

Kombinaatorloogika

- Väide: Olgu $M(\vec{x})$ mingi λ -term mis sisaldab vabu muutujaid $\vec{x}$. Siis leidub term F selline, et $F \vec{x} = M(\vec{x})$.
- Kombinaatortermide süntaks

$$E ::= \mathbf{K} \mid \mathbf{S} \mid (E_1 E_2)$$

- Reduktsioonid

$$\begin{array}{ll} \mathbf{I} x & \longrightarrow x \\ \mathbf{K} x y & \longrightarrow x \\ \mathbf{S} f g x & \longrightarrow f x (g x) \end{array}$$

- Identsuskombinaator on teistest defineeritav: $\mathbf{SKK} = \mathbf{I}$

Teooria CL

- Aksioomid

$$P = P$$

$$\mathbf{K} \ P \ Q = P$$

$$\mathbf{S} \ P \ Q \ R = P \ R \ (Q \ R)$$

- Tuletusreeglid

$$\frac{\frac{P = Q}{Q = P}}{\frac{P = Q \quad Q = R}{P = R}}$$

$$\frac{\frac{P = Q}{PR = QR}}{\frac{P = Q}{RP = RQ}}$$

Kombinaatorloogika ja λ -arvutus

- $CL \Rightarrow \Lambda$

$$\mathbf{I} \equiv \lambda x. x$$

$$\mathbf{K} \equiv \lambda x y. x$$

$$\mathbf{S} \equiv \lambda f g x. f x (g x)$$

- Abstraktsioon:

$$[x] x \equiv \mathbf{I}$$

$$[x] y \equiv \mathbf{K} y$$

$$[x] c \equiv \mathbf{K} c$$

$$[x] (E_1 E_2) \equiv \mathbf{S} ([x] E_1) ([x] E_2)$$

Kombinaatorloogika ja λ -arvutus

- $\Lambda \Rightarrow CL$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}[[x]] &= x \\
 \mathcal{C}[[c]] &= c \\
 \mathcal{C}[[E_1 E_2]] &= (\mathcal{C}[[E_1]]) (\mathcal{C}[[E_2]]) \\
 \mathcal{C}[[\lambda x. E]] &= [x] (\mathcal{C}[[E]])
 \end{aligned}$$

- Näide:

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{C}[[\lambda x y. y x]] \\
 &= [x] ([y] (y x)) \\
 &= [x] (\mathbf{S} ([y] y) ([y] x)) \\
 &= [x] (\mathbf{S} \mathbf{I} (\mathbf{K} x)) \\
 &= \mathbf{S} ([x] \mathbf{S} \mathbf{I}) ([x] \mathbf{K} x) \\
 &= \mathbf{S} (\mathbf{S} ([x] \mathbf{S}) ([x] \mathbf{I})) (\mathbf{S} ([x] \mathbf{K}) ([x] x)) \\
 &= \mathbf{S} (\mathbf{S} (\mathbf{K} \mathbf{S}) (\mathbf{K} \mathbf{I})) (\mathbf{S} (\mathbf{K} \mathbf{K}) \mathbf{I})
 \end{aligned}$$

Kombinaatorloogika ja λ -arvutus

- Lemma: $CL \vdash P = Q \implies \lambda \vdash P_\lambda = Q_\lambda$
- Vastupidine ei kehti!! (Näiteks: $SK \neq KI$)
- Curry aksioomid:

$$K = S(S(KS)(S(KK)K))(K(SKK))$$

$$S = S(S(KS)(S(K(S(KS))))(S(K(S(KK)))S)))(K(K(SKK)))$$

$$S(S(KS)(S(KK)(S(KS)K)))(KK) = S(KK)$$

$$S(KS)(S(KK)) = S(KK)(S(S(KS)(S(KK)(SKK)))(K(SKK)))$$

$$S(K(S(KS)))(S(KS)(S(KS)))$$

$$= S(S(KS)(S(KK)(S(KS)(S(K(S(KS)))S))))(KS)$$

Optimiseerimised

- Kombinaatortermi suurus on eksponentsiaalne esialgse termi argumentide arvust!
- Kombinaatorid **B** ja **C**

$$\mathbf{B} \equiv \mathbf{S}(\mathbf{KS})\mathbf{K}$$

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{S}(\mathbf{BS}(\mathbf{BKS}))(\mathbf{KK})$$

- Reduktsioonid

$$\mathbf{B} \ f \ g \ x \longrightarrow f \ (g \ x)$$

$$\mathbf{C} \ f \ g \ x \longrightarrow f \ x \ g$$

Optimiseerimised

- Optimiseerimisreeglid

$$\mathbf{S} (\mathbf{K} p) (\mathbf{K} q) = \mathbf{K} (p q)$$

$$\mathbf{S} (\mathbf{K} p) \mathbf{I} = p$$

$$\mathbf{S} (\mathbf{K} p) q = \mathbf{B} p q$$

$$\mathbf{S} p (\mathbf{K} q) = \mathbf{C} p q$$

- Näide:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[(\lambda x y. y x)] &= [x] (\mathbf{S} \mathbf{I} (\mathbf{K} x)) \\ &= [x] (\mathbf{C} \mathbf{I} x) \\ &= \mathbf{S} ([x](\mathbf{C} \mathbf{I}) ([x]x)) \\ &= \mathbf{S} (\mathbf{S} (\mathbf{K} \mathbf{C}) (\mathbf{K} \mathbf{I})) \mathbf{I} \\ &= \mathbf{S} (\mathbf{K} (\mathbf{C} \mathbf{I})) \mathbf{I} \\ &= \mathbf{C} \mathbf{I} \end{aligned}$$

Optimiseerimised

- Optimiseeritud kombinaatortermi suurus on esialgse termi ruut!

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}[\lambda x_1. p \ q] &= \mathbf{S} \ p_1 \ q_1 \\
 \mathcal{C}[\lambda x_2 x_1. p \ q] &= \mathbf{S} \ (\mathbf{B} \ \mathbf{S} \ p_2) \ q_2 \\
 \mathcal{C}[\lambda x_3 x_2 x_1. p \ q] &= \mathbf{S} \ (\mathbf{B} \ \mathbf{S} \ (\mathbf{B} \ (\mathbf{B} \ \mathbf{S}) \ p_3)) \ q_3 \\
 \mathcal{C}[\lambda x_4 x_3 x_2 x_1. p \ q] &= \mathbf{S} \ (\mathbf{B} \ \mathbf{S} \ (\mathbf{B} \ (\mathbf{B} \ \mathbf{S}) \ (\mathbf{B} \ (\mathbf{B} \ (\mathbf{B} \ \mathbf{S})) \ p_4))) \ q_4
 \end{aligned}$$

- Turneri kombinaatorid

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}' \ c \ f \ g \ x &\longrightarrow c \ (f \ x) \ (g \ x) \\
 \mathbf{B}' \ c \ f \ g \ x &\longrightarrow c \ f \ (g \ x) \\
 \mathbf{C}' \ c \ f \ g \ x &\longrightarrow c \ (f \ x) \ g \\
 \mathbf{B}^* \ c \ f \ g \ x &\longrightarrow c \ (f \ (g \ x))
 \end{aligned}$$

Optimiseerimised

- Optimiseerimisreeglid

$$\mathbf{S} (\mathbf{K} p) (\mathbf{K} q) = \mathbf{K} (p q)$$

$$\mathbf{S} (\mathbf{K} p) \mathbf{I} = p$$

$$\mathbf{S} (\mathbf{K} p) (\mathbf{B} q r) = \mathbf{B}^* p q r$$

$$\mathbf{S} (\mathbf{K} p) q = \mathbf{B} p q$$

$$\mathbf{S} (\mathbf{B} p q) (\mathbf{K} r) = \mathbf{C}' p q r$$

$$\mathbf{S} p (\mathbf{K} q) = \mathbf{C} p q$$

$$\mathbf{S} (\mathbf{B} p q) r = \mathbf{S}' p q r$$