Lambda-arvutus

Lambda-arvutus

λ-termide süntaks

$$
\begin{array}{rcll}
E & ::= & V & \text{muutuja} \\
 & | & (E_1\ E_2) & \text{aplikatsioon} \\
 & | & (\lambda V.\ E) & \text{abstraktsioon}
\end{array}
$$

Näiteid λ-termidest

$$
\begin{array}{ll}
(\lambda x.\ x) & (((\lambda x.\ (\lambda f.\ (f\ x)))\ y)(\lambda z.\ z)) \\
(\lambda x.\ y) & (\lambda x.\ ((\mathbf{add}\ x)\ \underline{1}))
\end{array}
$$

Sulgudest hoidumine

$$
\begin{array}{lcl}
E_1\ E_2\ \ldots\ E_n & \equiv & ((\ldots(E_1\ E_2)\ldots)E_n) \\
\lambda V.\ E_1\ E_2\ \ldots\ E_n & \equiv & (\lambda V.\ (E_1\ E_2\ \ldots\ E_n)) \\
\lambda V_1\ V_2\ \ldots\ V_n.\ E & \equiv & (\lambda V_1.\ (\lambda V_2.\ (\ldots(\lambda V_n.\ E)\ldots)))
\end{array}
$$

Lambda-arvutus

Vabad ja seotud muutujad

Muutuja x on vaba λ-termis E (so. $x \in \mathrm{FV}(E)$), kui ta ei asu sümboli λx mõjupiirkonnas. Vastasel korral on x seotud.

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{FV}(x) & = & \{x\} \\ \mathrm{FV}(E_1\ E_2) & = & \mathrm{FV}(E_1) \cup \mathrm{FV}(E_2) \\ \mathrm{FV}(\lambda x.\ E) & = & \mathrm{FV}(E) - \{x\} \end{array}$$

λ-termi E nimetatakse kinniseks kui $\mathrm{FV}(E) = \emptyset$

Näide

$$(\lambda x.\ y\ x)\ (\lambda y.\ x\ y)$$

Lambda-arvutus

Vabad ja seotud muutujad

Muutuja x on vaba λ-termis E (so. $x \in \mathrm{FV}(E)$), kui ta ei asu sümboli λx mõjupiirkonnas. Vastasel korral on x seotud.

$$
\begin{array}{lcl}
\mathrm{FV}(x) & = & \{x\} \\
\mathrm{FV}(E_1\ E_2) & = & \mathrm{FV}(E_1) \cup \mathrm{FV}(E_2) \\
\mathrm{FV}(\lambda x.\ E) & = & \mathrm{FV}(E)\ -\ \{x\}
\end{array}
$$

λ-termi E nimetatakse kinniseks kui $\mathrm{FV}(E) = \emptyset$

Näide

$$(\lambda x.\ \underset{\text{vaba}}{\underset{\uparrow}{y}}\ \underset{\text{seotud}}{\underset{\uparrow}{x}})\ (\lambda y.\ \underset{\text{vaba}}{\underset{\uparrow}{x}}\ \underset{\text{seotud}}{\underset{\uparrow}{y}})$$

Teooria λ

Aksioomid

$$M = M \qquad\qquad (\lambda x.\, M)\, N = M[N/x] \quad (\beta)$$

Tuletusreeglid

$$\frac{M = N}{N = M} \qquad\qquad \frac{M = N}{MZ = NZ}$$

$$\frac{M = N \quad N = L}{M = L} \qquad\qquad \frac{M = N}{ZM = ZN}$$

$$\frac{M = N}{\lambda x.\, M = \lambda x.\, N}\ (\xi)$$

NB!

Relatsiooni = nimetatakse konversiooniks.

Teooria λ

β - konversioon

Vastab funktsiooni väljakutse väärtustamisele!

Näited

$$
\begin{array}{lcl}
(\lambda x.\, f\ x)\ E & = & f\ E \\
(\lambda x\, y.\, \mathbf{add}\ x\ y)\ \underline{3} & = & \lambda y.\, \mathbf{add}\ \underline{3}\ y \\
(\lambda y.\, \mathbf{add}\ \underline{3}\ y)\ \underline{4} & = & \mathbf{add}\ \underline{3}\ \underline{4} \\
(\lambda x\, y.\, \mathbf{add}\ x\ y)(\mathtt{square}\ y) & \neq & \lambda y.\, \mathbf{add}\ (\mathtt{square}\ y)\ y
\end{array}
$$

Teooria λ

Püsipunktiteoreem

$$\forall F \in \Lambda,\ \exists X \in \Lambda\ .\ FX = X$$

Tõestus

Olgu $W \equiv \lambda x.\ F(xx)$ ja $X \equiv WW$. Siis

$$X \equiv WW \equiv (\lambda x.\ F(xx))\ W = F(WW) \equiv FX$$

Näited

term	tema püsipunkt
$\lambda xy.\ xy$	$(\lambda xy.\ (xx)\ y)\ (\lambda xy.\ (xx)\ y)$
$\lambda x.\ x$	$(\lambda x.\ xx)\ (\lambda x.\ xx)$

Teooria λ

α-kongruents

Term M on α-kongruentne termiga N (tähistame $M \equiv_\alpha N$), kui M ja N on identsed muutujate ümbernimetamise täpsuseni.

Näited

$$\begin{array}{lcl}
\lambda x.\, x & \equiv_\alpha & \lambda y.\, y \\
\lambda x.\, f\ x & \equiv_\alpha & \lambda z.\, f\ z \\
\lambda x.\, (\lambda y.\, y)\ x & \equiv_\alpha & \lambda y.\, (\lambda y.\, y)\ y \\
\lambda x\ y.\, \mathbf{add}\ x\ y & \not\equiv_\alpha & \lambda y\ y.\, \mathbf{add}\ y\ y
\end{array}$$

Konventsioon

Kõik seotud muutujad on vabadest muutujatest erinevad.

Teooria λ

Substitutsioon

Muutuja x substitutsiooniks termiga E nimetatakse muutuja x kõigi vabade esinemiste asendamist termiga E selliselt, et kõik termi E vabad muutujad on ka pärast asendamist vabad.

Substitutsiooni definitsioon

E	$E[E'/x]$
x	E'
y	y
$E_1\ E_2$	$E_1[E'/x]\ E_2[E'/x]$
$\lambda y.\ E_1$	$\lambda y.\ E_1[E'/x]$

Substitutsioon

Substitutsiooni definitsioon a'la Church

E	$E[E'/x]$
x	E'
y	y
$E_1 E_2$	$E_1[E'/x]\ E_2[E'/x]$
$\lambda x.\ E_1$	$\lambda x.\ E_1$
$\lambda y.\ E_1\quad (y \notin \mathrm{FV}(E'))$	$\lambda y.\ E_1[E'/x]$
$\lambda y.\ E_1\quad (y \in \mathrm{FV}(E'))$	$\lambda z.\ E_1[z/y][E'/x]$ z on uus muutuja

Substitutsioon

Substitutsiooni lemma

Kui x ja y on erinevad muutujad ning $x \notin \mathrm{FV}(L)$, siis

$$M[N/x][L/y] \equiv M[L/y][N[L/y]/x]$$

Substitutsiooni omadusi

$$\begin{array}{lcl} M = M' & \Rightarrow & M[N/x] = M'[N/x] \\ N = N' & \Rightarrow & M[N/x] = M[N'/x] \end{array}$$

Ilmutatud viidatavus (Leibniz)

Olgu $C[\cdot]$ mingi kontekst, siis

$$M = N \quad \Rightarrow \quad C[M] = C[N]$$

Ekstensionaalsus

Teooria $\lambda + \mathbf{ext}$

$$\frac{M\,x = N\,x}{M = N} \qquad x \notin \mathrm{FV}(MN) \qquad (\mathbf{ext})$$

Teooria $\lambda + \eta$

$$\lambda x.\ M\,x = M \qquad x \notin \mathrm{FV}(M) \qquad (\eta)$$

Näited

$$\begin{array}{lcl} \lambda x.\ (\lambda y.\ y)\ x & = & \lambda y.\ y \\ \lambda x.\ \mathbf{add}\ x & = & \mathbf{add} \\ \lambda x.\ \mathbf{add}\ x\ x & \neq & \mathbf{add}\ x \end{array}$$

Lemma

Teooriad $\lambda + \mathbf{ext}$ ja $\lambda + \eta$ on ekvivalentsed.

Reduktsioon

Mõisted

- Reduktsioon on ainult vasakult paremale rakendatav konversioon; paremalt vasakule — ekspansioon.
- Alamtermi, millele saab rakendada reduktsioonireeglit nim. reedeksiks.
- Ilma ühtegi reedeksita term on normaalkujul.

Näide

$$\underbrace{\overbrace{(\lambda x.\ \underset{\beta\text{-reedeks}}{\underline{(\lambda x.\ x)\ (\lambda x.\ x)}}\ x)}^{\eta\text{-reedeks}}\ z}_{\beta\text{-reedeks}}$$

Reduktsioon

Reduktsioon

Mõisted

- Relatsioon $R \subseteq \Lambda^2$ on kooskõlaline kui iga termi $M, N \in \Lambda$ ja üheaugulise konteksti $C[\cdot]$ korral:

$$(M, N) \in R \implies (C[M], C[N]) \in R$$

- Relatsiooni $R \subseteq \Lambda^2$ nimatatakse võrduseks (kongruentsiks) kui ta on kooskõlaline ekvivalentsusrelatsioon.
- Relatsiooni $R \subseteq \Lambda^2$ nimetatakse reduktsiooniks kui ta on kooskõlaline, refleksiivne ja transitiivne.

Reduktsioon

Ühesammuline R-reduktsioon

$$\frac{(M,N) \in R}{M \longrightarrow_R N} \qquad \frac{M \longrightarrow_R N}{MZ \longrightarrow_R NZ}$$

$$\frac{M \longrightarrow_R N}{\lambda x.\, M \longrightarrow_R \lambda x.\, N} \qquad \frac{M \longrightarrow_R N}{ZM \longrightarrow_R ZN}$$

R-reduktsioon

$$\frac{M \longrightarrow_R N}{M \Longrightarrow_R N} \qquad M \Longrightarrow_R M \qquad \frac{M \Longrightarrow_R N \quad N \Longrightarrow_R L}{M \Longrightarrow_R L}$$

R-konversioon

$$\frac{M \Longrightarrow_R N}{M =_R N} \qquad \frac{N =_R M}{M =_R N} \qquad \frac{M =_R N \quad N =_R L}{M =_R L}$$

Reduktsioon

Väide

Relatsioonid $\longrightarrow_R$, $\Longrightarrow_R$ ja $=_R$ on kooskõlalised.

Lemma

$$N \Longrightarrow_R N' \quad \Longrightarrow \quad M[N/x] \Longrightarrow_R M[N'/x]$$

NB!

Ei kehti $\longrightarrow_R$ korral! Näiteks kui $M \equiv x\,x$, $N \equiv (\lambda y.y)z$ ja $N' \equiv z$, siis

$$N \longrightarrow_\beta N', \quad \text{aga} \quad (\lambda y.y)z((\lambda y.y)z) \not\longrightarrow_\beta zz$$

Reduktsioon

Mõisted

- Termi M nimetatakse R-reedeksisks kui $\exists N.(M, N) \in R$. Termi N nimetatakse termi M R-kontraktumiks.
- Term M on R-normaalkujul kui ta sisalda ühtegi R-reedeksit.
- Termi N nimetatakse termi M R-normaalkujuks kui N on R-normaalkujul ja $M =_R N$.

Reduktsioon

Väide

$M \longrightarrow_R N \iff M \equiv C[P], N \equiv C[Q]$ ja $(P, Q) \in R$.

Järeldus

Olgu M R-normaalkujul, siis $M \Longrightarrow_R N \implies M \equiv N$.

NB!

Sellest et $\forall N[M \Longrightarrow_R N \implies M \equiv N]$ ei järeldu, et term M oleks R-normaalkujul.

Church-Rosseri teoreem

Mõisted

- Binaarne relatsioon $\triangleright$ on rombi omadusega ($\triangleright \models \Diamond$) kui

$$\forall M, M_1, M_2 [M \triangleright M_1 \wedge M \triangleright M_2 \implies \exists M_3 [M_1 \triangleright M_3 \wedge M_2 \triangleright M_3]]$$

- Relatsioon R on Church-Rosser (CR) kui $\Longrightarrow_R \models \Diamond$

Church-Rosseri teoreem

$$\mathrm{CR}(R) \wedge M =_R N \implies \exists Z [M \Longrightarrow_R Z \wedge N \Longrightarrow_R Z]$$

Järeldused

- Kui N on termi M R-normaalkuju, siis $M \Longrightarrow_R N$.
- Igal termil saab olla ülimalt üks normaalkuju.

Church-Rosseri teoreem

Lemma

$\rhd \models \Diamond \implies \rhd^* \models \Diamond$, kus $\rhd^*$ on $\rhd$ transitiivne sulund

Hiidreduktsioon (grand reduction)

$$M \Longrightarrow_1 M \qquad \frac{M \Longrightarrow_1 M' \quad N \Longrightarrow_1 N'}{MN \Longrightarrow_1 M'N'}$$

$$\frac{M \Longrightarrow_1 N}{\lambda x.\, M \Longrightarrow_1 \lambda x.\, N} \qquad \frac{M \Longrightarrow_1 M' \quad N \Longrightarrow_1 N'}{(\lambda x.M)N \Longrightarrow_1 M'[N'/x]}$$

Church-Rosseri teoreem

Lemma

- $M \Longrightarrow_1 M', N \Longrightarrow_1 N' \implies M[N/x] \Longrightarrow_1 M'[N'/x]$;
- $\lambda x.M \Longrightarrow_1 N \implies N \equiv \lambda x.M'$, kus $M \Longrightarrow_1 M'$;
- $MN \Longrightarrow_1 L$ järeldub:
  - kas $L \equiv M'N'$, kus $M \Longrightarrow_1 M'$ ja $N \Longrightarrow_1 N'$;
  - või $M \equiv \lambda x.P$, $L \equiv P'[N'/x]$, kus $P \Longrightarrow_1 P'$ ja $N \Longrightarrow_1 N'$.

Lemma

$\Longrightarrow_1 \models \Diamond$

Teoreem

$\Longrightarrow_\beta$ on $\Longrightarrow_1$ transitiivne sulund

Church-Rosseri teoreem

Mõisted

- Binaarne relatsioon $\triangleright$ on nõrgalt rombi omadusega kui iga M, M_1 ja M_2 korral

$$M \triangleright M_1 \land M \triangleright M_2 \implies \exists M_3 [M_1 \triangleright^*_= M_3 \land M_2 \triangleright^*_= M_3]$$

  kus $\triangleright^*_=$ on relatsiooni $\triangleright$ refleksiivne ja transitiivne sulund.
- Relatsioon R on nõrgalt Church-Rosser (WCR) kui $\longrightarrow_R$ on nõrgalt rombi omadusega.
- Relatsioon R on tugevalt normaliseeruv (SN) kui ühegi termi M korral ei leidu lõpmatut reduktsioonijada.

Newmanni lemma

$$\mathrm{SN} \land \mathrm{WCR} \Rightarrow \mathrm{CR}$$

Reduktsioonistrateegiad

Reduktsioonistrateegiad

Reduktsioonijärjekorrad

- Normaalkuju saavutamine sõltub reduktsiooni järjekorrast!
- Normaaljärjekord — alati redutseeritakse kõige välimine vasakpoolne reedeks

$$\underline{(\lambda x.y)((\lambda x.(xx))(\lambda x.(xx)))} \longrightarrow_\beta y$$

- Aplikatiivne järjekord — alati redutseeritakse kõige sisemine vasakpoolne reedeks

$$\begin{aligned} & (\lambda x.y)(\underline{(\lambda x.(xx))(\lambda x.(xx))}) \\ \longrightarrow_\beta \quad & (\lambda x.y)(\underline{(\lambda x.(xx))(\lambda x.(xx))}) \\ \ldots & \end{aligned}$$

Standardiseerimisteoreem

Märgendatud λ-termid

- $\Lambda_{\mathcal{A}}$ on märgendatud λ-termide hulk:
  - $x^a \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, kus $a \in \mathcal{A}$ ja x on muutuja;
  - $(\lambda x.M)^a \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, kus $a \in \mathcal{A}$ ja $M \in \Lambda_{\mathcal{A}}$;
  - $(MN)^a \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, kus $a \in \mathcal{A}$ ja $M, N \in \Lambda_{\mathcal{A}}$.
- Märgenduseks nimetatakse funktsiooni mis (märgendamata) termi iga alamtermiga seob märgendi.
- Märgendust nimetatakse algmärgenduseks kui erinevad alamtermid seotakse erinevate märgenditega.

Näide

$$((\lambda x.(x^1\, x^2)^3)^4\ (y^5\, z^6)^7)^8$$

Standardiseerimisteoreem

Märgendatud β-reegel

$$((\lambda x.M)^a N)^b = M[N/x]$$

Märgendatud substitutsioon

$$\begin{array}{lcl} x^a[N/x] & \equiv & N \\ y^a[N/x] & \equiv & y^a \\ (M_1 M_2)^a[N/x] & \equiv & (M_1[N/x] M_2[N/x])^a \\ (\lambda y.M)^a[N/x] & \equiv & (\lambda y.M[N/x])^a \end{array}$$

Näide

$$((\lambda x.(x^1 x^2)^3)^4 \; (y^5 z^6)^7)^8 \longrightarrow_\beta ((y^5 z^6)^7 \; (y^5 z^6)^7)^3$$

Standardiseerimisteoreem

Reedeksi jäägid

- Olgu $M \longrightarrow N$, $\mathcal{I}$ termi M märgendus, $\mathcal{J}$ termi N märgendus ning Δ redutseeritava reedeksi märgend ($M \longrightarrow^{\Delta} N$):
  - alamtermi $T \in Sub(N)$ nimetatakse alamtermi $S \in Sub(M)$ **järglaseks** kui $\mathcal{I}(S) = \mathcal{J}(T)$;
  - reedeksi järglast nimetatakse selle reedeksi **jäägiks**;
  - redutseeritud reedeksil ei ole ühtegi jääki.

Näide

$$
\begin{aligned}
&(\lambda xy.\underline{(\lambda zw.xz)y})MN \\
\longrightarrow_\beta\ &\underline{(\lambda y.\underline{(\lambda zw.Mz)y})N} \\
\longrightarrow_\beta\ &\underline{(\lambda zw.Mz)N} \\
\longrightarrow_\beta\ &\lambda w.MN
\end{aligned}
$$

Standardiseerimisteoreem

Peanormaalkujud

- Term $M \in \Lambda$ on peanormaalkujul (HNF) kui

$$M \equiv \lambda x_1 \dots x_n . x M_1 \dots M_m \qquad n, m \geqslant 0$$

- Kui $M \equiv \lambda x_1 \dots x_n . (\lambda x . M_0) M_1 \dots M_m$, kus $n \geqslant 0$ ja $m \geqslant 1$, siis alamtermi $(\lambda x . M_0) M_1$ nimetatakse peareedeksiks
- Term $M \in \Lambda$ on nõrgal peanormaalkujul (WHNF) kui

$$M \equiv \begin{cases} x M_1 \dots M_n & n \geqslant 0 \\ \lambda x . M & \end{cases}$$

Standardiseerimisteoreem

Standardreduktsioon

Standardreduktsiooniks nimatatakse reduktsioonijada

$$M_0 \longrightarrow^{\Delta_0} M_1 \longrightarrow^{\Delta_1} M_2 \longrightarrow^{\Delta_2} \dots$$

kus iga kahe reedeksi Δ_i ja Δ_j ($i > j$) korral Δ_i ei ole reedeksist Δ_j vasakul asuvate reedeksite jäägiks.

NB!

Normaaljärjekorras reduktsioon on standardreduktsioon!

Standardiseerimisteoreem

Lemma

$$M \Longrightarrow N \qquad \Rightarrow \qquad \exists Z[M \Longrightarrow_h Z \Longrightarrow_i N]$$

Standardiseerimisteoreem

$$M \Longrightarrow N \qquad \Rightarrow \qquad M \Longrightarrow_s N$$

Variatsioonid

Konstantidega lambda-arvutus

Konstantidega λ-arvutus

$$
\begin{array}{rcll}
E & ::= & V & \text{muutuja} \\
 & | & C & \text{konstant} \\
 & | & (E_1\ E_2) & \text{aplikatsioon} \\
 & | & (\lambda V.\ E) & \text{abstraktsioon}
\end{array}
$$

Iga konstandiga seotakse mingi arv δ-reduktsiooni reegleid.

Näide

Naturaalarvud $(0, 1, 2, \ldots)$ ja liitmine $(+)$

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
+\,0\,0 & \longrightarrow_\delta & 0 & +\,1\,0 & \longrightarrow_\delta & 1 \\
+\,0\,1 & \longrightarrow_\delta & 1 & +\,1\,1 & \longrightarrow_\delta & 2 \\
 & \ldots & & & \ldots &
\end{array}
$$

NB!

δ-reeglite lisamine võib kokkuvoolavuse ära rikkuda!

De Bruijn'i λ-arvutus

De Bruijn'i λ-termid

Muutujad on asendatud siduva λ kaugusega

$$
\begin{array}{lcll}
E & ::= & N & \text{muutuja} \\
 & | & (E_1\ E_2) & \text{aplikatsioon} \\
 & | & (\lambda\ E) & \text{abstraktsioon}
\end{array}
$$

Näited

$$
\begin{array}{lcl}
\lambda x.\, x & \leftrightarrow & \lambda 1 \\
\lambda x\, y.\, x\, y & \leftrightarrow & \lambda\lambda 21 \\
\lambda x\, y.\, x\, y\, (\lambda y.\, x\, y\, y) & \leftrightarrow & \lambda\lambda 21(\lambda 311) \\
\lambda x.\, x\, (\lambda y.\, x\, y\, y) & \leftrightarrow & \lambda 1(\lambda 211)
\end{array}
$$

De Bruijn'i λ-arvutus

β-konversioon

$$(\lambda M)\, N = M[N/1]$$

Substitutsiooni definitsioon

$$\begin{array}{rcll}
m[N/n] & = & m & \text{if } m < n \\
 & & m-1 & \text{if } m > n \\
 & & \mathit{shift}_{n,1}(N) & \text{if } m = n \\
(M_1\ M_2)[N/n] & = & (M_1[N/n])\ (M_2[N/n]) & \\
(\lambda\, M)[N/n] & = & \lambda(M[N/n+1]) & \\
 & & & \\
\mathit{shift}_{n,i}(j) & = & j & \text{if } j < i \\
 & & j+n-1 & \text{if } j \geqslant i \\
\mathit{shift}_{n,i}(N_1\ N_2) & = & \mathit{shift}_{n,i}(N_1)\ \mathit{shift}_{n,i}(N_2) & \\
\mathit{shift}_{n,i}(\lambda\, N) & = & \lambda\ \mathit{shift}_{n,i+1}(N) &
\end{array}$$

Kombinaatorloogika

Kombinaatorloogika

Väide

Olgu $M(\vec{x})$ mingi λ-term mis sisaldab vabu muutujaid $\vec{x}$. Siis leidub term F selline, et $F\vec{x} = M(\vec{x})$.

Kombinaatortermide süntaks

$$E \quad ::= \quad \mathbf{I} \mid \mathbf{K} \mid \mathbf{S} \mid (E_1 E_2)$$

Reduktsioonireeglid

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{I}\,x & \longrightarrow & x \\ \mathbf{K}\,x\,y & \longrightarrow & x \\ \mathbf{S}\,f\,g\,x & \longrightarrow & f\,x\,(g\,x) \end{array}$$

NB!

Identsuskombinaator on teistest defineeritav: $\mathbf{SKK} = \mathbf{I}$

Kombinaatorloogika

Teooria *CL*

- Aksioomid

$$P = P \qquad \mathbf{K}\, P\, Q = P \qquad \mathbf{S}\, P\, Q\, R = P\, R\, (Q\, R)$$

- Tuletusreeglid

$$\frac{P = Q}{Q = P} \qquad \frac{P = Q}{PR = QR}$$

$$\frac{P = Q \quad Q = R}{P = R} \qquad \frac{P = Q}{RP = RQ}$$

Kombinaatorloogika ja λ-arvutus

$CL \Rightarrow \Lambda$

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{I} & \equiv & \lambda x.\, x \\ \mathbf{K} & \equiv & \lambda x\, y.\, x \\ \mathbf{S} & \equiv & \lambda f\, g\, x.\, f\, x\, (g\, x) \end{array}$$

Abstraktsioon

$$\begin{array}{lcl} [x]\; x & \equiv & \mathbf{I} \\ [x]\; y & \equiv & \mathbf{K}\, y \\ [x]\; c & \equiv & \mathbf{K}\, c \\ [x]\; (E_1\;\; E_2) & \equiv & \mathbf{S}\; ([x]\;\, E_1)\; ([x]\;\, E_2) \end{array}$$

Kombinaatorloogika ja λ-arvutus

$\Lambda \Rightarrow CL$

$$
\begin{array}{lcl}
\mathscr{C}[[x]] & = & x \\
\mathscr{C}[[c]] & = & c \\
\mathscr{C}[[(E_1\ E_2)]] & = & (\mathscr{C}[[E_1]])\ (\mathscr{C}[[E_2]]) \\
\mathscr{C}[[(\lambda x.\ E)]] & = & [x]\ (\mathscr{C}[[E]])
\end{array}
$$

Näide

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\mathscr{C}[[(\lambda x\, y.\ y\ x)]]} \\
= & [x]\ ([y]\ (y\ x)) \\
= & [x]\ (\mathbf{S}\ ([y]\ y)\ ([y]\ x)) \\
= & [x]\ (\mathbf{S}\ \mathbf{I}\ (\mathbf{K}\ x)) \\
= & \mathbf{S}\ ([x]\ \mathbf{S}\ \mathbf{I})\ ([x]\ \mathbf{K}\ x) \\
= & \mathbf{S}\ (\mathbf{S}\ ([x]\ \mathbf{S})\ ([x]\ \mathbf{I}))\ (\mathbf{S}\ ([x]\ \mathbf{K})\ ([x]\ x)) \\
= & \mathbf{S}\ (\mathbf{S}\ (\mathbf{K}\ \mathbf{S})\ (\mathbf{K}\ \mathbf{I}))\ (\mathbf{S}\ (\mathbf{K}\ \mathbf{K})\ \mathbf{I})
\end{array}
$$

Kombinaatorloogika ja λ-arvutus

Lemma

$CL \vdash P = Q \implies \lambda \vdash P_\lambda = Q_\lambda$

NB!

Vastupidine ei kehti!! (Näiteks: $\mathbf{SK} \neq \mathbf{KI}$)

Curry aksioomid

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{K} = \mathbf{S(S(KS)(S(KK)K))(K(SKK))}\\
&\mathbf{S} = \mathbf{S(S(KS)(S(K(S(KS)))(S(K(S(KK)))S)))(K(K(SKK)))}\\
&\mathbf{S(S(KS)(S(KK)(S(KS)K)))(KK)} = \mathbf{S(KK)}\\
&\mathbf{S(KS)(S(KK))} = \mathbf{S(KK)(S(S(KS)(S(KK)(SKK)))(K(SKK)))}\\
&\mathbf{S(K(S(KS)))(S(KS)(S(KS)))}\\
&\qquad = \mathbf{S(S(KS)(S(KK)(S(KS)(S(K(S(KS)))S))))(KS)}
\end{aligned}
$$

Optimiseerimised

NB!

Kombinaatortermi suurus on eksponentsiaalne esialgse termi argumentide arvust!

Kombinaatorid **B** ja **C**

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{B} & \equiv & \mathbf{S}(\mathbf{KS})\mathbf{K} \\ \mathbf{C} & \equiv & \mathbf{S}(\mathbf{BS}(\mathbf{BKS}))(\mathbf{KK}) \end{array}$$

Reduktsioonireeglid

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{B}\, f\, g\, x & \longrightarrow & f\,(g\, x) \\ \mathbf{C}\, f\, g\, x & \longrightarrow & f\, x\, g \end{array}$$

Optimiseerimised

Optimiseerimisreeglid

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{S}\ (\mathbf{K}\ p)\ (\mathbf{K}\ q) & = & \mathbf{K}\ (p\ q) \\
\mathbf{S}\ (\mathbf{K}\ p)\ \mathbf{I} & = & p \\
\mathbf{S}\ (\mathbf{K}\ p)\ q & = & \mathbf{B}\ p\ q \\
\mathbf{S}\ p\ (\mathbf{K}\ q) & = & \mathbf{C}\ p\ q
\end{array}
$$

Näide

$$
\begin{array}{lcl}
\mathscr{C}[\![(\lambda x\, y.\ y\ x)]\!] & = & [x]\ (\mathbf{S}\ \mathbf{I}\ (\mathbf{K}\ x)) \\
 & = & [x]\ (\mathbf{C}\ \mathbf{I}\ x) \\
 & = & \mathbf{S}\ ([x](\mathbf{C}\ \mathbf{I})\ ([x]x)) \\
 & = & \mathbf{S}\ (\mathbf{S}\ (\mathbf{K}\ \mathbf{C})\ (\mathbf{K}\ \mathbf{I}))\ \mathbf{I} \\
 & = & \mathbf{S}\ (\mathbf{K}\ (\mathbf{C}\ \mathbf{I}))\ \mathbf{I} \\
 & = & \mathbf{C}\ \mathbf{I}
\end{array}
$$

Optimiseerimised

NB!

Optimiseeritud kombinaatortermi suurus on esialgse termi ruut!

$$
\begin{array}{lcl}
\mathscr{C}[\![\lambda x_1.p\ q]\!] & = & \mathbf{S}\ p_1\ q_1 \\
\mathscr{C}[\![\lambda x_2 x_1.p\ q]\!] & = & \mathbf{S}\ (\mathbf{B}\ \mathbf{S}\ p_2)\ q_2 \\
\mathscr{C}[\![\lambda x_3 x_2 x_1.p\ q]\!] & = & \mathbf{S}\ (\mathbf{B}\ \mathbf{S}\ (\mathbf{B}\ (\mathbf{B}\ \mathbf{S})\ p_3))\ q_3 \\
\mathscr{C}[\![\lambda x_4 x_3 x_2 x_1.p\ q]\!] & = & \mathbf{S}\ (\mathbf{B}\ \mathbf{S}\ (\mathbf{B}\ (\mathbf{B}\ \mathbf{S})\ (\mathbf{B}\ (\mathbf{B}\ (\mathbf{B}\ \mathbf{S}))\ p_4)))\ q_4
\end{array}
$$

Optimiseerimised

Turneri kombinaatorid

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{S}'\ c\ f\ g\ x & \longrightarrow & c\ (f\ x)\ (g\ x) \\
\mathbf{B}'\ c\ f\ g\ x & \longrightarrow & c\ f\ (g\ x) \\
\mathbf{C}'\ c\ f\ g\ x & \longrightarrow & c\ (f\ x)\ g \\
\mathbf{B}^{\star}\ c\ f\ g\ x & \longrightarrow & c\ (f\ (g\ x))
\end{array}
$$

Optimiseerimisreeglid

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{S}\ (\mathbf{K}\ p)\ (\mathbf{K}\ q) & = & \mathbf{K}\ (p\ q) \\
\mathbf{S}\ (\mathbf{K}\ p)\ \mathbf{I} & = & p \\
\mathbf{S}\ (\mathbf{K}\ p)\ (\mathbf{B}\ q\ r) & = & \mathbf{B}^{\star}\ p\ q\ r \\
\mathbf{S}\ (\mathbf{K}\ p)\ q & = & \mathbf{B}\ p\ q \\
\mathbf{S}\ (\mathbf{B}\ p\ q)\ (\mathbf{K}\ r) & = & \mathbf{C}'\ p\ q\ r \\
\mathbf{S}\ p\ (\mathbf{K}\ q) & = & \mathbf{C}\ p\ q \\
\mathbf{S}\ (\mathbf{B}\ p\ q)\ r & = & \mathbf{S}'\ p\ q\ r
\end{array}
$$

Arvutatavus ja Church’i tees

Andmete esitamine λ-arvutuses

Baaskombinaatorid

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{I} & \equiv & \lambda x.\, x \\ \mathbf{K} & \equiv & \lambda x\, y.\, x \\ \mathbf{S} & \equiv & \lambda f\, g\, x.\, f\, x\, (g\, x) \end{array}$$

“Astendamine”

$$\begin{array}{lcl} E^0\, E' & \equiv & E' \\ E^n\, E' & \equiv & \underbrace{E(E(\ldots(E}_{n \text{ tükki}}\ E')\ldots)) \end{array}$$

NB!

$$E^n (E\, E') \equiv E^{n+1} E' \equiv E\, (E^n E')$$

Tõeväärtused

Spetsifikatsioon

$$\begin{array}{lcl} \textbf{not true} & = & \textbf{false} \\ \textbf{not false} & = & \textbf{true} \end{array}$$

Definitsioon

$$\begin{array}{lcll} \textbf{true} & \equiv & \lambda xy.\ x & (\equiv \quad \mathbf{K}) \\ \textbf{false} & \equiv & \lambda xy.\ y & \\ \textbf{not} & \equiv & \lambda t.\ t\ \textbf{false true} & \end{array}$$

Näide

$$\begin{array}{lcl} \textbf{not true} & \equiv & (\lambda t.\ t\ \textbf{false true})\ \textbf{true} \\ & \longrightarrow & \textbf{true false true} \\ & \equiv & (\lambda x.\ \lambda y.\ x)\ \textbf{false true} \\ & \longrightarrow & (\lambda y.\ \textbf{false})\ \textbf{true} \\ & \longrightarrow & \textbf{false} \end{array}$$

Tingimuslause

Spetsifikatsioon

$$\begin{aligned} \textbf{cond true}\ E_1\ E_2 &= E_1 \\ \textbf{cond false}\ E_1\ E_2 &= E_2 \end{aligned}$$

Definitsioon

$$\textbf{cond} \equiv \lambda t\, x\, y.\ t\, x\, y$$

Näide

$$\begin{aligned} \textbf{cond false}\ E_1\ E_2 &\equiv (\lambda t\, x\, y.\ t\, x\, y)\ \textbf{false}\ E_1\ E_2 \\ &\Longrightarrow \textbf{false}\ E_1\ E_2 \\ &\equiv (\lambda x\, y.\ y)\ E_1\ E_2 \\ &\Longrightarrow E_2 \end{aligned}$$

Paarid ja ennikud

Paarid

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{fst} & \equiv & \lambda p.\, p\,\mathbf{true} \\
\mathbf{snd} & \equiv & \lambda p.\, p\,\mathbf{false} \\
(E_1, E_2) & \equiv & \lambda f.\, f\; E_1\; E_2
\end{array}
$$

Ennikud

$$
\begin{array}{lcl}
(E_1, \ldots, E_n) & \equiv & (E_1, (\ldots (E_{n-1}, E_n) \ldots)) \\
E \overset{n}{\downarrow} 1 & \equiv & \mathbf{fst}\; E \\
E \overset{n}{\downarrow} 2 & \equiv & \mathbf{fst}\; (\mathbf{snd}\; E) \\
 & \ldots & \\
E \overset{n}{\downarrow} i & \equiv & \mathbf{fst}\; (\mathbf{snd}^{i-1}\, E) \\
 & \ldots & \\
E \overset{n}{\downarrow} n & \equiv & \mathbf{snd}^{n-1}\; E
\end{array}
$$

Naturaalarvud

Standardnumbrid

$$
\begin{array}{lcllc}
\ulcorner 0 \urcorner & \equiv & \lambda x.\, x & (\equiv & \mathbf{I}) \\
\ulcorner n{+}1 \urcorner & \equiv & (\mathbf{false}, \ulcorner n \urcorner) & & \\
\mathbf{succ} & \equiv & \lambda n.\, (\mathbf{false}, n) & & \\
\mathbf{pred} & \equiv & \lambda n.\, n\, \mathbf{false} & (\equiv & \mathbf{snd}) \\
\mathbf{iszero} & \equiv & \lambda n.\, n\, \mathbf{true} & (\equiv & \mathbf{fst})
\end{array}
$$

Liitmine (?!)

$$
\mathbf{add} \quad = \quad \lambda x\, y.\, \mathbf{cond}(\mathbf{iszero}\ x)\ y\ (\mathbf{add}(\mathbf{pred}\ x)(\mathbf{succ}\ y))
$$

Naturaalarvud

Church'i numbrid

$$\begin{array}{lcl} \underline{n} & \equiv & \lambda f\, x.\, f^n\, x \\ \mathbf{succ} & \equiv & \lambda n.\, \lambda f\, x.\, n\, f\, (f\, x) \\ \mathbf{iszero} & \equiv & \lambda n.\, n\, (\lambda x.\, \mathbf{false})\, \mathbf{true} \\ \mathbf{add} & \equiv & \lambda m\, n.\, \lambda f\, x.\, m\, f\, (n\, f\, x) \end{array}$$

Näide

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{add}\, \underline{2}\, \underline{1} & \equiv & (\lambda m\, n.\, \lambda f\, x.\, m\, f\, (n\, f\, x))\, \underline{2}\, \underline{1} \\ & \Longrightarrow & \lambda f\, x.\, \underline{2}\, f\, (\underline{1}\, f\, x) \\ & \Longrightarrow & \lambda f\, x.\, f\, (f\, (\underline{1}\, f\, x)) \\ & \Longrightarrow & \lambda f\, x.\, f\, (f\, (f\, x)) \\ & \equiv & \underline{3} \end{array}$$

Korrutamine ja astendamine

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{mul} & \equiv & \lambda m\, n.\, \lambda f\, x.\, m\, (n\, f)\, x \\ \mathbf{exp} & \equiv & \lambda m\, n.\, \lambda f\, x.\, n\, m\, f\, x \end{array}$$

Naturaalarvud

Ühe lahutamine — abifunktsiooni spetsifikatsioon

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{prefn}\ f\ (\mathbf{true}, x) & = & (\mathbf{false}, x) \\
\mathbf{prefn}\ f\ (\mathbf{false}, x) & = & (\mathbf{false}, f\ x) \\
(\mathbf{prefn}\ f)^n\ (\mathbf{false}, x) & = & (\mathbf{false}, f^n\ x) \\
(\mathbf{prefn}\ f)^n\ (\mathbf{true}, x) & = & (\mathbf{false}, f^{n-1}\ x)
\end{array}$$

Ühe lahutamine — definitsioon

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{prefn} & \equiv & \lambda f\, p.\, (\mathbf{false}, (\mathbf{cond}\, (\mathbf{fst}\, p)\, (\mathbf{snd}\, p)\, (f\, (\mathbf{snd}\, p)))) \\
\mathbf{pred} & \equiv & \lambda n.\, \lambda f\, x.\, \mathbf{snd}\, (n\, (\mathbf{prefn}\, f)\, (\mathbf{true}, x))
\end{array}$$

Näide

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{pred}\ \underline{n}\ f\ x & = & \mathbf{snd}\ (\underline{n}\ (\mathbf{prefn}\ f)\ (\mathbf{true}, x)) \\
 & = & \mathbf{snd}\ ((\mathbf{prefn}\ f)^n\ (\mathbf{true}, x)) \\
 & = & \mathbf{snd}\ (\mathbf{false}, f^{n-1}\ x) \\
 & = & f^{n-1}\ x
\end{array}$$

Listid

Definitsioon

$$
\begin{array}{lcllcl}
\textbf{nil} & \equiv & \lambda z.\ z & & (\equiv & \textbf{I}) \\
\textbf{cons} & \equiv & \lambda x\ y.\ (\textbf{false}, (x, y)) & & & \\
\textbf{null} & \equiv & \lambda z.\ z\ \textbf{true} & & (\equiv & \textbf{fst}) \\
\textbf{hd} & \equiv & \lambda z.\ \textbf{fst}\ (\textbf{snd}\ z)) & & & \\
\textbf{tl} & \equiv & \lambda z.\ \textbf{snd}\ (\textbf{snd}\ z)) & & &
\end{array}
$$

Näide

$$
\begin{array}{rcl}
\textbf{null nil} & \equiv & \textbf{fst}\ (\lambda z.\ z) \\
 & \equiv & (\lambda p.\ p\ \textbf{true})\ (\lambda z.\ z) \\
 & \Longrightarrow & \textbf{true}
\end{array}
$$

Püsipunktid

Püsipunktiteoreem

$$\forall F.\ \exists X.\ X = F\,X$$

Mõisted

- Termi M nimetatakse püsipunkti kombinaatoriks kui

$$\forall F.\ M\,F = F\,(M\,F)$$

- Curry "paradoksaalne" kombinaator

$$\mathbf{Y} \equiv \lambda f.(\lambda x.f\,(x\,x))\,(\lambda x.f\,(x\,x))$$

- "Tugev" püsipunkti kombinaator

$$\Theta \equiv (\lambda xy.\ y(xxy))\,(\lambda xy.\ y(xxy))$$

Püsipunktid

Lemma

Olgu $G \equiv \lambda yf.f(yf) \quad (\equiv \mathbf{SI})$

$$M \text{ on püsipunkti kombinaator} \quad \Longleftrightarrow \quad M = GM$$

Tõestus

($\Leftarrow$) Kui $M = GM$, siis:

$$\begin{array}{rcl} \forall F.\, M\,F & = & G\,M\,F \\ & \equiv & (\lambda yf.f(yf))\,M\,F \\ & = & F(M\,F) \end{array}$$

($\Rightarrow$) Kui M on püsipunkti kombinaator, siis:

$$\begin{array}{rcl} G\,M & = & \lambda f.f(Mf) \\ & = & \lambda f.Mf \\ & = & M \end{array}$$

Püsipunktid

Lemma

Kõik alljärgneva jada elemendid on püsipunkti kombinaatorid

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^0 &\equiv \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}^{n+1} &\equiv \mathbf{Y}^n\, G \end{aligned}$$

Tõestus

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^{n+1} &\equiv \mathbf{Y}^n\, G \\ &= G\,(\mathbf{Y}^n\, G) \\ &\equiv G\mathbf{Y}^{n+1} \end{aligned}$$

NB!

$$\mathbf{Y}^1 \Longrightarrow \Theta$$

Rekursioon

Lemma

Olgu $C \equiv C(f, \vec{x})$, siis

- $\exists F.\ \forall \vec{N}.\ F\vec{N} = C(F, \vec{N})$
- $\exists F.\ \forall \vec{N}.\ F\vec{N} \Longrightarrow C(F, \vec{N})$

Tõestus

Võtame $F \equiv \Theta(\lambda f \vec{x}.C(f, \vec{x}))$

Standardnumbrite liitmine

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{add} & = & \lambda x\, y.\ \mathbf{cond}\,(\mathbf{iszero}\ x)\ y\ (\mathbf{add}(\mathbf{pred}\ x)(\mathbf{succ}\ y)) \\ \mathbf{add} & \equiv & \mathbf{Y}\,(\lambda f\ x\, y.\ \mathbf{cond}\,(\mathbf{iszero}\ x)\ y\ (f\,(\mathbf{pred}\ x)(\mathbf{succ}\ y))) \end{array}$$

Mitmekohalised funktsioonid

”Currymine”

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{curry}_n & \equiv & \lambda f\, x_1\ \ldots\ x_n.\, f\ (x_1,\ldots,x_n) \\ \mathbf{uncurry}_n & \equiv & \lambda f\, p.\, f\ (p \overset{n}{\downarrow} 1)\ \ldots\ (p \overset{n}{\downarrow} n) \end{array}$$

NB!

$\mathbf{curry}_n(\mathbf{uncurry}_n\ N) = N \qquad \mathbf{uncurry}_n(\mathbf{curry}_n\ M) = M$

Üldistatud λ-abstraktsioon

$$\lambda(V_1,\ldots,V_n).\, E \quad \equiv \quad \mathbf{uncurry}_n\ (\lambda V_1\ \ldots\ V_n.\, E)$$

Üldistatud β-konversioon

$$(\lambda(V_1,\ldots,V_n).\, E)(E_1,\ldots,E_n) \quad \longrightarrow_\beta \quad E[E_1\ldots E_n/V_1\ldots V_n]$$

Rekursioon

Vastastikune rekursioon

$$
\begin{array}{lcl}
f_1 & = & F_1\, f_1 \ldots f_n \\
f_2 & = & F_2\, f_1 \ldots f_n \\
 & \ldots & \\
f_n & = & F_n\, f_1 \ldots f_n
\end{array}
$$

Definitsioon

$$
\begin{array}{lcl}
f & \equiv & \mathbf{Y}(\lambda(f_1, \ldots, f_n).\ (F_1 f_1 \ldots f_n,\ \ldots,\ F_n f_1 \ldots f_n)) \\
f_1 & \equiv & f \overset{n}{\downarrow} 1 \\
f_2 & \equiv & f \overset{n}{\downarrow} 2 \\
 & \ldots & \\
f_n & \equiv & f \overset{n}{\downarrow} n
\end{array}
$$

Arvutatavus

Church'i tees

Kõik arvutatavad funktsioonid on esitatavad λ-arvutuses!

Lihtrekursiivsed funktsioonid

(i) 0

(ii) $S(x) = x + 1$

(iii) $U_n^i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$

(iv) $f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_r(x_1, \ldots, x_n))$

(v)
$$\begin{aligned} f(0, x_2, \ldots, x_n) &= g(x_2, \ldots, x_n) \\ f(S(x_1), x_2, \ldots, x_n) &= h(f(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Osaliselt rekursiivsed funktsioonid

(vi) $f(x_1, \ldots, x_n) = \min \{ y \mid g(y, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \}$

Arvutatavus

Minimiseerimine

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{min}\, x f\, (x_1, \ldots, x_n) & = & \mathbf{cond}\, (\mathbf{eq}\, (f\, (x, x_2, \ldots, x_n)\, x_1) \\ & & \quad x \\ & & \quad (\mathbf{min}\, (\mathbf{succ}\, x)\, f\, (x_1, \ldots, x_n))) \end{array}$$

Definitsioon

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{min} & \equiv & \mathbf{Y}\, (\lambda m x f\, (x_1, \ldots, x_n). \\ & & \quad \mathbf{cond}\, (\mathbf{eq}\, (f\, (x, x_2, \ldots, x_n))\; x_1) \\ & & \qquad x \\ & & \qquad (m(\mathbf{succ}\; x)\; f\; (x_1, \ldots, x_n))) \end{array}$$