Funktsionaalprogrammeerimine

Varmo Vene
Jevgeni Kabanov

Arvutiteaduse Instituut
Tartu Ülikool

EMAIL: varmo@cs.ut.ee
WWW: http://www.cs.ut.ee/~varmo/FP2007/
LIST: ati.pk@lists.ut.ee

Kursuse plaan

- λ-arvutus
  - Reduktsioon, Church-Rosseri teoreemid
  - Kombinaatorloogika
  - Arvutatavus, Churchi tees
- Tüübiteooria elemendid
  - Tüübitud λ-arvutus, Curry-Howard isomorfism
  - 2-järku loogikad, polümorfne λ-arvutus
  - Hindley-Milneri tüübisüsteem
- Haskell-programmeerimine "edasjõudnutele"
- Ettekanded

Kirjandus

1. P. Hudak. *The Haskell School of Expression*. Cambridge University Press, 2000.
2. R. L. Page. *Two Dozen Short Lessons in Haskell*. Uni. of Oklahoma, 1997.
3. C. Hankin. *Lambda Calculi - A guide for computer scientists*. Oxford University Press, 1994.
4. M. H. Sorensen, P. Urzyczyn. *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism*. DIKU Rapport 98/14, 1998.

Lambda-arvutus

λ-termide süntaks

$$
\begin{array}{rcll}
E & ::= & V & \text{muutuja} \\
 & | & (E_1\ E_2) & \text{aplikatsioon} \\
 & | & (\lambda V.\ E) & \text{abstraktsioon}
\end{array}
$$

Näiteid λ-termidest

$$
\begin{array}{ll}
(\lambda x.\ x) & (((\lambda x.\ (\lambda f.\ (f\ x)))\ y)(\lambda z.\ z)) \\
(\lambda x.\ y) & (\lambda x.\ ((\mathbf{add}\ x)\ \underline{1}))
\end{array}
$$

Sulgudest hoidumine

$$
\begin{array}{lcl}
E_1\ E_2\ \ldots\ E_n & \equiv & ((\ldots(E_1\ E_2)\ldots)E_n) \\
\lambda V.\ E_1\ E_2\ \ldots\ E_n & \equiv & (\lambda V.\ (E_1\ E_2\ \ldots\ E_n)) \\
\lambda V_1\ V_2\ \ldots\ V_n.\ E & \equiv & (\lambda V_1.\ (\lambda V_2.\ (\ldots(\lambda V_n.\ E)\ldots))
\end{array}
$$

Lambda-arvutus

Vabad ja seotud muutujad

Muutuja x on vaba λ-termis E (so. $x \in \mathrm{FV}(E)$), kui ta ei asu sümboli λx mõjupiirkonnas. Vastasel korral on x seotud.

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{FV}(x) & = & \{x\} \\ \mathrm{FV}(E_1\ E_2) & = & \mathrm{FV}(E_1) \cup \mathrm{FV}(E_2) \\ \mathrm{FV}(\lambda x.\ E) & = & \mathrm{FV}(E) - \{x\} \end{array}$$

λ-termi E nimetatakse kinniseks kui $\mathrm{FV}(E) = \emptyset$

Näide

$$(\lambda x.\ \underset{\text{vaba}}{y}\ \underset{\text{seotud}}{x})\ (\lambda y.\ \underset{\text{vaba}}{x}\ \underset{\text{seotud}}{y})$$

Lambda-arvutus

Vabad muutujad

```haskell
import List (union, delete)

type Var  = String
data Term = Var Var
          | App Term Term
          | Lam Var Term

freeVars :: Term -> [Var]
freeVars (Var x)       = [x]
freeVars (App e1 e2) = freeVars e1 `union` freeVars e2
freeVars (Lam x e)     = delete x (freeVars e)
```

Teooria λ

Aksioomid

$$M = M \qquad\qquad (\lambda x.\ M)\ N = M[N/x] \quad (\beta)$$

Tuletusreeglid

$$\frac{M = N}{N = M} \qquad\qquad \frac{M = N}{M\,Z = N\,Z}$$

$$\frac{M = N \quad N = L}{M = L} \qquad\qquad \frac{M = N}{Z\,M = Z\,N}$$

$$\frac{M = N}{\lambda x.\ M = \lambda x.\ N}\ (\xi)$$

NB!

Relatsiooni $=$ nimetatakse konversiooniks.

Teooria λ

β - konversioon

Vastab funktsiooni väljakutse väärtustamisele!

Näited

$$\begin{array}{lcl}
(\lambda x.\ f\ x)\ E & = & f\ E \\
(\lambda x\ y.\ \mathbf{add}\ x\ y)\ \underline{3} & = & \lambda y.\ \mathbf{add}\ \underline{3}\ y \\
(\lambda y.\ \mathbf{add}\ \underline{3}\ y)\ \underline{4} & = & \mathbf{add}\ \underline{3}\ \underline{4} \\
(\lambda x\ y.\ \mathbf{add}\ x\ y)(\mathrm{square}\ y) & \neq & \lambda y.\ \mathbf{add}\ (\mathrm{square}\ y)\ y
\end{array}$$

Teooria λ

Püsipunktiteoreem

$$\forall F \in \Lambda,\ \exists X \in \Lambda\ .\ F\,X = X$$

Tõestus

Olgu $W \equiv \lambda x.\ F(x\,x)$ ja $X \equiv W\,W$. Siis

$$X \equiv W\,W \equiv (\lambda x.\ F(x\,x))\,W = F(W\,W) \equiv F\,X$$

Näited

term	tema püsipunkt
$\lambda x\,y.\ x\,y$	$(\lambda x\,y.\ (x\,x)\,y)\,(\lambda x\,y.\ (x\,x)\,y)$
$\lambda x.\ x$	$(\lambda x.\ x\,x)\,(\lambda x.\ x\,x)$

Teooria λ

α-kongruents

Term M on α-kongruentne termiga N (tähistame $M \equiv_\alpha N$), kui M ja N on identsed muutujate ümbernimetamise täpsuseni.

Näited

$$
\begin{array}{lcl}
\lambda x.\ x & \equiv_\alpha & \lambda y.\ y \\
\lambda x.\ f\ x & \equiv_\alpha & \lambda z.\ f\ z \\
\lambda x.\ (\lambda y.\ y)\ x & \equiv_\alpha & \lambda y.\ (\lambda y.\ y)\ y \\
\lambda x\ y.\ \mathbf{add}\ x\ y & \not\equiv_\alpha & \lambda y\ y.\ \mathbf{add}\ y\ y
\end{array}
$$

Konventsioon

Kõik seotud muutujad on vabadest muutujatest erinevad.

Teooria λ

Substitutsioon

Muutuja x substitutsiooniks termiga E nimetatakse muutuja x kõigi vabade esinemiste asendamist termiga E selliselt, et kõik termi E vabad muutujad on ka pärast asendamist vabad.

Substitutsiooni definitsioon

E	$E[E'/x]$
x	E'
y	y
$E_1\ E_2$	$E_1[E'/x]\ E_2[E'/x]$
$\lambda y.\ E_1$	$\lambda y.\ E_1[E'/x]$

Substitutsioon

Definitsioon Haskellis (1. katse)

$$
\begin{array}{l}
subst :: Term \to (Var, Term) \to Term \\
subst\ (Var\ y)\ (x, e') \\
\quad \mid x \equiv y \qquad\qquad\qquad = e' \\
\quad \mid otherwise \qquad\qquad = Var\ y \\
subst\ (App\ e1\ \ e2)\ (x, e') = App\ (subst\ e1\ \ (x, e'))\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (subst\ e2\ \ (x, e'))\\
subst\ (Lam\ y\ e1)\ \ (x, e') = Lam\ y\ (subst\ e1\ \ (x, e'))
\end{array}
$$

NB!

Ei tööta korrektselt, kuna ei ole tagatud et vabu muutujaid termis e' ei seotaks substitueerimise käigus.

Substitutsioon

Substitutsiooni definitsioon a'la Church

E	$E[E'/x]$
x	E'
y	y
$E_1 E_2$	$E_1[E'/x]\ E_2[E'/x]$
$\lambda x.\ E_1$	$\lambda x.\ E_1$
$\lambda y.\ E_1 \quad (y \notin \mathrm{FV}(E'))$	$\lambda y.\ E_1[E'/x]$
$\lambda y.\ E_1 \quad (y \in \mathrm{FV}(E'))$	$\lambda z.\ E_1[z/y][E'/x]$
	z on uus muutuja

Substitutsioon

Definitsioon Haskellis (2. katse)

$$
\begin{aligned}
&\mathit{subst} :: \mathit{Term} \to (\mathit{Var}, \mathit{Term}) \to \mathit{Term}\\
&\mathit{subst}\ (\mathit{Var}\ y)\ (x, e') \mid x \equiv y \qquad\ \ = e'\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \mid \mathit{otherwise} = \mathit{Var}\ y\\
&\mathit{subst}\ (\mathit{App}\ e1\ \ e2)\ (x, e')\\
&\qquad\qquad\quad = \mathit{App}\ (\mathit{subst}\ e1\ (x, e'))\ (\mathit{subst}\ e2\ (x, e'))\\
&\mathit{subst}\ (\mathit{Lam}\ y\ e1)\ (x, e')\\
&\quad \mid x \equiv y \qquad\quad = \mathit{Lam}\ x\ e1\\
&\quad \mid \mathit{notElem}\ x\ (\mathit{freeVars}\ e1)\\
&\qquad\qquad\qquad = \mathit{Lam}\ y\ (\mathit{subst}\ e1\ (x, e'))\\
&\quad \mid \mathit{otherwise} = \mathit{Lam}\ z\ (\mathit{subst}\ (\mathit{subst}\ e1\ (y, \mathit{Var}\ z))\ (x, e'))\\
&\quad\ \ \mathbf{where}\ z = \mathit{newVar}\ ()\quad \text{-- ???}
\end{aligned}
$$

NB!

Aga *newVar* pole defineeritav funktsioon!

Substitutsioon

Definitsioon Haskellis (3. katse)

$$
\begin{array}{l}
\mathit{subst} :: \mathit{Term} \to (\mathit{Var}, \mathit{Term}) \to \mathit{Int} \to (\mathit{Term}, \mathit{Int}) \\
\mathit{subst}\ (\mathit{Var}\ y)\ (x, e')\ i \mid x \equiv y \qquad = (e', i) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mid \mathit{otherwise} = (\mathit{Var}\ y, i) \\
\mathit{subst}\ (\mathit{App}\ e1\ \ e2)\ (x, e')\ i = \mathbf{let}\ (e1', i1) = \mathit{subst}\ e1\ (x, e')\ i \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (e2', i2) = \mathit{subst}\ e2\ (x, e')\ i1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mathbf{in}\ (\mathit{App}\ e1'\ e2', i2) \\
\mathit{subst}\ (\mathit{Lam}\ y\ e1)\ (x, e')\ i \\
\quad \mid x \equiv y \qquad\quad = (\mathit{Lam}\ x\ e1, i) \\
\quad \mid \mathit{notElem}\ x\ (\mathit{freeVars}\ e1) \\
\qquad\qquad\qquad = \mathbf{let}\ (e1', i1) \ \ = \mathit{subst}\ e1\ (x, e')\ i \\
\qquad\qquad\qquad\quad\ \mathbf{in}\ (\mathit{Lam}\ y\ e1', i1) \\
\quad \mid \mathit{otherwise} = \mathbf{let}\ (z, i') \qquad = \mathit{newVar}\ i \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (e1', i1) \ \ = \mathit{subst}\ e1\ (y, \mathit{Var}\ z)\ i' \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (e1'', i1') = \mathit{subst}\ e1'\ (x, e')\ i1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad\ \mathbf{in}\ (\mathit{Lam}\ y\ e1', i1')
\end{array}
$$

Substitutsioon

Substitutsiooni lemma

Kui x ja y on erinevad muutujad ning $x \notin \mathrm{FV}(L)$, siis

$$M[N/x][L/y] \equiv M[L/y][N[L/y]/x]$$

Substitutsiooni omadusi

$$\begin{array}{lcl} M = M' & \Rightarrow & M[N/x] = M'[N/x] \\ N = N' & \Rightarrow & M[N/x] = M[N'/x] \end{array}$$

Ilmutatud viidatavus (Leibniz)

Olgu $C[\cdot]$ mingi kontekst, siis

$$M = N \quad \Rightarrow \quad C[M] = C[N]$$

Ekstensionaalsus

Teooria $\lambda + \text{ext}$

$$\frac{M\,x = N\,x}{M = N} \qquad x \notin \mathrm{FV}(M\,N) \qquad (\mathbf{ext})$$

Teooria $\lambda + \eta$

$$\lambda x.\ M\,x = M \qquad x \notin \mathrm{FV}(M) \qquad (\eta)$$

Näited

$$\begin{array}{lcl} \lambda x.\ (\lambda y.\ y)\ x & = & \lambda y.\ y \\ \lambda x.\ \mathbf{add}\ x & = & \mathbf{add} \\ \lambda x.\ \mathbf{add}\ x\ x & \neq & \mathbf{add}\ x \end{array}$$

Lemma

Teooriad $\lambda + \text{ext}$ ja $\lambda + \eta$ on ekvivalentsed.

Reduktsioon

Mõisted

- Reduktsioon on ainult vasakult paremale rakendatav konversioon; paremalt vasakule — ekspansioon.
- Alamtermi, millele saab rakendada reduktsioonireeglit nim. reedeksiks.
- Ilma ühtegi reedeksita term on normaalkujul.

Näide

$$\underbrace{\overbrace{(\lambda x.\ \underset{\beta\text{-reedeks}}{\underline{(\lambda x.\ x)\ (\lambda x.\ x)}}\ x)}^{\eta\text{-reedeks}}\ \underline{1}}_{\beta\text{-reedeks}}$$