel saadud komponendid, üks komponent aga on graafis H kas paarisarvu tippude võrra väiksem või puudub üldse, sest komponendist H väljapoole jäävaid graafi G tippe, mis kõik sellesse komponenti kuuluvad, on paarisarv. Et graafist G tekkinud komponentide seas on täpselt üks paaritu komponent, siis järelikult ka graafist H tekkinud komponentide seas on täpselt üks paaritu komponent.

Induktsiooni eelduse põhjal leidub nüüd kõigis graafist G tippude x ja y eemaldamisel tekkinud komponentides täielik kooskõla. See kooskõla koos servaga xy moodustab täieliku kooskõla graafis G.

b) Eeldust, et G on puu, kasutatakse kõigepealt seal, kus eemaldatakse graafist üks leht – puus kindlasti leht leidub. Samuti on vaja seda eeldust seal, kus märgitakse, et komponendist H tipu v eemaldamisel tekkivad komponendid peale ühe ei sõltu sellest, kas graafist G on tipp x varem eemaldatud või mitte.

Küsimus. Kas kooskõla leidumist saab tõestada Tutte'i teoreemile taandamise teel, järeldades tingimusest „iga $v \in V$ korral $\operatorname{odd}(G \setminus v) = 1$“ Tutte'i tingimuse „iga $V \subseteq X$ korral $\operatorname{odd}(G \setminus S) \leqslant |S|$“?

5. Olgu $G = (V, E)$ graaf ja $m(G)$ selle graafi maksimaalse kooskõla servade arv. Kehtib *Tutte'i-Berge'i valem*, mille kohaselt

$$m(G) = \frac{1}{2} \min_{S \subseteq V} \big(|V| + |S| - \operatorname{odd}(G \setminus S)\big).$$

Ülesandeks on tõestada sellest võrdusest võrratuse $\leqslant$ osa.

a) Valida suvaline alamhulk $S \subseteq V$.

b) Hinnata graafi G maksimaalse kooskõla servade arvu hulga S elementide arvu ja graafi $G \setminus S$ maksimaalse kooskõla servade arvu kaudu.

c) Arvestades, et iga kooskõla korral leidub graafi igas paaritu tippude arvuga sidusas komponendis vähemalt üks tipp, mida see kooskõla ei kata, hinnata graafi $G \setminus S$ maksimaalse kooskõla servade arvu selle graafi paaritute sidusate komponentide arvu ja teatavate hulkade elementide arvude kaudu.

d) Leida kahe eelneva punkti põhjal saadud avaldisest miinimum, arvestades, et üks pool sõltub hulgast S, aga teine pool ei sõltu.

Tutte'i-Berge'i valemi tõestuse põhiosa on võrratus $\geqslant$, sellest järeldub muu hulgas ka Tutte'i teoreem.

Lahendus. Olgu $S \subseteq V$ mingi tippude hulk ja M graafi G maksimaalne kooskõla. Jaotame kooskõlasse M kuuluvad servad kahte tüüpi: 1) need, mille mõlemad otstipud kuuluvad hulka $V \setminus S$ ning 2) need, mille vähemalt üks otstipp kuulub hulka S. Esimest tüüpi servad moodustavad kooskõla graafis $G \setminus S$ ning neid servi pole rohkem kui graafi $G \setminus S$ maksimaalse kooskõla servade arv. Teist tüüpi servi aga pole rohkem kui $|S|$, sest igale sellisele servale vastab üks või kaks hulga S tippu. Järelikult

$$m(G) \leqslant |S| + m(G \setminus S).$$

Graafis $G \setminus S$ on $\mathrm{odd}(G \setminus S)$ paaritu tippude arvuga sidusat komponenti. Igas sellises komponendis jääb iga kooskõla korral alati vähemalt üks tipp katmata. Seega saab iga kooskõla katta ülimalt $|G \setminus S| - \mathrm{odd}(G \setminus S)$ tippu. Järelikult

$$m(G \setminus S) \leqslant \frac{1}{2}(|V \setminus S| - \mathrm{odd}(G \setminus S).$$

Kahest viimasest võrratusest saame nüüd

$$m(G) \leqslant \frac{1}{2}\big(|V| + |S| - \mathrm{odd}(G \setminus S)\big).$$

Et viimane võrratus kehtib iga hulga S korral ning tema vasak pool ei sõltu hulgast S, siis

$$m(G) \leqslant \frac{1}{2} \min_{S \subseteq V}\big(|V| + |S| - \mathrm{odd}(G \setminus S)\big).$$

6. Olgu $G = (V, E)$ graaf. Olgu $X \subseteq V$ ning $F = G[X]$ tippude hulga X poolt indutseeritud alamgraaf. Moodustame graafist G graafi H järgmisel viisil.

- Lisame serva iga kahe ühendamata tipu vahele hulgast $V \setminus X$.
- Kui $|V|$ on paaritu, siis lisame uue tipu ja ühendame ta iga tipuga hulgast $V \setminus X$.

a) Tõestada, et graafis G leidub kõiki hulga X tippe kattev kooskõla parajasti siis, kui graafis H leidub täielik kooskõla.

b) Kasutades Tutte'i teoreemi, järeldada sellest, et graafis G leidub kõiki hulga X tippe kattev kooskõla parajasti siis, kui iga $S \subseteq V$ korral on graafi $G \setminus S$ selliste paaritute komponentide arv, mis on graafi $F \setminus S$ alamgraafid, ülimalt $|S|$.

c) Eelmise punkti abil järeldada Tutte'i teoreemist Halli teoreemi piisavuse osa.

Lahendus. a) Kui graafis G leidub kõiki hulga X tippe kattev kooskõla M, siis katab see paarisarvu tippe. Katmata tippe graafis H on samuti paarisarv, kusjuures nad on kõik omavahel servadega ühendatud, sest nad kõik kuuluvad hulka $V \setminus X$. Järelikult saame kooskõla M täiendada graafi H täielikuks kooskõlaks, jagades ülejäänud tipud ükskõik mil viisil paaridesse.

Vastupidi, kui graafis H leidub täielik kooskõla, siis jätame sellest ära kõik servad, mida ei leidu graafis G. Et graafile H lisatud servad ühendavad ainult hulka X mittekuuluvaid tippe, siis hulga X tippe katvad servad jäävad selles kooskõlas kõik alles.

b) Eeldame, et graafis G leidub kõiki hulga X tippe katev kooskõla. Siis punkti a) põhjal leidub graafis H täielik kooskõla. Olgu $S \subseteq V$. Tutte'i teoreemi põhjal $\mathrm{odd}(H \setminus S) \leqslant |S|$. Graafi $G \setminus S$ paaritu komponent, mis on graafi $F \setminus S$ alamgraaf, on ühtlasi graafi $H \setminus S$ paaritu komponent, sest graafile H graafiga G võrreldes lisatud servad ühendavad ainult graafist F väljapoole jäävaid tippe, seetõttu koosneb see komponent mõlemas graafis täpselt samadest tippudest. Et graafis $H \setminus S$ on paarituid komponente ülimalt $|S|$, siis ka graafis $G \setminus S$ on paarituid komponente, mis on graafi $F \setminus S$ alamgraafid, ülimalt $|S|$.

Vastupidi, olgu $S \subseteq V(H)$ suvaline hulk ning vaatleme graafi $H \setminus S$ paarituid komponente. Et graafis H on kõik hulgast X väljapoole jäävad tipud omavahel ühendatud, siis graafis $H \setminus S$ kuuluvad kõik hulgast X väljapoole jäävad tipud samasse komponenti. See võib lisaks sisaldada ka teatavat arvu hulga X tippe. Kõik ülejäänud komponendid on graafi $F \setminus S$ alamgraafid ning on ühtlasi graafi $G \setminus S$ komponendid. Järelikult eeldust kasutades $\mathrm{odd}(H \setminus S) \leqslant 1 + \mathrm{odd}(F \setminus S) \leqslant 1 + |S|$. Kui $\mathrm{odd}(F \setminus S) \leqslant |S| - 1$, siis $\mathrm{odd}(H \setminus S) \leqslant |S|$. Kui $\mathrm{odd}(F \setminus S) = |S|$, siis sõltumata $|S|$ paarsusest sisaldavad graafi $F \setminus S$ paaritud komponendid, hulk S ja graafi $F \setminus S$ paariskomponendid ühtekokku paarisarvu tippe. Et ka graafi H tippude arv on paaris, siis sisaldab graafi $H \setminus S$ viimane komponent (see, kuhu kuuluvad kõik hulgast X väljapoole jäävad tipud) paarisarvu tippe ehk ei ole paaritu komponent. Siis $\mathrm{odd}(H \setminus S) \leqslant \mathrm{odd}(F \setminus S) \leqslant |S|$. Kokkuvõttes saame, et graaf H rahuldab Tutte'i tingimust ning seal leidub täielik kooskõla. Punkti a) põhjal leidub graafis G kõiki hulga X tippe kattev kooskõla.

c) Olgu $G = (X \cup Y, E)$ kahealuseline graaf, kus iga $S \in X$ korral $|N(S)| \geqslant |S|$. Olgu $S \subseteq X \cup Y$ suvaline tippude hulk. Eemaldame hulga S tipud graafist G. Siis graafi $G \setminus S$ paaritud komponendid, mis on graafi $F \setminus S$ alamgraafid, on parajasti alusesse X jäänud isoleeritud tipud. Olgu Z nende tippude hulk. Siis ilmselt $N(Z) \subseteq S \cap Y$. Seega $|Z| \leqslant |N(Z)| \leqslant |S \cap Y| \leqslant |S|$. Punkti b) põhjal leidub graafis G kõiki hulga X tippe kattev kooskõla.

7. Nimetame graafi k-*sidusaks*, kui vähim servade arv, mille eemaldamise järel saab graaf olla mittesidus, on k. Näiteks silda sisaldav graaf on 1-sidus.

a) Tõestada, et kui G on paaris tippude arvuga $(k-1)$-sidus regulaarne graaf astmega $k \geqslant 1$, siis graafis G leidub täielik kooskõla.

b) Tõestada, et kui G on paaris tippude arvuga $(k-2)$-sidus regulaarne graaf astmega $k \geqslant 2$, siis graafis G ei tarvitse leiduda täielikku kooskõla.

Lahendus. a) Olgu $S \subseteq V(G)$ ning G_1, G_2, $\ldots$, G_n graafi $G \setminus S$ paaritutipulised sidusad komponendid. Olgu nende komponentide tippe hulga S tippudega ühendavate servade arvud vastavalt m_1, m_2, $\ldots$, m_n. Et graaf G on $(k-1)$-sidus, siis $m_i \geqslant k-1$ iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral. Teiselt poolt,

$$m_i = \sum_{v \in V(G_i)} \deg_G(v) - 2|E(G_i)|,$$

ning arvestades, et G on regulaarne astmega k,

$$m_i = k|V(G_i)| - 2|E(G_i)|.$$

Et $|V(G_i)|$ on paaritu, siis viimase võrduse parem pool on paaris k korral paaris ning paaritu k korral paaritu, st m_i paarsus on sama mis k paarsus. Järelikult ei saa olla $m_i = k-1$, vaid peab olema $m_i \geqslant k$. Regulaarsuse tõttu ühendab hulga S tippe ülejäänud graafiga ülimalt $k|S|$ serva, kusjuures iga komponendi G_i kohta vähemalt k. Seetõttu on komponente G_i mitte rohkem kui $|S|$. Järelikult on täidetud Tutte'i teoreemi tingimused ehk graafis G leidub täielik kooskõla.

b) Kui $k = 2$, siis sobib graafiks G kahe kolmeservalise tsükli ühend. Kui $k = 3$, siis graafiks G sobib Sylvesteri graaf. Olgu $k \geqslant 4$ ning $S = O_{k-2}$ täielik nullgraaf. Moodustame graafi $H = O_{k-2} \times C_{k-1}$ (st võtame täieliku nullgraafi O_{k-2} ning tsükli C_{k-1} ning ühendame esimese graafi iga tipu teise graafi iga tipuga). Selles graafis on $k-2$ tippu astmega $k-1$ ning $k-1$ tippu astmega k, kokku paaritu arv tippe. Moodustame k eksemplari sellist graafi H ning ühendame igaühes iga tipu astmega $k-1$ graafi S erineva tipu külge. Saadud graaf sobibki graafiks G. See graaf on regulaarne astmega k, samuti $(k-2)$-sidus, sest seal leidub igast tipust igasse teise tippu vähemalt $k-2$ ühiste servadeta ahelat. Graafis G ei leidu täielikku kooskõla, sest kui eemaldada hulka S kuuluvad $k-2$ tippu, siis jääb järele k paaritut komponenti.

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused.

8. Olgu G kahealuseline graaf alustega X ja Y ning olgu S_1 ja S_2 hulga X alamhulgad.

a) Tõestada, et

$$|N(S_1)| + |N(S_2)| \geqslant |N(S_1 \cup S_2)| + |N(S_1 \cap S_2)|.$$

b) Tuua näide, mille korral eelmine võrratus on range.

Lahendus. Suvaliste lõplike hulkade A ja B korral kehtib võrdus $|A|+|B| = |A \cup B| + |A \cap B|$. Võttes $A = N(S_1)$ ja $B = N(S_2)$, saame

$$|N(S_1)| + |N(S_2)| = |N(S_1) \cup N(S_2)| + |N(S_1) \cap N(S_2)|.$$

Viimase võrduse paremas pooles paneme tähele järgmist.

- $N(S_1 \cup S_2) \subseteq N(S_1) \cup N(S_2)$ (tegelikult kehtib siin isegi võrdus). Tõepoolest, kui tipp v on hulga $S_1 \cup S_2$ mingi tipu u naaber, siis u kuulub hulka S_1 või S_2 ehk tipp v on kas hulga S_1 või hulga S_2 tipu naaber. Järelikult $|N(S_1 \cup S_2)| \leqslant |N(S_1) \cup N(S_2)|$.

- $N(S_1 \cap S_2) \subseteq N(S_1) \cap N(S_2)$, sest kui tipp v on hulga $S_1 \cap S_2$ mingi tipu u naaber, siis u kuulub nii hulka S_1 kui ka hulka S_2 ehk v on nii hulga S_1 tipu naaber kui ka hulga S_2 tipu naaber. Järelikult $|N(S_1 \cap S_2)| \leqslant |N(S_1) \cap N(S_2)|$.

Nende kahe punkti põhjal

$$|N(S_1) \cup N(S_2)| + |N(S_1) \cap N(S_2)| \geqslant |N(S_1 \cup S_2)| + |N(S_1 \cap S_2)|,$$

millest koos eelneva võrdusega järeldubki vajalik võrratus.

Märkus. Vaatleme funktsiooni $f\colon X \to P(X)$, kus $f(x) = N(\{x\})$. Eelmises tõestuses esinevad kaks punkti järelduvad otse funktsioonide üldistest omadustest $f(S_1 \cup S_2) = f(S_1) \cup f(S_2)$ ning $f(S_1 \cap S_2) \subseteq f(S_1) \cap f(S_2)$.

9. Tõestada, et kui G on puu, siis on graafil G ülimalt üks täielik kooskõla.

Lahendus. Olgu n puu G tippude arv. Kui n on paaritu, siis graafil G täielikku kooskõla ei leidu. Tõestame induktsiooniga, et kui n on paaris, siis leidub graafil G täpselt üks täielik kooskõla.

Juhul $n = 2$ on puu G parajasti graaf K_2, mille puhul väide on ilmne. Eeldame, et väide kehtib kõigi puude korral, mille tippude arv on väiksem kui n, ning vaatleme n-tipulist puud G. Olgu x selle puu leht ning y tema naabertipp. Igasse puu G täielikku kooskõlasse peab kuuluma serv xy, sest vastasel korral jääks leht x kooskõlaga katmata. Järelikult on puu G täielikke kooskõlasid sama palju nagu graafi $G \setminus \{x, y\}$ täielikke kooskõlasid. Graaf $G \setminus \{x, y\}$ aga on $(n-2)$-tipuline puu, millel induktsiooni eelduse põhjal leidub täpselt üks täielik kooskõla. Järelikult ka puul G leidub täpselt üks täielik kooskõla.

Teine lahendus. Oletame, et M_1 ja M_2 on puu $G = (V, E)$ täielikud kooskõlad. Vaatleme graafi $H = (V, M_1 \,\Delta\, M_2)$. Suvalise tipuga $v \in V$ intsidentsete servade hulgas leidub serv, mis kuulub kooskõlasse M_1 ja serv, mis kuulub kooskõlasse M_2. Kui need servad on võrdsed, siis $\deg_H(v) = 0$. Kui aga need servad on erinevad, siis $\deg_H(v) = 2$. Seega on graafi H kõik tipud kas astmega 0 või astmega 2. Seejuures astmega 2 saavad olla ainult tipud, mis kuuluvad mingisse tsüklisse. Et aga H on puu G alamgraaf, siis seal tsükleid ei leidu. Järelikult ei saa H sisaldada tippe astmega 2 ehk kõik tipud on astmega 0. See aga tähendab, et $M_1 = M_2$.

10. Tõestada, et kui G on regulaarne graaf astmega 3, kus esineb täpselt üks sild, siis graafis G leidub täielik kooskõla.

Lahendus. Kui sild eemaldada, siis jaguneb graaf G kaheks sidusaks komponendiks. Kummaski komponendis on silla otstipp astmega 2, ülejäänud tipud astmega 3. Kustutame kummastki komponendist tipu astmega 2 ja ühendame nende naabrid omavahel otseservaga (sellega võib tekkida kordne serv, aga see edasist arutluskäiku ei muuda). Tulemuseks saame graafi, mille iga tipu aste on 3. Et esialgses graafis esines täpselt üks sild, siis saadud graafis pole ühtegi silda. Selles graafis leidub täielik kooskõla loengus tõestatud järelduse põhjal (võib kasutada ka ülesande 7 a)-osa kummagi komponendi kohta, võttes seal $k = 3$). Lisades sellele kooskõlale esialgse graafi silla, saame täieliku kooskõla graafis G.