Diskreetne matemaatika 2012

7. praktikum

Reimo Palm

Praktikumiülesanded

1. Leida $\chi'(G)$, kui G on

a) n-tipuline ahel;

b) n-tipuline tsükkel;

c) Peterseni graaf;

d) puu.

2. a) Leida vähima tippude arvuga graaf G, mille korral $\chi'(G) > \Delta(G)$.

b) Leida vähima tippude arvuga graaf G, mis pole paaritu tsükkel ja mille korral $\chi'(G) > \Delta(G)$.

3. Tõestada, et kui G on 3-regulaarne Hamiltoni graaf, siis $\chi'(G) = 3$.

4. Sidusat graafi G nimetatakse χ'-*kriitiliseks*, kui $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ ning suvalise serva eemaldamisel graafi kromaatiline arv väheneb.

a) Leida 5-tipuline χ'-kriitiline graaf G, mille korral $\Delta(G) = 3$.

b) Tõestada, et ei leidu 4- ega 6-tipulist χ'-kriitilist graafi G, mille korral $\Delta(G) = 3$.

5. a) Tõestada, et kui G on Euleri graaf, mis pole paaritu tsükkel, siis graafi G servad saab värvida kahe värviga nii, et igas tipus on esindatud mõlemad värvid.

b) Tõestada, et kui G ei ole Euleri graaf, aga on sidus, siis graafi G servad saab värvida kahe värviga nii, et igas tipus, mille aste on vähemalt 2, on esindatud mõlemad värvid.

6. a) Tõestada, et kui G lihtgraaf, milles $|V(G)| = 2n + 1$ ja $|E(G)| > n\Delta(G)$, siis $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

b) Punkti a) kasutades tõestada, et kui graaf G on saadud paaris tippude arvuga regulaarsest lihtgraafist ühe serva uue tipuga tükeldamisel, siis $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

c) Punkti a) kasutades tõestada, et kui graaf G on saadud paaritu tippude arvuga k-regulaarsest lihtgraafist vähem kui $k/2$ serva kustutamisel, siis $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

7. Lihtgraafide G ja H korrutis on teatavasti lihtgraaf $G \times H$ tippude hulgaga $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ ning servade hulgaga $E(G \times H) = \{\{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\}\colon u_1 = u_2,\ \{v_1, v_2\} \in E(G)$ või $v_1 = v_2,\ \{u_1, u_2\} \in E(G)\}$.

a) Kasutades Vizingi teoreemi, tõestada, et $\chi'(G \times K_2) = \Delta(G \times K_2)$.

b) Tõestada, et kui H on mittetriviaalne ja $\chi'(H) = \Delta(H)$, siis $\chi'(G \times H) = \Delta(G \times H)$.

8. *Kempe argument.* Tõestustes, mis puudutavad graafi servade värvimist, kasutatakse sageli järgmist mõttekäiku. Olgu G graaf, mille servad on värvitud korrektselt vähemalt kahe värviga, olgu i ja j mingid kaks värvi nende hulgast. Vaatleme graafi G alamgraafi $H(i, j)$, mis on indutseeritud neid kahte värvi servade poolt. Olgu K alamgraafi $H(i, j)$ suvaline sidus komponent.

a) Tõestada, et K on ahel (lahtine või kinnine).

b) Tõestada, et K servad on vaheldumisi värvi i ja värvi j.

c) Tõestada, et kui graafis G vahetada komponenti K kuuluvate servade värvid omavahel ning ülejäänud servade värvid jätta samaks, siis tulemuseks on uus G korrektne värvimine samade värvidega.

Sellist servade ümbervärvimise viisi nimetatakse Kempe argumendiks.

9. Vaatleme teoreemi „Kui G on kahealuseline graaf, siis $\chi'(G) = \Delta(G)$“. Seda teoreemi on lihtne tõestada ka ilma kooskõlade teooriat kasutamata, induktsiooniga graafi G servade arvu järgi.

a) Formuleerida ja tõestada induktsiooni baas.

b) Eeldame, et väide kehtib graafist G väiksema servade arvuga, kuid sama tippude arvuga graafide korral. Eemaldame graafist G ühe serva $e = uv$. Tõestada, et graafi $G \setminus e$ servad saab värvida $\Delta(G)$ värviga nii, et sama tipuga intsidentsed servad on alati eri värvi.

c) Tõestada, et nende $\Delta(G)$ värvi seas leiduvad värvid c ja d nii, et värvitud graafis $G \setminus e$ ei esine värvi c tipu u juures ega värvi d tipu v juures.

d) Olgu P tipust u algav maksimaalse pikkusega ahel, mis koosneb ainult värvi c või värvi d servadest. Tõestada, et see ahel ei sisalda tippu v ega naase tippu u.

e) Vahetame ahelal P värvid c ja d. Tõestada graafi $G \setminus e$ servade värvimine jääb korrektseks.

f) Tõestada, et graafis G saab serva e värvida nii, et tulemuseks on graafi G korrektne värvimine $\Delta(G)$ värviga.

10. Olgu G regulaarne graaf astmega 3 (nn *kuupgraaf*), millel leidub täpselt üks korrektne servade värvimine $\chi'(G)$ värviga (värvide permutatsiooni täpsusega).

a) Tõestada, et $\chi'(G) = 3$.

b) Tõestada, et graafis G leidub 3 Hamiltoni tsüklit.

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused.

11. Leida $\chi'(K_n)$.

12. Olgu G lihtgraaf, mille tippude arv n on paaris, ning $\overline{G}$ tema täiend (samuti lihtgraaf).

a) Tõestada, et $\chi'(G) + \chi'(\overline{G}) \geqslant n - 1$. Tuua näide graafist G, mille puhul kehtib võrdus.

b) Tõestada, et $\chi'(G)+\chi'(\overline{G}) \leqslant 2(n-1)$. Tuua näide graafist G, mille puhul kehtib võrdus.

13. Tõestada vahetu arutlusega, et kui G on paaritu tippude arvuga mittetühi regulaarne lihtgraaf, siis $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

14. Olgu G sidus graaf, mis pole paaritu lihttsükkel. Tõestada, et kui graafi G kõigi tsüklite pikkused on sama paarsusega, siis $\chi'(G) = \Delta(G)$.