Reduktsioonistrateegiad

- Normaalkuju saavutamine sõltub reduktsiooni järjekorrast!
- Normaaljärjekord — alati redutseeritakse kõige välimine vasakpoolne reedeks

$$\underline{(\lambda x.y)((\lambda x.(xx))(\lambda x.(xx)))} \rightarrow_\beta y$$

- Aplikatiivne järjekord — alati redutseeritakse kõige sisemine vasakpoolne reedeks

$$\begin{array}{ll} & (\lambda x.y)(\underline{(\lambda x.(xx))(\lambda x.(xx))}) \\ \rightarrow_\beta & (\lambda x.y)(\underline{(\lambda x.(xx))(\lambda x.(xx))}) \\ \ldots & \end{array}$$

Märgendatud λ-termid

- $\Lambda_{\mathcal{A}}$ on märgendatud λ-termide hulk:
  1. $x^a \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, kus $a \in \mathcal{A}$ ja x on muutuja;
  2. $(\lambda x.M)^a \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, kus $a \in \mathcal{A}$ ja $M \in \Lambda_{\mathcal{A}}$;
  3. $(MN)^a \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, kus $a \in \mathcal{A}$ ja $M, N \in \Lambda_{\mathcal{A}}$.
- Näide:
  $$((\lambda x.(x^1 x^2)^3)^4\ (y^5 z^6)^7)^8$$
- Märgenduseks nimetatakse funktsiooni mis (märgendamata) termi iga alamtermiga seob märgendi.
- Märgendust nimetatakse algmärgenduseks kui erinevad alamtermid seotakse erinevate märgenditega.

Märgendatud λ-termid

- Märgendatud β-reegel:

$$((\lambda x.M)^a N)^b = M[N/x]$$

- Märgendatud substitutsioon:

$$\begin{array}{lcl} x^a[N/x] & \equiv & N \\ y^a[N/x] & \equiv & y^a \\ (M_1 M_2)^a[N/x] & \equiv & (M_1[N/x]M_2[N/x])^a \\ (\lambda y.M)^a[N/x] & \equiv & (\lambda y.M[N/x])^a \end{array}$$

- Näide:

$$((\lambda x.(x^1 x^2)^3)^4\ (y^5 z^6)^7)^8 \ \rightarrow_\beta\ ((y^5 z^6)^7\ (y^5 z^6)^7)^3$$

Reedeksi jäägid

- Olgu $M \to N$, I termi M märgendus, $\mathcal{J}$ termi N märgendus ning Δ redutseeritava reedeksi märgend ($M \to^{\Delta} N$):
  - alamtermi $T \in Sub(N)$ nimatatakse alamtermi $S \in Sub(M)$ järglaseks kui $I(S) = \mathcal{J}(T)$;
  - reedeksi järglast nimetatakse selle reedeksi jäägiks;
  - redutseeritud reedeksil ei ole ühtegi jääki.
- Näide:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda xy.\underline{(\lambda zw.xz)y})MN \\
\to_\beta\ &(\lambda y.\underline{(\lambda zw.Mz)y})N \\
\to_\beta\ &\underline{(\lambda zw.Mz)N} \\
\to_\beta\ &\lambda w.MN
\end{aligned}
$$

Peanormaalkujud

- Term $M \in \Lambda$ on peanormaalkujul (HNF) kui

$$M \equiv \lambda x_1 \ldots x_n . x M_1 \ldots M_m \qquad n, m \geq 0$$

- Kui $M \equiv \lambda x_1 \ldots x_n . (\lambda x . M_0) M_1 \ldots M_m$, kus $n \geq 0$ ja $m \geq 1$, siis alamtermi $(\lambda x . M_0) M_1$ nimetatakse peareedeksiks

- Term $M \in \Lambda$ on nõrgal peanormaalkujul (WHNF) kui

$$M \equiv \begin{cases} x M_1 \ldots M_n & n \geq 0 \\ \lambda x . M & \end{cases}$$

Standardiseerimisteoreem

- Standardreduktsiooniks nimatatakse reduktsioonijada

$$M_0 \rightarrow^{\Delta_0} M_1 \rightarrow^{\Delta_1} M_2 \rightarrow^{\Delta_2} \ldots$$

  kus iga kahe reedeksi Δ_i ja Δ_j ($i > j$) korral Δ_i ei ole reedeksist Δ_j vasakul asuvate reedeksite jäägiks.

- Normaaljärjekorras reduktsioon on standardreduktsioon!

- Lemma: $M \twoheadrightarrow N \Rightarrow \exists Z[M \twoheadrightarrow_h Z \twoheadrightarrow_i N]$

- Standardiseerimisteoreem: $M \twoheadrightarrow N \Rightarrow M \twoheadrightarrow_s N$

Konstantidega lambda-arvutus

- Konstantidega λ-termide süntaks

$$\begin{array}{lcll} E & ::= & V & \text{muutuja} \\ & | & C & \text{konstant} \\ & | & (E_1\ E_2) & \text{aplikatsioon} \\ & | & (\lambda V.\ E) & \text{abstraktsioon} \end{array}$$

- Iga konstandiga seotakse mingi arv δ-reduktsiooni reegleid.

- Näide: Naturaalarvud $(0, 1, 2, \ldots)$ ja liitmine $(+)$.

$$\begin{array}{lcllcl} +\,0\,0 & \rightarrow_\delta & 0 & \quad +\,1\,0 & \rightarrow_\delta & 1 \\ +\,0\,1 & \rightarrow_\delta & 1 & \quad +\,1\,1 & \rightarrow_\delta & 2 \\ & \ldots & & & \ldots & \end{array}$$

- δ-reeglite lisamine võib kokkuvoolavuse ära rikkuda!