Lihtsalt tüübitud λ-arvutus

- *Tüübid:* olgu U (loenduv) *tüübimuutujate* hulk; *lihtsate tüüpide* hulk Π on defineeritud järgneva grammatikaga:

$$\Pi \;:=\; U \;\mid\; (\Pi \to \Pi)$$

  Tüübimuutujaid tähistame $\alpha, \beta, \ldots \in U$; tüüpe $\sigma, \tau, \ldots \in \Pi$.

- *Kontekstid:* muutujast ja tüübist koosnevate paaride jada

$$\Gamma = \{x_1 : \tau_1,\ \ldots,\ x_n : \tau_n\}$$

  Kontekstide hulka tähistame C ning kontektsi Γ doomenit $\mathrm{dom}(\Gamma) = \{x_1,\ \ldots,\ x_n\}$.

Lihtsalt tüübitud λ-arvutus à la Curry

- *Tüüpimine:* relatsioon $\vdash\ \subseteq C \times \Lambda \times \Pi$

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau} \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \to \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$$

  kus $x \notin \Gamma$.

- Lihtsalt tüübitud λ-arvutus *à la Curry* ($\lambda\!\to$ à la Curry) on kolmik $(\Lambda, \Pi, \vdash)$.

- *Näiteid:*

$$\begin{aligned}
&\vdash \lambda x.x : \sigma \to \sigma \\
&\vdash \lambda xy.x : \sigma \to \tau \to \sigma \\
&\vdash \lambda xyz.xz(yz) : (\sigma \to \tau \to \rho) \to (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho
\end{aligned}$$

Lihtsalt tüübitud λ-arvutus à la Curry

- *Näide:*

$$
\dfrac{\Gamma \vdash x : \sigma \to \tau \qquad \dfrac{\Gamma \vdash y : \rho \to \sigma \quad \Gamma \vdash z : \rho}{\Gamma \vdash yz : \sigma}}{\dfrac{\Gamma \vdash x(yz) : \tau}{\dfrac{\Gamma_2 \vdash \lambda z.x(yz) : \rho \to \tau}{\dfrac{\Gamma_1 \vdash \lambda yz.x(yz) : (\rho \to \sigma) \to \rho \to \tau}{\vdash \lambda xyz.x(yz) : (\sigma \to \tau) \to (\rho \to \sigma) \to \rho \to \tau}}}}
$$

  kus

$$
\begin{array}{rcl}
\Gamma_1 & = & \{x{:}\sigma \to \tau\} \\
\Gamma_2 & = & \{x{:}\sigma \to \tau,\ y{:}\rho \to \sigma\} \\
\Gamma & = & \{x{:}\sigma \to \tau,\ y{:}\rho \to \sigma,\ z{:}\rho\}
\end{array}
$$

Lihtsalt tüübitud λ-arvutus à la Curry

- *Moodustamislemma:*

$$
\begin{array}{lcl}
\Gamma \vdash x : \sigma & \Rightarrow & x : \sigma \in \Gamma \\
\Gamma \vdash MN : \sigma & \Rightarrow & \exists \tau\, [\Gamma \vdash M : \tau \to \sigma \ \wedge\ \Gamma \vdash N : \tau] \\
\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma & \Rightarrow & \exists \tau, \rho\, [\Gamma, x : \tau \vdash M : \rho \ \wedge\ \sigma = \tau \to \rho]
\end{array}
$$

- *Subjektreduktsioon:* kui $\Gamma \vdash M : \sigma$ ja $M \twoheadrightarrow N$, siis $\Gamma \vdash N : \sigma$.

- *Teoreem:* relatsioon $\twoheadrightarrow$ on Church-Rosser.

Lihtsalt tüübitud λ-arvutus à la Church

- Pseudotermide hulk Λ_Π on defineeritud grammatikaga:

$$\Lambda_\Pi \;:=\; V \;\mid\; (\lambda V : \Pi.\Lambda_\Pi) \;\mid\; (\Lambda_\Pi \Lambda_\Pi)$$

- *Tüüpimine:* relatsioon $\Vdash \subseteq C \times \Lambda_\Pi \times \Pi$

$$\frac{}{\Gamma, x:\tau \Vdash x:\tau} \quad \frac{\Gamma, x:\sigma \Vdash M:\tau}{\Gamma \Vdash \lambda x:\sigma.M : \sigma\to\tau} \quad \frac{\Gamma \Vdash M:\sigma\to\tau \quad \Gamma \Vdash N:\sigma}{\Gamma \Vdash MN:\tau}$$

- Lihtsalt tüübitud λ-arvutus *à la Church* ($\lambda\!\to$ à la Church) on kolmik $(\Lambda_\Pi, \Pi, \Vdash)$.

- *Näiteid:*

$$\begin{array}{l}
\Vdash \lambda x:\sigma.x : \sigma\to\sigma \\
\Vdash \lambda x:\sigma.\lambda y:\tau.x : \sigma\to\tau\to\sigma \\
\Vdash \lambda x{:}\sigma\to\tau\to\rho.\lambda y{:}\sigma\to\tau.\lambda z{:}\sigma.xz(yz) : (\sigma\to\tau\to\rho)\to(\sigma\to\tau)\to\sigma\to\rho
\end{array}$$

Lihtsalt tüübitud λ-arvutus à la Church

- *Moodustamislemma:*

$$\begin{array}{lcl}
\Gamma \Vdash x:\sigma & \Rightarrow & x:\sigma \in \Gamma \\
\Gamma \Vdash MN:\sigma & \Rightarrow & \exists\tau\,[\Gamma \Vdash M:\tau\to\sigma \,\wedge\, \Gamma \Vdash N:\tau] \\
\Gamma \Vdash \lambda x{:}\tau.M:\sigma & \Rightarrow & \exists\rho\,[\Gamma, x:\tau \Vdash M:\rho \,\wedge\, \sigma = \tau\to\rho]
\end{array}$$

- *Subjektreduktsioon:* kui $\Gamma \Vdash M:\sigma$ ja $M \twoheadrightarrow N$, siis $\Gamma \Vdash N:\sigma$.

- *Teoreem:* relatsioon $\twoheadrightarrow$ on Curch-Rosser.

- *Tüüpide unikaalsus:*
  - kui $\Gamma \Vdash M:\sigma$ ja $\Gamma \Vdash M:\tau$, siis $\sigma = \tau$;
  - kui $\Gamma \Vdash M:\sigma$ ja $\Gamma \Vdash N:\tau$ ja $M = N$, siis $\sigma = \tau$.

Church vs. Curry

- Tüüpide *kustutamise* funktsioon $|\cdot| : \Lambda_\Pi \to \Lambda$

$$\begin{array}{rcl} |x| & = & x \\ |MN| & = & |M|\,|N| \\ |\lambda x{:}\sigma.M| & = & \lambda x.|M| \end{array}$$

- *Teoreem:* Olgu $M, N \in \Lambda_\Pi$
  - kui $M \to N$, siis $|M| \to |N|$;
  - kui $\Gamma \Vdash M : \sigma$, siis $\Gamma \vdash |M| : \sigma$.
- *Teoreem:* Olgu $M, N \in \Lambda$
  - kui $M \to N$, siis iga $M' \in \Lambda_\Pi$ mille korral $|M'| = M$ leidub $N' \in \Lambda_\Pi$ nii et $|N'| = N$ ja $M' \to N'$;
  - kui $\Gamma \vdash M{:}\sigma$, siis leidub $M' \in \Lambda_\Pi$ nii et $|M'| = M$ ja $\Gamma \Vdash M'{:}\sigma$.

Väljendusvõimsus

- Olgu $N = (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$. Funktsioon $f : \mathbf{N}^m \to \mathbf{N}$ on $\lambda\!\to$*-defineeritav* kui leidub $F \in \Lambda$ nii et $\vdash F : N \to \ldots \to N$ ($m+1$ korda) ja $F\,\underline{n_1} \ldots \underline{n_m} = \underline{f(n_1, \ldots, n_m)}$.
- *Teoreem:* $\lambda\!\to$-defineeritavad funktsioonid on täpselt laiendatud polünoomid
  1. *projektsioonid*: $U_i^m(n_1, \ldots, n_m) = n_i$ $(1 \le i \le m)$;
  2. *konstantfunktsioonid*: $k(n) = k$;
  3. *märgifunktsioon*: $\mathtt{sg}(0) = 0$ ja $\mathtt{sg}(m+1) = 1$;
  4. *liitmine*: $(f+g)(n_1, \ldots, n_k, m_1, \ldots, m_l) = f(n_1, \ldots, n_k) + g(m_1, \ldots, m_l)$;
  5. *korrutamine*: $(f \cdot g)(n_1, \ldots, n_k, m_1, \ldots, m_l) = f(n_1, \ldots, n_k) \cdot g(m_1, \ldots, m_l)$;

Lahenduvus

- Termi M nimetatakse ($\lambda\!\rightarrow$) *tüübitavaks* parajasti siis, kui leiduvad Γ ja τ mille korral $\Gamma \vdash M : \tau$.
- $\lambda\!\rightarrow$ tüübitavate termide klass on *lahenduv* (so. leidub algoritm, mis tuvastab kas antud term on tüübitav).
- *Nõrgalt normaliseeruvuse teoreem:* Iga $\lambda\!\rightarrow$ tüübitav term omab nii β- kui ka $\beta\eta$-normaalkuju.
- *Tugevalt normaliseeruvuse teoreem:* Iga $\lambda\!\rightarrow$ tüübitavast termist lähtuv β- ($\beta\eta$-) reduktsioonijada on lõplik.
- *Teoreem:* $\lambda\!\rightarrow$ tüübitavate termide β- ($\beta\eta$-) võrduse kontrollimiseks leidub otsustusprotseduur (so. algoritm, mis saades 2 tüübitud termi P ja Q, tuvastab kas $P = Q$).