Reduktsioonistrateegiad

- Normaalkuju saavutamine sõltub reduktsiooni järjekorrast!
- *Normaaljärjekord* — alati redutseeritakse kõige välimine vasakpoolne reedeks

$$\underline{(\lambda x.y)((\lambda x.(xx))(\lambda x.(xx)))} \rightarrow_\beta y$$

- *Aplikatiivne järjekord* — alati redutseeritakse kõige sisemine vasakpoolne reedeks

$$\begin{array}{ll} & (\lambda x.y)(\underline{(\lambda x.(xx))(\lambda x.(xx))}) \\ \rightarrow_\beta & (\lambda x.y)(\underline{(\lambda x.(xx))(\lambda x.(xx))}) \\ \ldots & \end{array}$$

Märgendatud λ-termid

- $\Lambda_{\mathcal{A}}$ on märgendatud λ-termide hulk:
  1. $x^a \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, kus $a \in \mathcal{A}$ ja x on muutuja;
  2. $(\lambda x.M)^a \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, kus $a \in \mathcal{A}$ ja $M \in \Lambda_{\mathcal{A}}$;
  3. $(MN)^a \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, kus $a \in \mathcal{A}$ ja $M, N \in \Lambda_{\mathcal{A}}$.
- Näide:

$$((\lambda x.(x^1 x^2)^3)^4\ (y^5 z^6)^7)^8$$

- *Märgenduseks* nimetatakse funktsiooni mis (märgendamata) termi iga alamtermiga seob märgendi.
- Märgendust nimetatakse *algmärgenduseks* kui erinevad alamtermid seotakse erinevate märgenditega.

Märgendatud λ-termid

- Märgendatud β-reegel:

$$((\lambda x.M)^a N)^b = M[N/x]$$

- Märgendatud substitutsioon:

$$\begin{array}{lcl} x^a[N/x] & \equiv & N \\ y^a[N/x] & \equiv & y^a \\ (M_1 M_2)^a[N/x] & \equiv & (M_1[N/x] M_2[N/x])^a \\ (\lambda y.M)^a[N/x] & \equiv & (\lambda y.M[N/x])^a \end{array}$$

- Näide:

$$((\lambda x.(x^1 x^2)^3)^4 \ (y^5 z^6)^7)^8 \ \rightarrow_\beta \ ((y^5 z^6)^7 \ (y^5 z^6)^7)^3$$

Reedeksi jäägid

- Olgu $M \to N$, I termi M märgendus, $\mathcal{J}$ termi N märgendus ning Δ redutseeritava reedeksi märgend ($M \to^\Delta N$):
  - alamtermi $T \in Sub(N)$ nimatatakse alamtermi $S \in Sub(M)$ *järglaseks* kui $I(S) = \mathcal{J}(T)$;
  - reedeksi järglast nimetatakse selle reedeksi *jäägiks*;
  - redutseeritud reedeksil ei ole ühtegi jääki.
- Näide:

$$\begin{array}{l} (\lambda xy.\underline{(\lambda zw.xz)y})MN \\ \rightarrow_\beta (\lambda y.\underline{(\lambda zw.Mz)y})N \\ \rightarrow_\beta \underline{(\lambda zw.Mz)N} \\ \rightarrow_\beta \lambda w.MN \end{array}$$

Peanormaalkujud

- Term $M \in \Lambda$ on *peanormaalkujul* (HNF) kui

$$M \equiv \lambda x_1 \ldots x_n.xM_1 \ldots M_m \qquad n,m \geq 0$$

- Kui $M \equiv \lambda x_1 \ldots x_n.(\lambda x.M_0)M_1 \ldots M_m$, kus $n \geq 0$ ja $m \geq 1$, siis alamtermi $(\lambda x.M_0)M_1$ nimetatakse *peareedeksiks*
- Term $M \in \Lambda$ on *nõrgal peanormaalkujul* (WHNF) kui

$$M \equiv \begin{cases} xM_1 \ldots M_n & n \geq 0 \\ \lambda x.M \end{cases}$$

Standardiseerimisteoreem

- *Standardreduktsiooniks* nimatatakse reduktsioonijada

$$M_0 \rightarrow^{\Delta_0} M_1 \rightarrow^{\Delta_1} M_2 \rightarrow^{\Delta_2} \ldots$$

kus iga kahe reedeksi Δ_i ja Δ_j $(i > j)$ korral Δ_i ei ole reedeksist Δ_j vasakul asuvate reedeksite jäägiks.

- Normaaljärjekorras reduktsioon on standardreduktsioon!
- *Lemma:* $M \twoheadrightarrow N \Rightarrow \exists Z[M \twoheadrightarrow_h Z \twoheadrightarrow_i N]$
- *Standardiseerimisteoreem:* $M \twoheadrightarrow N \Rightarrow M \twoheadrightarrow_s N$

Konstantidega lambda-arvutus

- Konstantidega λ-termide süntaks

$$
\begin{array}{rcll}
E & ::= & V & \text{muutuja} \\
 & | & C & \text{konstant} \\
 & | & (E_1\ E_2) & \text{aplikatsioon} \\
 & | & (\lambda V.\ E) & \text{abstraktsioon}
\end{array}
$$

- Iga konstandiga seotakse mingi arv δ-reduktsiooni reegleid.
- Näide: Naturaalarvud $(0, 1, 2, \ldots)$ ja liitmine $(+)$.

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
+\,0\,0 & \to_\delta & 0 & +\,1\,0 & \to_\delta & 1 \\
+\,0\,1 & \to_\delta & 1 & +\,1\,1 & \to_\delta & 2 \\
 & \ldots & & & \ldots &
\end{array}
$$

- δ-reeglite lisamine võib kokkuvoolavuse ära rikkuda!