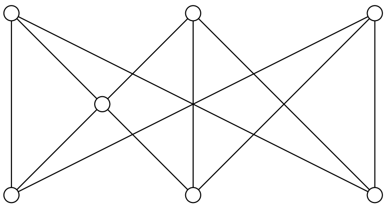
Diskreetne matemaatika 2012

8. praktikum

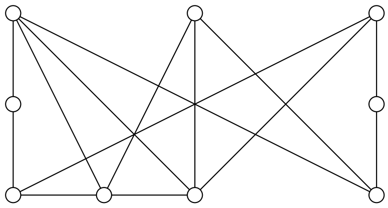
Reimo Palm

Praktikumiülesanded

1. Kas järgmised graafid on tasandilised?



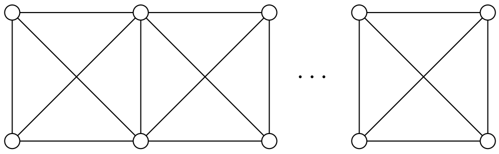
a)



b)

2. a) Leida kõik naturaalarvud n, mille korral n-mõõtmeline kuup Q_n on tasandiline.

b) Leida kõik naturaalarvud n, mille korral $2n$-tipuline graaf



on tasandiline.

c) Leida kõik naturaalarvud n, mille korral tsükli C_n täiend $\overline{C}_n$ on tasandiline.

3. Olgu G mingi 24-tipuline 3-regulaarne tasandiline graaf. Leida graafi G tasandilise esituse tahkude arv.

4. Graafi G *siseümbermõõduks* $\gamma(G)$ nimetatakse selle graafi kõige lühema tsükli pikkust. Tõestada, et kui G on n tipu ja m servaga sidus tasandiline lihtgraaf, mille korral $\gamma(G) \geqslant 3$, siis

$$m \leqslant \frac{\gamma(G)}{\gamma(G)-2}(n-2).$$

5. Tõestada, et

a) Peterseni graaf (joonis 1) ei ole tasandiline;

b) Peterseni graafist ükskõik millise serva kustutamisel saadud graaf ei ole tasandiline.

6. Tasandilist graafi, mille iga tahk (sh välimine) on kolmnurk, nimetatakse *triangulatsiooniks*. Tõestada, et iga triangulatsioon G sisaldab kahealuselist alamgraafi, millel on $2E(G)/3$ tippu.

7. Leida $\chi(G)$, kui G on

a) Peterseni graaf (joonis 1);

b) Grötzschi graaf (joonis 2).

8. Brooksi teoreemi sõnastatakse erinevates allikates tihti erineval kujul. Näiteks:

a) kui graafis G on tippude maksimaalne aste ülimalt d, kus $d \geqslant 3$, ja G ei sisalda $(d+1)$-tipulist klikki, siis $\chi(G) \leqslant d$;

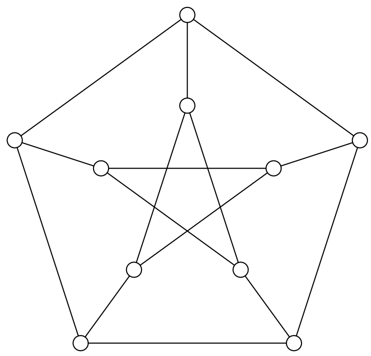
b) sidusas graafis G kehtib $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ parajasti siis, kui G on kas paaritu tsükkel või täisgraaf.

Tõestada, et need kaks kuju on omavahel samaväärsed.

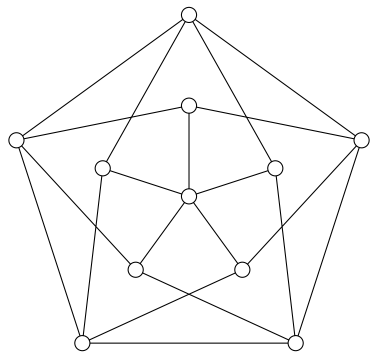
9. Tõestada, et kui lihtgraafil G on n tippu ja m serva, siis

$$\chi(G) \geqslant \frac{n^2}{n^2 - 2m}.$$

10. Olgu G lihtgraaf, $\overline{G}$ tema täiend ja n kummagi graafi tippude arv. Tõestada, et $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + 1$.



Joonis 1. Peterseni graaf



Joonis 2. Grötzschi graaf

11. Tõestada, et kui $\chi(G) = k$, siis graafis G leidub vähemalt k tippu astmega vähemalt $k-1$.

12. Graafi G nimetatakse *k-kriitiliseks*, kui $\chi(G) = k$, aga graafi G iga pärisalamgraafi H korral $\chi(H) < k$.

a) Kirjeldada kõik 2-kriitilised graafid.

b) Kirjeldada kõik 3-kriitilised graafid.

13. Tõestada, et kui G on k-kriitiline, kus $k \geqslant 2$, siis

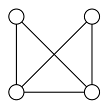
a) G on sidus;

b) G iga tipu aste on vähemalt $k-1$.

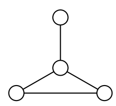
14. Tõestada, et

$$\chi(G) \leqslant 1 + \max_{H \subseteq G} \min_{v \in V(H)} \deg_H(v).$$

15. Leida graafi kromaatiline polünoom. Leida, mitmel erineval viisil saab graafi tipud värvida 3 värviga.



a)



b)

16. Tõestada, et kui graafis G leidub sild e, siis $P_{G/e}(k) = \frac{1}{k} P_{G-e}(k)$.

17. a) Tõestada, et kui lihtgraafis G on n tippu ja m serva, siis tema kromaatilise polünoomi liikme k^{n-1} kordaja on $-m$.

b) Järeldada sellest, et ei leidu graafi, mille kromaatiline polünoom on $k^4 - 3k^3 + 3k^2$.

Koduülesanded

Valida järgmistest ülesannetest (vähemalt) kaks ja esitada nende lahendused.

18. Tõestada, et kui G on n-tipuline tsükkel C_n, siis $P_G(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.

19. Näitusesaali piirjooneks on n-nurkne hulknurk, mis võib olla mittekumer, aga mille küljed üksteist ei lõika.

a) Tõestada, et kui tõmmata hulknurga tippude vahele diagonaalid, mis jaotavad hulknurga sisepiirkonna kolmnurkadeks, siis tekib graaf, mille tipud saab korrektselt värvida 3 värviga.

b) Tõestada, et näitusesaali nurkadesse saab paigutada ülimalt $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ valvurit nii, et nende vaateväljad üheskoos katavad kogu näitusesaali.

20. Moodustame graafist G uue graafi H järgmise konstruktsiooniga. Olgu $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Lisame graafile $n+1$ uut tippu u ja u_1, u_2, $\ldots$, u_n ning ühendame tipu u iga tipuga u_i ning iga tipu u_i tipu v_i kõigi naabritega ($i = 1, 2, \ldots, n$). Graafi nimetatakse *kolmnurgavabaks*, kui ta ei sisalda alamgraafi, mis on isomorfne graafiga K_3. Olgu G kolmnurgavaba graaf, mille korral $\chi(G) = k$.

a) Tõestada, et graaf H on kolmnurgavaba.

b) Tõestada, et $\chi(H) = k + 1$.

Sellest järeldub, et leidub kui tahes suure kromaatilise arvuga kolmnurgavabasid graafe.

21. Tõestada, et iga kahealuseline tasandiline lihtgraaf, mis on regulaarne astmega 3, sisaldab alamgraafina tsüklit C_4.