

Programmeerimiskeelte semantika

Galois ühendused

Toomas Römer

toomasr@gmail.com

Tartu Ülikool

Matemaatika-Informaatika Teaduskond

Arvutiteaduse Instituut

Galois ühendused — (L, α, γ, M)

(L, α, γ, M) on Galois ühendus täielike võrede $(L, \sqsubseteq)$ ning $(M, \sqsubseteq)$ vahel siis ja ainult siis kui:

- $\alpha : L \rightarrow M$ ja $\gamma : M \rightarrow L$ on monotoonsed funktsioonid.
- $\gamma \circ \alpha \sqsupseteq \lambda l.l$
- $\alpha \circ \gamma \sqsubseteq \lambda m.m$
- α on abstraktsiooni funktsioon.
- γ on konkretisatsioon funktsioon.

Näide

- Täielik võre (**Interval**, $\sqsubseteq$) intervallidest hulgas **Z**.
- **Interval** = $\{\perp\} \cup \{[z_1, z_2] \mid z_1 \leq z_2, z_1 \in \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}, z_2 \in \mathbf{Z} \cup \{\infty\}\}$
- $[z_1, z_2]$ on intervall z_1 kuni z_2 . Ots punktid kaasaarvatud, kui kuuluvad hulka **Z**.

$$\inf(int) = \begin{cases} \infty & \text{kui } int = \perp \\ z_1 & \text{kui } int = [z_1, z_2] \end{cases}$$

$$\sup(int) = \begin{cases} -\infty & \text{kui } int = \perp \\ z_2 & \text{kui } int = [z_1, z_2] \end{cases}$$

- $int_1 \sqsubseteq int_2$ siis ja ainult siis kui:

$$\inf(int_2) \leq \inf(int_1) \wedge \sup(int_1) \leq \sup(int_2)$$

Näide jätk

- $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$
- $\inf'$
 - $\inf'(\emptyset) = \infty$
 - $z' \in Z \quad \inf'(Z) = z'$ kui z' vähim Z element.
 - $\inf'(Z) = -\infty$ muul juhul.
- $\sup'$
 - $\sup'(\emptyset) = -\infty$
 - $z' \in Z \quad \sup'(Z) = z'$ kui z' suurim Z element.
 - $\sup'(Z) = \infty$ muul juhul.

Näide jätk

- Olgu $\mathcal{P}(\mathbf{Z}) = (\mathcal{P}(\mathbf{Z}), \subseteq)$ täielik võre täisarvude hulkadest.
- Olgu **Interval** = (**Interval**, $\sqsubseteq$) täielik võre.
- Konkretisatsioon funktsioon $\gamma : \mathbf{Interval} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{Z})$
 - $\gamma(int) = \{z \in \mathbf{Z} \mid inf(int) \leq z \leq sup(int)\}$
 - Näide: $\gamma([0, 3]) = \{0, 1, 2, 3\}$ ja $\gamma([0, \infty]) = \{z \in \mathbf{Z} \mid z \geq 0\}$.
- Abstraktsiooni funktsioon $\alpha : \mathcal{P}(\mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Interval}$

$$\alpha(\mathbf{Z}) = \begin{cases} \perp & , \text{ kui } \mathbf{Z} = \emptyset \\ [inf'(Z), sup'(Z)] & , \text{ muul juhul} \end{cases}$$

- Näide: $\alpha(\{0, 1, 3\}) = [0, 3]$ ja $\alpha(\{2 * z \mid z > 0\}) = [2, \infty]$.

Näide jätk

Kas $(\mathcal{P}(\mathbf{Z}), \alpha, \gamma, \mathbf{Interval})$ on Galois ühendus?

- α ja γ on monotoonsed funktsioonid.
- $\gamma \circ \alpha \supseteq \lambda Z. Z$
 - Kui $Z = \emptyset$ siis $\gamma(\alpha(\emptyset)) = \gamma(\perp) = \emptyset$.
 - Muul juhul:

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha(Z)) &= \gamma([inf'(Z), sup'(Z)]) \\ &= \{z \in \mathbf{Z} \mid inf'(Z) \leq z \leq sup'(Z)\} \\ &\supseteq Z\end{aligned}$$

- $\alpha \circ \gamma \sqsubseteq \lambda int. int$

Näide jätk

- $\alpha \circ \gamma \sqsubseteq \lambda int.int$
 - Kui $int = \perp$ siis $\alpha(\gamma(\perp)) = \alpha(\emptyset) = \perp$.
 - Muul juhul:

$$\begin{aligned}\alpha(\gamma([z_1, z_2])) &= \alpha(\{z \in \mathbf{Z} \mid z_1 \leq z \leq z_2\}) \\ &= [z_1, z_2]\end{aligned}$$

Adjunktsioon

- Defineerime, et (L, α, γ, M) on *adjunktsioon* täisvõrede $L = (L, \sqsubseteq)$ ja $M = (M, \sqsubseteq)$ vahel siis ja ainult siis kui
 - $\alpha : L \rightarrow M$ ja $\gamma : M \rightarrow L$ on täisfunktsioonid, mis rahuldavad:
 - $\forall l \in L, \forall m \in M \alpha(l) \sqsubseteq m \Leftrightarrow l \sqsubseteq \gamma(m)$
- Tõestus
 - Eeldame, et (L, α, γ, M) on Galois ühendus ja näitame, et ta on adjunktsioon.
 - Eeldame, et (L, α, γ, M) on adjunktsioon ja näitame, et ta on Galois ühendus.

Adjunktsioon - Tõestus

- Eeldame, et $\alpha(l) \sqsubseteq m$. Kuna γ on monotoonne, me saame:
 - $\gamma(\alpha(l)) \sqsubseteq \gamma(m)$
- Et $\gamma \circ \alpha \sqsupseteq \lambda l.l$ saame $l \sqsubseteq \gamma(\alpha(l)) \sqsubseteq \gamma(m)$

Eeldame, et (L, α, γ, M) on adjunktsioon ja näitame, et ta on Galois ühendus.

- Näitame, et $\gamma \circ \alpha \sqsupseteq \lambda l.l$
 - Suvalise $l \in L$ korral on meil $\alpha(l) \sqsubseteq \alpha(l)$. Kasutades $\alpha(l) \sqsubseteq m \Rightarrow l \sqsubseteq \gamma(m)$ ning saame $l \sqsubseteq \gamma(\alpha(l))$ nagu vaja.
- Tõestus, et $\alpha \circ \gamma \sqsubseteq \lambda m.m$ on analoogne.

Adjunktsioon - Tõestus jätk

- Näitamaks, et α on monotoonne:
 - Oletame, et $l_1 \sqsubseteq l_2$
 - $l_1 \sqsubseteq l_2 \sqsubseteq \gamma(\alpha(l_2))$ (tõestasime, et $\gamma \circ \alpha \sqsupseteq \lambda l.l$)
 - $l \sqsubseteq \gamma(m) \Rightarrow \alpha(l) \sqsubseteq m$. Saame $\alpha(l_1) \sqsubseteq \alpha(l_2)$.

Galois ühenduste omadusi - Lemma 4.22

Galois ühendus on täielikult määratud ühe funktsiooni poolt, kas konkretisatsiooni või abstraktsiooni funktsiooni poolt.

- Kui (L, α, γ, M) on Galois ühendus, siis:
 - (i) α unikaalselt determineerib γ —
$$\gamma(m) = \bigsqcup \{l \mid \alpha(l) \sqsubseteq m\}.$$
 - (ii) γ unikaalselt determineerib α —
$$\alpha(l) = \bigsqcap \{m \mid l \sqsubseteq \gamma(m)\}.$$
 - (iii) α on täielikult aditiivne ning γ on täielikult multiplikatiivne.

Lemma 4.22 — Tõestus

- Kuna (L, α, γ, M) on adjunktsioon, meil on
$$\gamma(m) = \bigsqcup \{l \mid l \sqsubseteq \gamma(m)\} = \bigsqcup \{l \mid \alpha(l) \sqsubseteq m\}.$$
- Kui (L, α, γ_1, M) ja (L, α, γ_2, M) on Galois ühendused siis:
 - $\forall m \ \gamma_1(m) = \bigsqcup \{l \mid \alpha(l) \sqsubseteq m\} = \gamma_2(m)$
 - $\gamma_1 = \gamma_2$
- Sarnaselt, meil on
$$\alpha(l) = \bigsqcap \{m \mid \alpha(l) \sqsubseteq m\} = \bigsqcap \{m \mid l \sqsubseteq \gamma(m)\}.$$
- Näitab, et γ unikaalselt määrab α .

Lemma 4.22 — (iii) tõestus

Määrame $L' \subseteq L$. Saame:

$$\begin{aligned}\alpha(\bigsqcup L') \sqsubseteq m &\Leftrightarrow \bigsqcup L' \sqsubseteq \gamma(m) \\ &\Leftrightarrow \forall l \in L' : l \sqsubseteq \gamma(m) \\ &\Leftrightarrow \forall l \in L' : \alpha(l) \sqsubseteq m \\ &\Leftrightarrow \bigsqcup \{\alpha(l) \mid l \in L'\} \sqsubseteq m\end{aligned}$$

Sellest järeldub, et $\alpha(\bigsqcup L') = \bigsqcup \{\alpha(l) \mid l \in L'\}$.

- Tõestus, et $\gamma(\prod M') = \prod \{\gamma(m) \mid m \in M'\}$ on analoogne.

Omadused jätkuvad

Kui (L, α, γ, M) on Galois ühendus siis

- $\alpha \circ \gamma \circ \alpha = \alpha$
- $\gamma \circ \alpha \circ \gamma = \gamma$

Tõestus:

- Teame, et $\lambda l.l \sqsubseteq \gamma \circ \alpha$
 - Monotoonsusest saame $\alpha \sqsubseteq \alpha \circ (\gamma \circ \alpha)$
- Sarnaselt $\alpha \circ \gamma \sqsubseteq \lambda m.m \Rightarrow (\alpha \circ \gamma) \circ \alpha \sqsubseteq \alpha$
- Tõestus $\gamma \circ \alpha \circ \gamma = \gamma$ on analoogne.

Aitäh

Küsimusi?