Diskreetne matemaatika 2012

9. praktikum

Reimo Palm

Praktikumiülesanded

Järgmisi ülesandeid tasub püüda lahendada kõigepealt ilma näidislahendusi vaatamata.

1. Olgu G sidus graaf, mille maksimaalne tipuaste on 2. Tõestada, et G on kas lihtahel või lihttsükkel.

Lahendus. Vaatleme graafis G maksimaalse pikkusega ahelat. Selle ühelgi sisetipul ei ole muid naabreid, sest muidu oleks tipu aste vähemalt 3. Kui selle maksimaalse ahela kummalgi otstipul ei ole naabreid, siis on G ise lihtahel. Kui aga selle ahela mingil otstipul on naaber, siis ei saa otstipust lähtuv serv minna ahela sisetippu, sest see oleks siis astmega vähemalt 3. Ainukese võimalusena saab see serv minna ahela teise otstippu. Siis aga G on lihttsükkel.

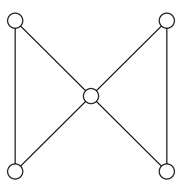
2. Teha kindlaks, kas leidub Euleri graaf, mille

a) tippude arv on paaritu ja servade arv paaris;

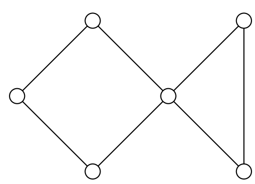
b) tippude arv on paaris ja servade arv paaritu.

Kui selline graaf leidub, siis joonistada see. Kui graafi ei leidu, siis põhjendada.

Lahendus. Mõlemad graafid leiduvad. Joonisel 1 kujutatud graafil on 5 tippu ja 6 serva, joonisel 2 kujutatud graafil aga 6 tippu ja 7 serva.



Joonis 1.



Joonis 2.

3. a) Tõestada, et paaritu tippude arvuga Euleri graafis leidub kolm sama astmega tippu.

b) Tõestada, et iga paaritu $n \geqslant 3$ korral leidub n-tipuline Euleri graaf, milles on täpselt kolm tippu sama astmega ja ülimalt kaks tippu iga ülejäänud astmega.

Lahendus. a) Olgu $2k+1$ graafi tippude arv. Et Euleri graaf on sidus ja seal on iga tipu aste paaris, siis antud graafi tipuastmed saavad olla ainult arvud $2,\ 4,\ \ldots,\ 2k$. Seega on $2k+1$ tipu astmeteks ühtekokku k erinevat varianti. Järelikult esineb mingi nendest arvudest tippude astmete seas rohkem kui 2 korda.

b) Kui $n = 3$, siis graafiks sobib K_3, selle graafi tippude astmed on 2, 2, 2. Kui $n = 5$, siis graafiks sobib graaf, mis on saadud graafist K_5 kolme tsüklit moodustava serva eemaldamisel; selle graafi tippude astmed on 4, 4, 2, 2, 2. Olgu nüüd G mingi ülesande tingimusi rahuldav n-tipuline graaf. Lisame graafile G kõigepealt kaks isoleeritud tippu ning seejärel veel kaks tippu, millest kummagi ühendame graafi kõigi ülejäänud tippudega (sh eelnevalt lisatud isoleeritud tippudega). Tekib $(n+4)$-tipuline graaf. Seni graafis G olnud tippude aste on nüüd suurenenud 2 võrra, nende astmete seas on ikka täpselt kolm võrdset, seejuures on maksimaalne aste $n+1$ ja minimaalne 4. Uutest tippudest on kahe tipu aste maksimaalne ehk $n+3$ ning kahe tipu aste minimaalne ehk 2. Graaf on sidus, sest iga tipp on ühendatud maksimaalse astmega tipuga, ning seal leidub Euleri tsükkel, sest iga tipu aste on paarisarv. Järelikult rahuldab ka saadud graaf ülesande tingimusi. Lähtudes graafidest $n = 3$ ja $n = 5$ korral saame sellise konstruktsiooniga ükskõik millise paaritu tippude arvuga sobiva graafi.

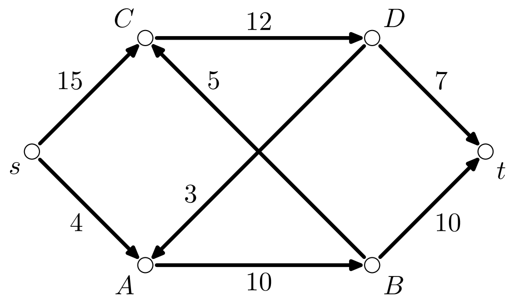
4. Tõestada, et kui $G = (X \cup Y, E)$ on kahealuseline Hamiltoni graaf, siis $|X| = |Y|$.

Lahendus. Vaatleme selles graafis suvalist Hamiltoni tsüklit. Et kahealuselises graafis on servad ainult erinevate aluste vahel, siis paiknevad sellel tsüklil aluse X ja aluse Y tipud vaheldumisi. Järelikult on sellel tsüklil aluse X tippe samapalju kui aluse Y tippe. Et see tsükkel haarab kõik graaf tipud, siis $|X| = |Y|$.

5. Tõestada, et n-mõõtmeline kuup Q_n on Hamiltoni graaf iga $n \geqslant 2$ korral.

Lahendus. Graaf Q_2 on ilmselt Hamiltoni graaf. Eeldame, et Q_{n-1} on Hamiltoni graaf, ning vaatleme graafi Q_n. Selle graafi tipud kujul $(0, a)$, kus a on suvaline $(n-1)$-kohaline kahendarv, indutseerivad alamgraafi, mis on isomorfne graafiga Q_{n-1}. Leiame selles alamgraafis Hamiltoni tsükli. Graafi Q_n ülejäänud tipud ülejäänud tipud, mis on kujul $(1, a)$, moodustavad samuti graafiga Q_{n-1} isomorfse alamgraafi. Eelnevas leitud Hamiltoni tsükkel, kus igas tipus on esimene arv 0 muudetud arvuks 1, moodustab Hamiltoni tsükli teises alamgraafis Q_{n-1}. Vaatleme nüüd esimeses Hamiltoni tsüklis mingit serva $(0,x)$–$(0,y)$ ning teises Hamiltoni tsüklis vastavat serva $(1,x)$–$(1,y)$, kus x ja y on mingid $(n-1)$-kohalised kahendarvud. Kui need servad tsüklitest ära jätta ja asendada nad servadega $(0,x)$–$(1,x)$ ja $(0,y)$–$(1,y)$, siis saame Hamiltoni tsükli graafis Q_n. Tõepoolest, alustades tipust $(0,x)$, saame mööda esimese alamgraafi Hamiltoni tsükli servi liikudes saame läbida kõik esimese alamgraafi Q_{n-1} tipud, siis liikuda mööda serva $(0,y)$–$(1,y)$ teise alamgraafi Q_{n-1} ning läbida teise alamgraafi Hamiltoni tsüklit mööda kõik teise alamgraafi servad, jõudes tippu $(1,x)$ ja sealt tagasi tippu $(0,x)$.

6. Leida maksimaalne voog võrgus

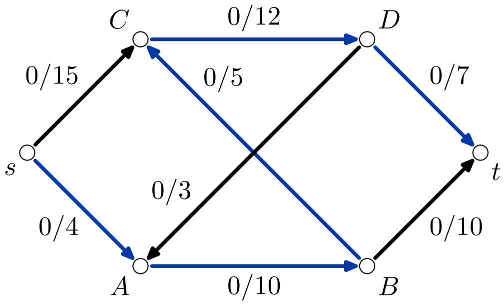


Lahendus. Kasutame Ford-Fulkersoni algoritmi. Lähtume nullvoost joonisel 3 ja leiame suurendava ahela $s \to C \to A \to B \to t$, kus $\varepsilon = 4$. Tulemus on kujutatud joonisel 4. Seal leiame suurendava ahela $s \to A \to B \to C \to D \to t$, kus $\varepsilon = 3$. Saame voo joonisel 5. Edasi leiame suurendava ahela $s \to A \to B \to t$, mille korral $\varepsilon = 3$, ning saame voo joonisel 6. Suunatud suurendavat ahelat enam ei leidu, küll aga leidub suunamata suurendav ahel $s \to A \leftarrow D \to t$, kus $\varepsilon = 4$, saame voo joonisel 7. See voog väärtusega 14 on maksimaalne, sest võrgus leidub lõige väärtusega 14, see on kujutatud joonisel 8.

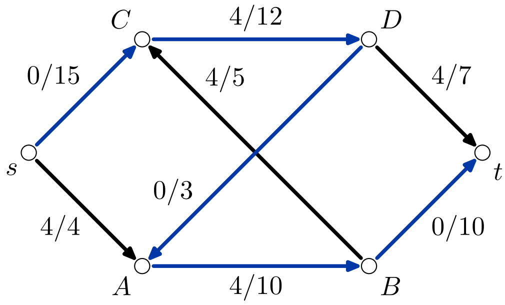
7. Iga $k > 1$ korral leida sidus k-regulaarne graaf, milles puudub täielik kooskõla.

Lahendus. Kui k on paarisarv, siis selleks graafiks sobib K_{k+1}. See graaf on regulaarne astmega k ning temas puudub täielik kooskõla, sest tal on paaritu arv tippe.

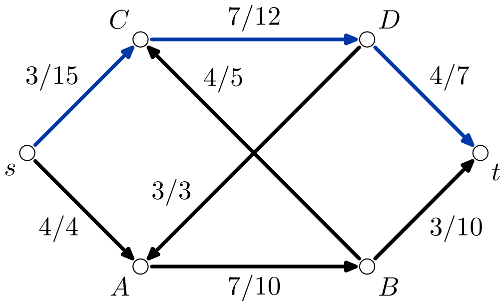
Eeldame nüüd, et k on paaritu arv. Vaatleme graafi K_{k+2}. Selles on $k+2$ tippu astmega $k+1$. Valime graafis K_{k+2} välja ühe tipu ning eemaldame kaks sellest lähtuvat serva. Tipud, mis ei ole väljavalitud tipp ega kummagi serva otstipud, jaotame paaridesse ning eemaldame kõik paari liikmeid ühendavad servad. Tekib graaf, kus $k+1$ tippu on astmega k ning üks tipp astmega $k-1$.



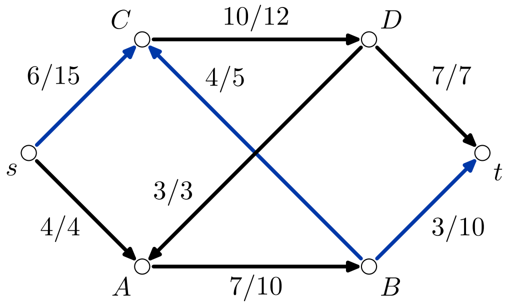
Joonis 3.



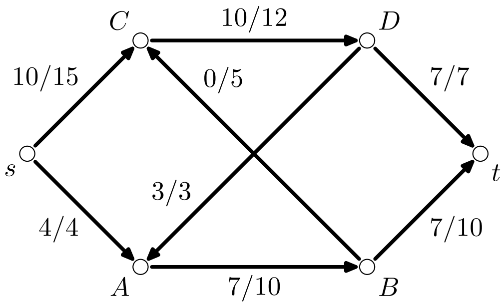
Joonis 4.



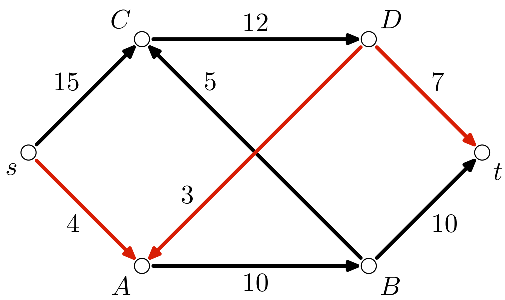
Joonis 5.



Joonis 6.



Joonis 7.



Joonis 8.

Nüüd võtame ühe uue tipu v, kust lähtub k serva, ja k eksemplari eelkonstrueeritud graafi. Ühendame iga tipust v lähtuva serva ühe eksemplari selle tipu külge, mille aste on $k-1$. Sellega tekib graaf, kus kõikide tippude aste on k. Tekkinud graafis ei leidu täielikku kooskõla, sest ühe tipu v eemaldamisel tekib k ehk rohkem kui üks sidusat komponenti, millest igaühe tippude arv $k+2$ on paaritu. See on vastuolus Tutte'i teoreemiga.

Teine võimalus näha, et tekkinud graafis ei leidu täielikku kooskõla, on panna tähele, et kui tipp v on kooskõla serva otstipp, siis igaüks tema ülejäänud $k-1$ naabrist kuuluvad ühte paaritu tippude arvuga komponenti, mida ei ole võimalik katta täieliku kooskõlaga.

8. Olgu k suvaline positiivne täisarv. Tõestada, et kui G on k-regulaarne kahealuseline graaf, siis graafi G servade hulga $E(G)$ saab esitada paarikaupa lõikumatute hulkade ühendina $E(G) = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$, kus iga M_i on graafi G täielik kooskõla.

Lahendus. Kursuses on tõestatud (vt „Graafid“, lk 56, järeldus 7.3), et kahealuselises graafis, mis ei ole nullgraaf, leidub täielik kooskõla. Leiame ühe täieliku kooskõla graafis G. Loeme selle kooskõla servad hulgaks M_1 ning eemaldame need servad graafist. Et kooskõla on täielik, siis väheneb graafi G iga tipu aste 1 võrra. Tulemuseks on regulaarne graaf astmega $k-1$. Kui $k-1>0$, siis kordame eelnevat ja leiame servade hulga M_2 jne. Igal sammul väheneb iga tipu aste 1 võrra, seega tekib lõpuks kokku k sellist servade hulka, mis on kõik omavahel lõikumatud.

9. a) Tõestada, et kui G on kahealuseline, siis ta on mingi $\Delta(G)$-regulaarse kahealuselise graafi alamgraaf.

b) Kasutades punkti a) ja ülesannet 8, tõestada, et kui G on kahealuseline, siis $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Lahendus. a) Olgu G kahealuseline graaf alustega X ja Y. Kui $|X| \neq |Y|$, siis lisame väiksemasse alusesse juurde nii palju isoleeritud tippe, et oleks $|X| = |Y|$. Et kummagi aluse tipuastmete summa võrdub graafi servade arvuga, siis on ainult kaks võimalust: kas kummaski aluses on iga tipu aste $\Delta(G)$ või kummaski aluses leidub tipp, mille aste on väiksem kui $\Delta(G)$. Esimesel juhul on G ise $\Delta(G)$-regulaarne kahealuseline graaf. Teisel juhul valime kummastki alusest ühe tipu, mille aste on väiksem kui $\Delta(G)$, ja lisame nende vahele serva. Saadud graafis on jällegi kaks eelnimetatud võimalust. Vajadusel ühekaupa servi lisades jõuame lõpuks graafini, kus iga tipu aste on $\Delta(G)$. Saadud graaf on kahealuseline ja sisaldab alamgraafina graafi G.

b) Ülesande 8 põhjal saab punktis a) konstrueeritud graafi servade hulga tükeldada $\Delta(G)$ lõikumatuks täielikuks kooskõlaks. Kui värvida ühte kooskõlasse kuuluvad servad alati ühte värvi (ja erinevate kooskõlade servad erinevat värvi), siis saame graafi servade korrektse värvimise $\Delta(G)$ värviga. Et G on konstrueeritud graafi alamgraaf, siis annab see värvimine ka G servade korrektse värvimise $\Delta(G)$ värviga. Seejuures tuleb G värvimiseks kasutada kindlasti samuti $\Delta(G)$ värvi, mitte vähem, sest graafis G leidub tipp, mille aste on $\Delta(G)$.

Märkus. Käesolev ülesanne ja ülesanne 8 kokku on sama mis teoreem 8.1 õpikus „Graafid" lk 66.

Küsimus. Kas punkti a) väide kehtib ka lihtgraafide puhul, st iga kahealuseline lihtgraaf G on mingi $\Delta(G)$-regulaarse kahealuselise lihtgraafi alamgraaf?

10. Olgu G tasandiline lihtgraaf.

a) Tõestada, et G minimaalne tipuaste ei ole suurem kui 5.

b) Tõestada, et kui G tippude arv on väiksem kui 12, siis G minimaalne tipuaste ei ole suurem kui 4.

c) Tõestada, et kui G servade arv on väiksem kui 30, siis G minimaalne tipuaste ei ole suurem kui 4.

Lahendus. Olgu n ja m vastavalt graafi G tippude ja servade arv ning S graafi G tipuastmete summa.

a) Et $S = 2m$ ja $m \leqslant 3n - 6$, siis $S \leqslant 6n - 12$. Järelkult leidub graafis tipp, mille aste on ülimalt 5, sest kui iga tipu aste oleks vähemalt 6, siis oleks tipuastmete summa S vähemalt $6n$.

b) Kui iga tipu aste oleks vähemalt 5, siis oleks $S \geqslant 5n$. Teiselt poolt punkti a) põhjal $S \leqslant 6n - 12$. Järelikult $5n \leqslant 6n - 12$, millest $n \geqslant 12$. Seega kui $n < 12$, siis leidub tipp, mille aste on väiksem kui 5.

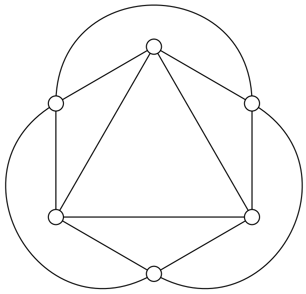
c) Kui iga tipu aste oleks vähemalt 5, siis oleks $S \geqslant 5n$. Teiselt poolt $S = 2m < 60$. Järelikult $5n < 60$, millest $n < 12$. Ülesande väide järeldub nüüd punktist b).

11. Leida kõik tasandilised regulaarsed graafid astmega 4, mis ühe serva lisamisel muutuvad mittetasandiliseks.

Lahendus. Kõigepealt, graaf peab olema sidus, sest kahe sidusa komponendi vahele serva lisamine ei muuda tasandilist graafi mittetasandiliseks.

Olgu n, m ja t vastavalt graafi G tippude, servade ja tahkude arv. Et graaf on regulaarne astmega 4, siis tema tipuastmete summa ehk kahekordne servade arv on $4n = 2m$, millest $m = 2n$.

Tasandilises graafis, mis ühe serva lisamisel muutub mittetasandiliseks, on kõik tahud kolmnurksed, sest vastasel korral saaksime serva lisada mingi tahu diagonaalina. Et iga serv kuulub kahele tahule, siis $3t = 2m$, millest $t = \frac{2}{3}m = \frac{4}{3}n$.



Joonis 9.

Asetades need väärtused Euleri valemisse $n - m + t = 2$, saame $n - 2n + \frac{4}{3}n = 2$, millest $n = 6$. Järelikult on tegemist 6-tipulise graafiga, mille iga tipu aste on 4. Selle graafi täiend on 6-tipuline graaf, mille iga tipu aste on 1. Niisuguseid graafe on ainult üks: ta koosneb kolmest sidusast komponendist K_2. Ainuke ülesande tingimustele vastav graaf on selle graafi täiend (joonis 9). Niisugune graaf rahuldab tõepoolest ülesande tingimusi, sest ta on tasandiline, aga kui üks serv lisada, siis tekib graaf, millel on 6 tippu ja 13 serva, sel juhul aga võrratus $13 \leqslant 3 \cdot 6 - 6$ ei kehti.

12. Tõestada, et kui G on sidus graaf, mille servade arv ei ületa tippude arvu, siis $\chi(G) \leqslant 3$.

Lahendus. Olgu n graafi G tippude arv ja m servade arv. Ülesande tingimuste põhjal $m \leqslant n$. Teiselt poolt, et G on sidus, siis $m \geqslant n - 1$.

Kui $m = n - 1$, siis arvestades, et G on ka sidus, saame, et G on puu. Puu tipud saab värvida kahe värviga: vastavalt sellele, kas tipu kaugus mingist fikseeritud tipust (juurest) on paaris või paaritu.

Kui $m = n$, siis esineb graafis tsükkel. Rohkem tsükleid graafis ei ole, sest kui tsüklist serv eemaldada, siis jääb järele sidus graaf, kus $m = n - 1$, ehk puu. Tsükli tipud saab värvida 2 või 3 värviga sõltuvalt sellest, kas tsüklis on paarisarv või paaritu arv tippe. Kui nüüd kõik tsükli servad graafist eemaldada, siis jääb kogum sidusaid tsükliteta graafe. Igaühes nendest on tipud värvitavad 2 värviga, seejuures ainult tsüklile kuuluva tipu värv on fikseeritud.

Kokkuvõttes piisab graafi G tippude värvimiseks igal juhul ülimalt 3 värvist.