

Funktsionaalne programmeerimine

Varmo VENE
Arvutiteaduse Instituut
Tartu Ülikool

EMAIL: `varmo@cs.ut.ee`

WWW: `http://www.cs.ut.ee/~varmo/FP2005/`

LIST: `ati.pk@lists.ut.ee`

Kursuse plaan

- λ -arvutus
 - Reduktsioon, Church-Rosseri teoreemid
 - Kombinaatorloogika
 - Arvutatavus, Churchi tees
- Tüübiteooria elemendid
 - Tüübitud λ -arvutus, Curry-Howard isomorfism
 - 2-järku loogikad, polümorfne λ -arvutus
 - Hindley-Milneri tüübisüsteem
- Monaadid, parserid, nooled, reaktiivne programmeerimine ...

Kirjandus

1. P. Hudak. The Haskell School of Expression. Cambridge University Press, 2000.
2. R. L. Page. Two Dozen Short Lessons in Haskell. Uni. of Oklahoma, 1997.
3. C. Hankin. Lambda Calculi - A guide for computer scientists. Oxford University Press, 1994.
4. M. H. Sorensen, P. Urzyczyn. Lectures on the Curry-Howard Isomorphism. DIKU Rapport 98/14, 1998.

Lambda-arvutus

- λ -termide süntaks

E	$::=$	V	muutuja
		$(E_1 E_2)$	aplikatsioon
		$(\lambda V. E)$	abstraktsioon

- Näiteid λ -termidest

$(\lambda x. x)$	$((\lambda x. (\lambda f. (f x))) y)(\lambda z. z)$
$(\lambda x. y)$	$(\lambda x. ((\text{add } x) \underline{1}))$

- Sulgudest hoidumine

$E_1 E_2 \dots E_n$	$\equiv$	$((\dots (E_1 E_2) \dots) E_n)$
$\lambda V. E_1 E_2 \dots E_n$	$\equiv$	$(\lambda V. (E_1 E_2 \dots E_n))$
$\lambda V_1 V_2 \dots V_n. E$	$\equiv$	$(\lambda V_1. (\lambda V_2. (\dots (\lambda V_n. E) \dots)))$

Lambda-arvutus

- Vabad ja seotud muutujad

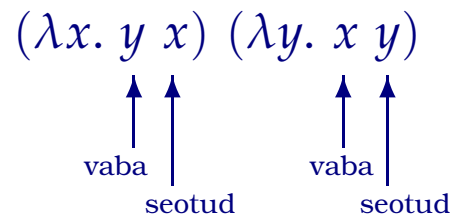
Muutuja x on vaba λ -termis E (so. $x \in \text{FV}(E)$), kui ta ei asu sümboli λx mõjupiirkonnas. Vastasel korral on x seotud.

$$\text{FV}(x) = \{x\}$$

$$\text{FV}(E_1 E_2) = \text{FV}(E_1) \cup \text{FV}(E_2)$$

$$\text{FV}(\lambda x. E) = \text{FV}(E) - \{x\}$$

- Näide:



- λ -termi E nimetatakse kinniseks kui $\text{FV}(E) = \emptyset$

Teooria λ

- Aksioomid

$$M = M \qquad (\lambda x. M) N = M[N/x] \quad (\beta)$$

- Tuletusreeglid

$$\frac{M = N}{N = M}$$

$$\frac{M = N}{MZ = NZ}$$

$$\frac{M = N \quad N = L}{M = L}$$

$$\frac{M = N}{ZM = ZN}$$

$$\frac{M = N}{\lambda x. M = \lambda x. N} \quad (\xi)$$

- Relatsioonid = nimetatatakse konversiooniks.

β - konversioon

- Vastab funktsiooni väljakutse väärtustamisele!
- Näited:

$$\begin{aligned}(\lambda x. f\ x)\ E &= f\ E \\(\lambda x\ y. \text{add}\ x\ y)\ \underline{3} &= \lambda y. \text{add}\ \underline{3}\ y \\(\lambda y. \text{add}\ \underline{3}\ y)\ \underline{4} &= \text{add}\ \underline{3}\ \underline{4}\end{aligned}$$

- Antinäide:

$$(\lambda x\ y. \text{add}\ x\ y)(\text{square}\ y) = \lambda y. \text{add}\ (\text{square}\ y)\ y$$

Teooria λ

- Püsipunktiteoreem:

$$\forall F \in \Lambda, \exists X \in \Lambda . FX = X$$

- Tõestus: Olgu $W \equiv \lambda x. F(xx)$ ja $X \equiv WW$. Siis

$$X \equiv WW \equiv (\lambda x. F(xx)) W = F(WW) \equiv FX$$

- Näited:

term	tema püsipunkt
$\lambda x y. x y$	$(\lambda x y. (x x) y) (\lambda x y. (x x) y)$
$\lambda x. x$	$(\lambda x. x x) (\lambda x. x x)$

α -kongruents

- Term M on α -kongruentne termiga N (tähistame $M \equiv_\alpha N$), kui M ja N on identsed muutujate ümbernimetamise täpsuseni.

- Näited:

$$\lambda x. x \equiv_\alpha \lambda y. y$$

$$\lambda x. f\ x \equiv_\alpha \lambda z. f\ z$$

$$\lambda x. (\lambda y. y)\ x \equiv_\alpha \lambda y. (\lambda y. y)\ y$$

- Antinäide

$$\lambda x\ y. \text{add } x\ y \equiv_\alpha \lambda y\ y. \text{add } y\ y$$

- Konventsioon — kõik seotud muutujad on vabadest muutujatest erinevad.

Substitutsioon

- Muutuja x substitutsiooniks termiga E nimetatakse muutuja x kõigi vabade esinemiste asendamist termiga E selliselt, et kõik termi E vabad muutujad on ka pärast asendamist vabad.
- Substitutsiooni definitsioon:

E	$E[E' / x]$
x	E'
y	y
$E_1 E_2$	$E_1[E' / x] E_2[E' / x]$
$\lambda y. E_1$	$\lambda y. E_1[E' / x]$

Substitutsioon

- Substitutsiooni definitsioon a'la Church:

E	$E[E' / x]$
x	E'
y	y
$E_1 E_2$	$E_1[E' / x] E_2[E' / x]$
$\lambda x. E_1$	$\lambda x. E_1$
$\lambda y. E_1 \quad (y \notin \text{FV}(E'))$	$\lambda y. E_1[E' / x]$
$\lambda y. E_1 \quad (y \in \text{FV}(E'))$	$\lambda z. E_1[z / y][E' / x]$ z on uus muutuja

Substitutsioon

- Substitutsiooni lemma: Kui x ja y on erinevad muutujad ning $x \notin \text{FV}(L)$, siis

$$M[N/x][L/y] \equiv M[L/y][N[L/y]/x]$$

- Substitutsiooni omadusi

$$M = M' \quad \Rightarrow \quad M[N/x] = M'[N/x]$$

$$N = N' \quad \Rightarrow \quad M[N/x] = M[N'/x]$$

- Ilmutatud viidatavus (Leibniz): Olgu $C[\cdot]$ mingi kontekst, siis

$$M = N \quad \Rightarrow \quad C[M] = C[N]$$

Ekstensionaalsus

- Teooria $\lambda + \mathbf{ext}$

$$\frac{Mx = Nx}{M = N} \quad x \notin \mathbf{FV}(MN) \quad (\mathbf{ext})$$

- Teooria $\lambda + \eta$

$$\lambda x. Mx = M \quad x \notin \mathbf{FV}(M) \quad (\eta)$$

- Näited:

$$\begin{aligned} \lambda x. (\lambda y. y) x &= \lambda y. y \\ \lambda x. \mathbf{add} \ x &= \mathbf{add} \end{aligned}$$

- Antinäide:

$$\lambda x. \mathbf{add} \ x \ x \neq \mathbf{add} \ x$$

- Lemma: Teooriad $\lambda + \mathbf{ext}$ ja $\lambda + \eta$ on ekvivalentsed.

Reduktsioon

- Reduktsioon on ainult vasakult paremale rakendatav konversioon; paremalt vasakule — ekspansioon.
- Alamtermi, millele saab rakendada reduktsioonireeglit nim. reedeiks.
- Ilma ühtegi reedeksita term on normaalkujul.
- Näide

