Artikkel ilmus 2005. a sarja „Abiks õpetajale“ artiklikogumikus “Loodusainete õpetamisest koolis. II osa“

MÕÕTEMÄÄRAMATUSE HINDAMINE

Toomas Plank

Sissejuhatus

Füüsikalisi katseid tehes puutume sageli kokku olukordadega, kus peame mõõtma füüsikalisi suurusi. Mõõtmise tulemusena saame seda füüsikalist suurust iseloomustava arvulise väärtuse, mis näitab mitu korda on mõõdetav suurus suurem ühikuks valitud samanimelisest suurusest.

Mõõtmiste puhul tuleb vahet teha reaalsete suuruste ja ideaalmõistete vahel. Reaalse katse tulemusena ei suuda me kindlaks teha **mõõdetava suuruse tõelist väärtust**[1], saame anda ainult hinnangu mõõdetava suuruse väärtuse kohta – **mõõteväärtuse** või **mõõdise**[2]. Iga järgmise katse puhul võib uus mõõdis eelmisest veidi erineda. Mõõtetulemus miinus mõõdetava suuruse tõeline väärtus on **mõõteviga**. Ka mõõteviga on ideaalmõiste, mida me reaalses katses täpselt kindlaks määrata ei saa, sest mõõdetava suuruse tõeline väärtus on meil teadmata. Saame anda ainult tõenäosusliku hinnangu väärtuste vahemiku kohta, milles asub mõõdetava suuruse tõeline väärtus soovitud (nõutud) tõenäosusega. Selle väärtuste vahemiku ulatust iseloomustab **mõõtemääramatus.**

Sagedaseks eksiarvamuseks on, et mõõtmiste puhul piisab ainult mõõteväärtusest ja määramatuse hindamine ei ole vajalik. Mõõtmisteooria mõttes pole aga mõõtetulemus ilma mõõtmise täpsust (kvaliteeti) iseloomustavate andmeteta piisavalt informatiivne, ja sageli osutub isegi eksitavaks. Näiteks, kui mõõteväärtus on antud arvutuse tulemusena 9 kümnendkohaga, siis mõõtemääramatust teadmata on sellise katse tulemust võimatu põhjendatult (mõõtmisteooria mõttes) ümardada.

Järgnevalt vaatleme, kuidas mõõtemääramatust hinnata ja millisel kujul, lähtudes kehtivast standardist, tuleks esitada mõõtetulemus.

Mõõtemääramatuse alaliigid

Mõõtemääramatuse puhul käsitatakse selle komponente eraldi, nimetades neid **A-tüüpi määramatuseks** ja **B-tüüpi määramatuseks**. A-tüüpi määramatus leitakse kordusmõõtmiste tulemustest statistiliste meetoditega. B-tüüpi määramatus saadakse muudest allikatest pärineva info põhjal, kasutades, näiteks, mõõteriista tootja poolt antud mõõteriista täpsuse hinnangut. Põhimõttelist vahet nendel kahel määramatuse komponendil ei ole – mõlemad määramatused on saadud statistiliste uuringute põhjal. Vahe seisneb ainult määramatuse hindamise viisis.

Mõõdise eksperimentaalne standardhälve ja A-tüüpi määramatus

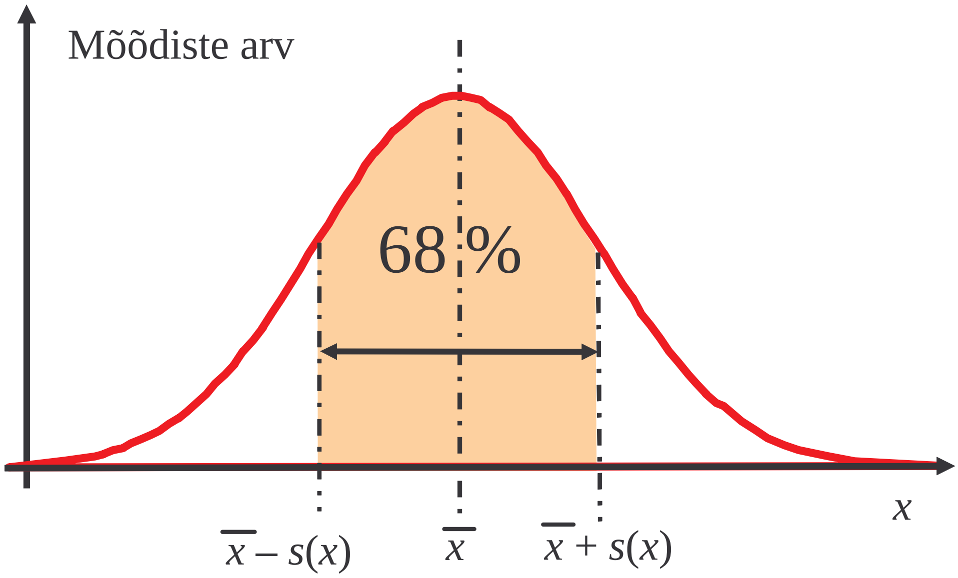
Kui oleme mõõtnud *n* mõõdist (joonis 1), siis tekib küsimus – millist nendest valida lõppvastuseks? Üheks võimaluseks oleks arvutada mõõdistest keskmine (tavaliselt aritmeetiline keskmine) ja esitada see lõppvastusena. Aritmeetilise keskmise $\overline{x}$ võib leida valemist

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

kus x_i tähistab *i*-ndat mõõdist ja *n* on katsete arv.

[1] Mõõdetava suuruse tõeline väärtus x_t on väärtus mis on kooskõlas selle suuruse definitsiooniga.

[2] Mõõdise all mõistetakse üksikmõõtmise või –vaatluse töötlemata tulemust. Kui mõõdisele lisatakse parand või leitakse mõõdiste aritmeetiline keskmine, siis saadakse juba mõõteväärtus.



Joonis 1. Mõõdiste jaotumine keskväärtuse ümber normaaljaotuse korral. Vahemikku [$\bar{x}$ – $s(x)$, $\bar{x}$ + $s(x)$] jääb 68% mõõdistest.

Mõõdiste hajumist keskväärtuse ümber (vt joonis 1) iseloomustab **mõõdise eksperimentaalne standardhälve**. Selle saame arvutada valemist

$$s(x)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}\,. \tag{1}$$

Kui esitame mõõtmiste lõpptulemusena mõõdiste aritmeetilise keskmise, siis peame ka määramatuse hinnangu leidma just aritmeetilise keskmise jaoks. Selle hinnanguna võime kasutada aritmeetilise keskmise eksperimentaalset standardhälvet, mille saame arvutada valemist:

$$u_A(\bar{x})=s(\bar{x})=\frac{s(x)}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}\,. \tag{2}$$

Määramatuse tähistame tähega u, mille taga sulgudes näitame ära mis suuruse määramatusega on tegemist. Alaindeksiga märgime ära määramatuse tüübi. **Aritmeetilise keskmise A-tüüpi määramatuse** tähistame seega $u_A(\bar{x})$.

Toodud valemitest (1) ja (2) on näha, et mõõdise eksperimentaalne standardhälve ei sõltu tehtud katsete arvust,sest katsete arvu suurendamisel kasvavad nii murru lugeja kui ka nimetaja. Aritmeetilise keskmise eksperimentaalne standardhälve kahaneb võrdeliselt ruutjuurega katsete arvust – **seega saame katsete arvu suurendades aritmeetilise keskmise A-tüüpi määramatust vähendada!**

Paljudes arvutiprogrammides on mõõdise eksperimentaalse standardhälbe arvutamiseks juba valem olemas. Näiteks Excel ja OpenOffice arvutavad selle kasutades funktsiooni STDEV (katseandmed), aga MathCAD – funktsiooni Stdev (katseandmed). Aritmeetilise keskmise A-tüüpi määramatuse jaoks valmisvalemit ei ole, nii tuleb selle arvutamiseks mõõdise eksperimentaalne standardhälve läbi jagada ruutjuurega katsete arvust.

B-tüüpi määramatus

B-tüüpi määramatus leitakse mõõteriista tootja poolt antud mõõteriista täpsuse hinnangut kasutades. Mõõteriista täpsus võib olla esitatud absoluutvea, suhtvea või taandvea kujul või arvutusvalemina.

Absoluutviga Δ_x on mõõteriista maksimaalne viga normaaltingimustel[3].

Suhtvea δ_x saame absoluutvea läbijagamisel mõõdetava suurusega: $\delta_x = \Delta_x / x$.

Taandvea γ_x saame absoluutvea läbijagamisel mõõteriista skaala ulatuse X_{skaala} või mõõtediapasooniga: $\gamma_x = \Delta_x / X_{skaala}$.

Suhtviga ja taandviga esitatakse alati protsentides, absoluutviga on aga samades mõõtühikutes mis mõõdetav suuruski. Enamuse osutmõõteriistade täpsus on esitatud taandveana. Kui suhtviga või taandviga on kantud seadme skaalale, siis seal protsendimärki ei kirjutata. Sellele vaatamata tuleb seda arvu käsitleda protsendina! Seadme skaalale kantud suhtveale joonistatakse ümber ring (joonis 2a), taandveale ringi ümber ei joonistata (joonis 2b).

Joonis 2. Suhtvea ja taandvea kujutamine mõõteriistadel. a) suhtviga δ = 0,2%. b) taandviga γ = 0,2%.

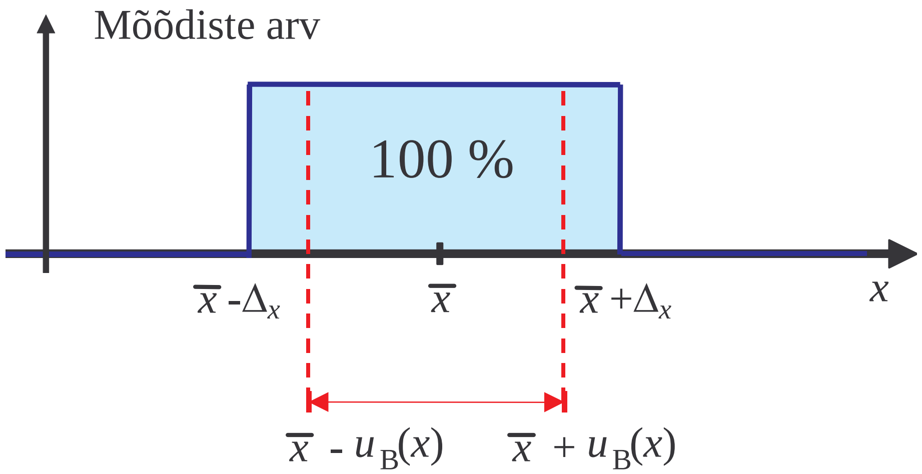
Enamuse digitaalsete mõõteriistade puhul on täpsus esitatud absoluutvea arvutusvalemina:

Δ = kordaja$_1$ × mõõteriista lugem + kordaja$_2$ × mõõteriista lahutusvõime.

Mõõteriista lahutusvõime all mõistetakse tema displeil kuvatava mõõdise viimase koha vähimat võimalikku nullist erinevat väärtust.

B-tüüpi määramatuse saamiseks peame arvutama esmalt mõõtetulemuse absoluutpõhivea. Lisaks sellele on vaja teada, mil moel erinevate sama marki mõõteriistadega saadud mõõdised võiksid olla jaotunud. Selle info annab meile mõõteriista valmistaja või on see meile teada teistest samalaadsetest mõõtmistest. Enamikul juhtudel eeldatakse, et mõõdised on jaotunud keskväärtuse ümber ühtlase jaotuse (joonis 3) alusel. Ühtlase jaotuse korral tuleb B-tüüpi määramatuse leidmiseks jagada absoluutviga ruutjuurega kolmest:

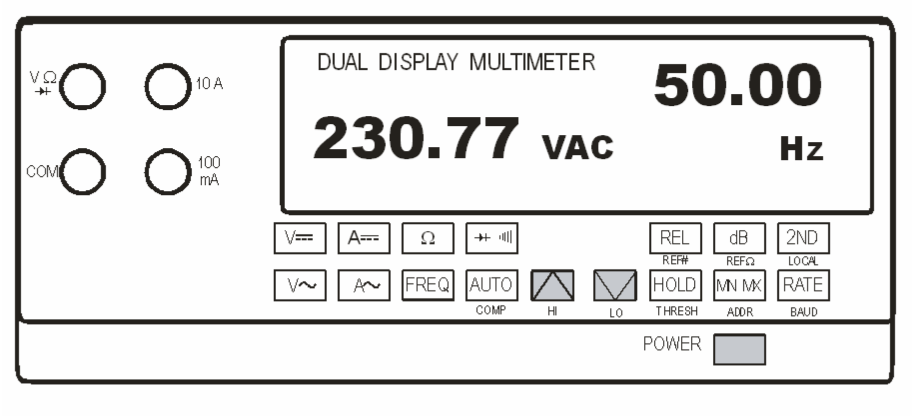
$$u_B(x) = \Delta_x / \sqrt{3} = 0{,}58\Delta_x .$$



Joonis 3. Ühtlane jaotus. Mõõdised satuvad vahemikku [$\overline{X} - \Delta_x$, $\overline{X} + \Delta_x$] tõenäosusega 100%, väljapoole seda vahemikku tõenäosusega 0%. Vahemikku [$\overline{X} - u_B(x)$, $\overline{X} + u_B(x)$] jääb 58% mõõdistest.

[3] Milliseid keskkonna parameetreid ja mõjureid konkreetse mõõteriista puhul normeeritakse, määrab seadme tootja ja need on kirjas seadme passis. Normaaltingimustel töötamisel on mõõteriist kõige täpsem.

Näide 1.



Joonis 4. Multimeetri Fluke 45 esipaneel.

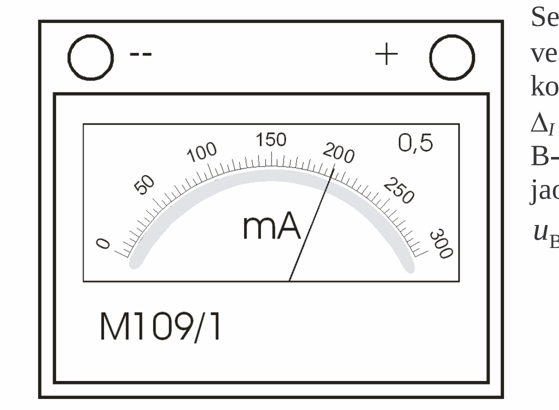
Mõõdame multimeetriga võrgupinge, saame võrgupinge väärtuseks E = 230,77 V (joonis 4). Mõõteriista passis on tema täpsus esitatud kujul: ±0.2% rdg ± 100 digit. Seda tuleks mõista järgmiselt: multimeetri absoluutpõhiviga on 0,2% × multimeetri lugem +100 × multimeetri lahutusvõime.

Meie katses on mõõdis esitatud sajandikvoltide täpsusega, seega on multimeetri lahutusvõimeks 0,01 V. Absoluutveaks saame Δ_E = 0,2% × 230,77V +100 × 0,01V = 1,46V.

B-tüüpi määramatuseks saame mõõtetulemuste ühtlase jaotuse eeldusel $u_{\mathrm{B}}(E) = 1{,}46\mathrm{V}/\sqrt{3} \approx 0{,}84\mathrm{V}$.

Näide 2.

Mõõdame voolutugevuse joonisel 5 kujutatud milliampermeetriga, saame voolutugevuse väärtuseks I = 200 mA. Milliampermeetri esipaneelil on täpsus esitatud kujul 0,5, skaala ulatus I_{skaala} = 300 mA.



Sellisel kujul esitatud täpsus tähendab, et tegemist on taandveaga γ_I = 0,5%. Absoluutvea saamiseks peame taandvea läbi korrutama skaala ulatusega:

$\Delta_I = \gamma_I \times I_{\mathrm{skaala}}$ = 0,5% × 300mA = 1,5mA.

B-tüüpi määramatuseks saame mõõtetulemuste ühtlase jaotuse eeldusel

$u_{\mathrm{B}}(I) = 1{,}5\ \mathrm{mA}/\sqrt{3} \approx 1\ \mathrm{mA}$.

Joonis 5. Milliampermeetri M109/1 esipaneel.

Liitmääramatus ja laiendmääramatus

Määramatuse A- ja B-tüüpi komponendid võetakse kokku ruuteeskirja kasutades, saadakse **liitmääramatus** u_{C}:

$$u_{\mathrm{C}} = \sqrt{u_{\mathrm{A}}^2 + u_{\mathrm{B}}^2}\ .$$

Näide 3.

Oletame, et mõõtsime eelmises peatükis näites 1 kirjeldatud katses võrgupinget 1000 korda. Seejärel arvutasime mõõdiste aritmeetilise keskmise $\overline{E} = 230{,}77\ \mathrm{V}$ ja mõõdiste aritmeetilise keskmise A-tüüpi määramatuse $u_{\mathrm{A}}(\overline{E}) = 0{,}25\ \mathrm{V}$. Siis liitmääramatus $u_{\mathrm{C}}(E) = \sqrt{(0{,}25\ \mathrm{V})^2 + (0{,}84\ \mathrm{V})^2} \approx 0{,}88\ \mathrm{V}$.

Paljudel juhtudel sobibki liitmääramatus määramatuse väärtuseks lõppvastuses. Mõnikord on siiski vaja esitada tulemus kõrgendatud **usaldusnivool**[4] (näiteks meditsiiniliste mõõtmiste puhul, teadustulemuste publitseerimisel jne). Siis tuleks kasutada **laiendmääramatust**. Laiendmääramatuse U saame liitmääramatuse läbikorrutamisel katteteguriga k:

$$U = k\, u_{\mathrm{C}}\,.$$

Kattetegur sõltub soovitavast usaldusnivoost ja mõõtetulemuste jaotusest. Näiteks 95% usaldusnivooga tulemuse saamiseks on normaaljaotuse korral (joonis 1) katteteguriks $k = 1{,}96$, ühtlase jaotuse korral (joonis 3) aga $k = 1{,}65$.

Kui palju kordusmõõtmisi teha? Valemis (2) nägime, et keskmise A-tüüpi määramatust saab katsete arvu suurendades vähendada. Samal ajal on kordusmõõtmiste tegemine aeganõudev ja töömahukas. Mõistlikuks kompromissiks täpsuse ja ajakulu vahel loetakse olukorda, kus

$$u_{\mathrm{A}}(\bar{x}) \le \frac{u_{\mathrm{B}}(x)}{3}\,. \qquad (3)$$

Siis on A-tüüpi määramatuse osakaal liitmääramatuses alla 10%. Vajalikuks korduskatsete arvuks saame valemi (2) ja võrratuse (3) põhjal:

$$n \ge \left(\frac{3\, s(x)}{u_{\mathrm{B}}(x)}\right)^2.$$

Mõõtetulemuse esitamine koos määramatusega

Mõõtetulemus esitatakse koos määramatuse hinnanguga ja korrektselt ümardatuna. Ümardamist tuleks alustada määramatusest, jättes alles üks-kaks **tähendusega numbrit**[5]. Heaks tavaks on jätta täppismõõtmiste korral alles kaks tähendusega numbrit ja tavaliste mõõtmiste korral üks tähendusega number. Lisaks sellele tuleks jälgida, et ümardamise tulemusena ei muutuks määramatus rohkem kui 10%. Kui muutus oleks suurem, tuleks määramatus esitada ühe koha võrra täpsemalt. Seejärel tuleb ümardada mõõtetulemus **sama arvu komakohtadeni**, mis jäid alles määramatuse ümardamisel.

Vastuse võiks esitada kujul: ***x* = mõõtetulemus (määramatus) ühik**.

Näiteks eelmises peatükis toodud võrgupinge mõõtmise tulemuse võiks esitada kujul:

$$E = 230{,}77(0{,}88)\,\mathrm{V}\,.$$

Määramatuse numbris võib koma ka ära jätta ja esitada tulemuse kujul:

$$E = 230{,}77(88)\,\mathrm{V}\,.$$

Sellises kirjapildis on eriti hästi näha, miks peavad nii vastus kui ka määramatus olema ümardatud sama arvu komakohtadeni – vale ümardamise korral loeme määramatuse väärtuse vastuses vähemalt suurusjärgu võrra erinevalt!

Vastuse võib esitada ka täiuslikumas kirjaviisis, pannes kirja nii tehtud katsete arvu kui ka määramatuse komponendid:

$$\begin{aligned}
&\bar{E} = 230{,}77\,\mathrm{V}\\
&n = 1000\\
&u_{\mathrm{C}}(E) = 0{,}88\,\mathrm{V}\\
&u_{\mathrm{A}}(\bar{E}) = 0{,}25\,\mathrm{V},\ \text{normaaljaotus}\\
&u_{\mathrm{B}}(E) = 0{,}84\,\mathrm{V},\ \text{ühtlane jaotus}
\end{aligned}$$

---

[4] Usaldusnivoo näitab kui suure tõenäosusega satub leppeline tõeline väärtus vahemikku $[x_{\mathrm{m}} - U, x_{\mathrm{m}} + U]$, kus x_{m} tähistab mõõtetulemust. Leppeline tõeline väärtus on mõõtetulemus, mis on saadud inimkonna käsutuses oleva parima mõõtevahendiga – etaloniga.

[5] Tähendusega numbriteks loetakse **kõiki nullist erinevaid numbreid**. Null võib sõltuvalt olukorrast olla nii tähendusega kui ka ilma: arvu alguses olevad nullid, samuti ümardamise teel saadud nullid arvu lõpus **ei ole tähendusega numbrid**. Teiste arvude vahel paiknevad ja samuti arvu lõpus ilma ümardamist kasutamata saadud nullid **on tähendusega numbrid**.

Kui soovitakse esitada tulemus koos laiendmääramatusega, siis eraldatakse viimane mõõtetulemusest “±” märgiga, kujul:

$$E = \left(230{,}8 \pm 1{,}5\right)\mathrm{V}\,.$$

Lisada tuleks veel arvutustes kasutatud usaldusnivoo ja katteteguri väärtused. Toodud näites on usaldusnivoo p = 95% ja MathCAD’iga arvutades saadud konkreetsele jaotusele vastav kattetegur k = 1.73.

Määramatus kaudmõõtmisel

Seni vaatlesime määramatuse hinnangu leidmist selliste mõõtmiste puhul, kus saime mõõtetulemuse teada vahetult mõõteriista skaalalt ehk nn otsemõõtmiste puhul. Küllalt sageli tuleb aga otsitava suuruse väärtus alles arvutada otsemõõdetud suurustest, kasutades selleks füüsikaliste suuruste vahelisi seoseid kirjeldavaid valemeid. Sellisel moel saadud mõõtetulemust nimetatakse kaudmõõdetud suuruseks. Ka kaudmõõtmiste puhul on vaja hinnata mõõtmise täpsust. Seda saab teha kasutades otsemõõdetud suuruste väärtusi, nende määramatusi ja kaudmõõdetava suuruse arvutusvalemit.

Olgu meil kaudmõõdetav suurus Y mille saab leida sõltumatutest otsemõõdetud suurustest X_1, X_2, …, X_n kasutades arvutusvalemit

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)\,.$$

Suuruse Y määramatuse u(y) saab siis leida valemist

$$u(y) = \sqrt{\left[\frac{\partial\, f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial\, x_1}\cdot u(x_1)\right]^2 + \ldots + \left[\frac{\partial\, f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial\, x_n}\cdot u(x_n)\right]^2}\,, \qquad (4)$$

kus y tähistab suuruse Y mõõtetulemust. x_i ja u(x_i) on vastavalt otsemõõdetud suuruse X_i mõõtetulemus ja määramatus. Suurused $\partial f(\ldots,x_i,\ldots)/\partial x_i$ tähistavad funktsiooni $f(\ldots, X_i, \ldots)$ osatuletisi muutuja X_i järgi kohal $X_i = x_i$ (i = 1 … n).

Kui otsemõõdetud suurused ei ole sõltumatud, siis tuleb kaudmõõtmise määramatuse valemisse (4) lisada veel sõltuvate suuruste vahelist korrelatsiooni arvesse võtvad liikmed. Lähemalt loe juhenditest [1–4].

Näide 4.

Oletame, et määrasime kaudmõõtmise teel, püknomeetrit ja kaalu kasutades, tundmatu vedeliku tiheduse. Selleks kaalusime esmalt kuiva püknomeetri ja seejärel sama püknomeetri täidetuna uuritava vedelikuga. Massideks saime vastavalt m_k määramatusega $u_C(m_k)$ ja m_t määramatusega $u_C(m_t)$. Uuritava vedeliku ruumalaks saime V määramatusega $u_C(V)$. Vedeliku tiheduse arvutusvalem avaldub kujul:

$$\rho\left(m_k, m_t, V\right) = \frac{m_t - m_k}{V}\,.$$

Kaudmõõtmise määramatuse arvutamiseks vajalikud osatuletised avalduvad valemitega:

$$\frac{\partial\rho\left(m_k, m_t, V\right)}{\partial m_k} = \frac{-1}{V}$$

$$\frac{\partial\rho\left(m_k, m_t, V\right)}{\partial m_t} = \frac{1}{V}$$

$$\frac{\partial\rho\left(m_k, m_t, V\right)}{\partial V} = -\frac{m_t - m_k}{V^2}$$

Tiheduse määramatuseks saame

$$u_C(\rho) = \sqrt{\left(\frac{-1}{V}u_C\left(m_k\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{V}u_C\left(m_t\right)\right)^2 + \left(-\frac{m_t - m_k}{V^2}u_C\left(V\right)\right)^2}\,.$$

Tänuavaldused

Autor tänab Tartu Ülikooli katsekoja peametroloogi dr Olev Saks’a viljaka diskussiooni eest, mis aitas kaasa käesoleva artikli valmimisele.

Kasutatud kirjandus

1. Laaneots, R., Mathiesen, O. (2002). Mõõtmise alused. Tallinn.
2. US National Institute of Standards and Technology veebileht Guidelines for the expression of uncertainty in measurement. http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/index.html
3. Taylor, B. N., Kuyatt, C. E. (1994). NIST Technical Note 1297: Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results. http://physics.nist.gov/Document/tn1297.pdf
4. RMK. (1996). Mõõtemääramatuse väljendamise juhend. Tartu.
5. Voolaid, H. (1986) Mõõtevigade hindamine füüsika praktikumis. Tartu.
6. Tammet, H. (1971) Füüsika praktikum, metroloogia. Tallinn.

Toodud veebilinkide toimimist on viimati kontrollitud 19. jaanuaril 2005.