Operatsiooniline semantika

- Kirjeldab kuidas toimub programmide täitmine
- Tähendus spetsifitseeritakse *olekuteisendussüsteemi* abil
- *Loomulik semantika*
  - kirjeldab kuidas jõutakse lõppolekusse
- *Struktuurne semantika*
  - kirjeldab programmi täitmist üksikute sammude kaupa

Loomulik semantika

- Konfiguratsioonid on kujul $\langle S,\ s\rangle$ või s, kus S on lause ja s on olek (so. keskond mis annab muutujatele väärtused)
- Üleminekud on kujul

$$\langle S,\ s\rangle \ \rightarrow \ s'$$

- Iga keelekonstruktsiooniga seotakse tuletusreegel kuidas lihtsamate konstruktsioonide üleminekutest antud konstruktsiooni üleminek saavutatakse

Keele While loomulik semantika

- Tühilause

$$\langle \texttt{skip},\ s\rangle \ \to\ s$$

- Omistamine

$$\langle x := a,\ s\rangle \ \to\ s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$$

- Kompositsioon

$$\frac{\langle S_1,\ s\rangle \ \to\ s' \quad \langle S_2,\ s'\rangle \ \to\ s''}{\langle S_1; S_2,\ s\rangle \ \to\ s''}$$

Keele While loomulik semantika

- Tingimuslause

$$\frac{\langle S_1,\ s\rangle \ \to\ s'}{\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2,\ s\rangle \ \to\ s'} \qquad \text{if } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \texttt{tt}$$

$$\frac{\langle S_2,\ s\rangle \ \to\ s'}{\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2,\ s\rangle \ \to\ s'} \qquad \text{if } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \texttt{ff}$$

- While-tsükkel

$$\frac{\langle S,\ s\rangle \ \to\ s' \quad \langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S,\ s'\rangle \ \to\ s''}{\langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S,\ s\rangle \ \to\ s''} \qquad \text{if } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \texttt{tt}$$

$$\langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S,\ s\rangle \ \to\ s \qquad \text{if } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \texttt{ff}$$

Keele While loomulik semantika

- Näide:

$$y := 1;\ \texttt{while}\ \neg(x = 1)\ \texttt{do}\ (y := y \star x;\ x := x - 1)$$

$$\dfrac{\langle A_1,\ s_0\rangle \to s_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\langle A_2,\ s_1\rangle \to s_2 \quad \langle A_3,\ s_2\rangle \to s_3}{\langle A_2; A_3,\ s_1\rangle \to s_3} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle A_2,\ s_3\rangle \to s_4 \quad \langle A_3,\ s_4\rangle \to s_5}{\langle A_2; A_3,\ s_3\rangle \to s_5} \qquad \langle W,\ s_5\rangle \to s_5}{\langle W,\ s_3\rangle \to s_5}}{\langle W,\ s_1\rangle \to s_5}}{\langle A_1; W,\ s_0\rangle \to s_5}$$

kus

A_1	$=$	$y := 1$	$s_0 = [x \mapsto 3]$	$s_3 = [x \mapsto 2, y \mapsto 3]$
A_2	$=$	$y := y \star x$	$s_1 = [x \mapsto 3, y \mapsto 1]$	$s_4 = [x \mapsto 2, y \mapsto 6]$
A_3	$=$	$x := x - 1$	$s_2 = [x \mapsto 3, y \mapsto 3]$	$s_5 = [x \mapsto 1, y \mapsto 6]$
W	$=$	$\texttt{while}\ \neg(x = 1)\ \texttt{do}\ (A_2;\ A_3)$		

Semantika omadusi — ekvivalents

- Laused S_1 ja S_2 on *semantiliselt samaväärsed* (ekvivalentsed) kui iga oleku s ja s' korral

$$\langle S_1,\ s\rangle \to s' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle S_2,\ s\rangle \to s'$$

- **Lemma:** Lause `while` b `do` S on semantiliselt samaväärne lausega `if` b `then` $(S;$ `while` b `do` $S)$ `else skip`

- **Tõestus:**

$$\langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S,\ s\rangle \to s'' \qquad (*)$$

$$\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ (S;\ \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S)\ \texttt{else skip},\ s\rangle \to s'' \qquad (**)$$

Semantika omadusi — ekvivalents (tõestuse järg)

- $(*) \Rightarrow (**)$, $\mathcal{B}[\![b]\!]s = \texttt{tt}$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\; T_1\\ \langle S,\ s\rangle \ \to\ s'\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\; T_2\\ \langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S,\ s'\rangle \ \to\ s''\end{array}}{\langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S,\ s\rangle \ \to\ s''}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\; T_1\\ \langle S,\ s\rangle \ \to\ s'\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\; T_2\\ \langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S,\ s'\rangle \ \to\ s''\end{array}}{\langle S;\ \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S,\ s\rangle \ \to\ s''}}{\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ (S;\ \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S)\ \texttt{else}\ \texttt{skip},\ s\rangle \ \to\ s''}$$

Semantika omadusi — ekvivalents (tõestuse järg)

- $(*) \Rightarrow (**)$, $\mathcal{B}[\![b]\!]s = \texttt{ff}$

$$\langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S,\ s\rangle \ \to\ s$$

$$\dfrac{\langle \texttt{skip},\ s\rangle \ \to\ s}{\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ (S;\ \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S)\ \texttt{else}\ \texttt{skip},\ s\rangle \ \to\ s}$$

- $(**) \Rightarrow (*)$, $\mathcal{B}[\![b]\!]s = \texttt{tt}$
- $(**) \Rightarrow (*)$, $\mathcal{B}[\![b]\!]s = \texttt{ff}$

Semantika omadusi — determinism

- Semantika on *ühene* (determineeritud) kui suvaliste S, s, s', s'' korral

$$\langle S,\ s\rangle\ \rightarrow\ s' \quad \wedge \quad \langle S,\ s\rangle\ \rightarrow\ s'' \qquad \Longrightarrow \qquad s' = s''$$

- **Teoreem:** Keele While loomilik semantika on ühene.
- **Tõestus:** Eeldame et $\langle S,\ s\rangle\ \rightarrow\ s'$ ning näitame et kui $\langle S,\ s\rangle\ \rightarrow\ s''$ siis $s' = s''$. Tõestus toimub induktsiooniga $\langle S,\ s\rangle\ \rightarrow\ s'$ tuletuspuu struktuuri järgi.

Semantiline funktsioon $\mathcal{S}_{\text{ns}}$

- Loomulik semantika indutseerib semantilise funktsiooni

$$\mathcal{S}_{\text{ns}} : \mathbf{Stm} \rightarrow (\mathbf{State} \hookrightarrow \mathbf{State})$$

so. iga lause S jaoks defineerime (osalise) funktsiooni

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{ns}}[\![S]\!] \quad &\in \quad \mathbf{State} \hookrightarrow \mathbf{State} \\ \mathcal{S}_{\text{ns}}[\![S]\!]s \quad &= \quad \begin{cases} s' & \text{if} \quad \langle S,\ s\rangle\ \rightarrow\ s' \\ \text{undef} & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$