Programmeerimiskeelte semantika

Widening ja narrowing

Toomas Römer

toomasr@gmail.com

Tartu Ülikool

Matemaatika-Informaatika Teaduskond

Arvutiteaduse Instituut

Ülemise raja operaatorid

- Ülemise tõkke operaator
  - $L = (L, \sqsubseteq)$ on täielik võre.
  - Ülemise tõkke operaator $\check{\sqcup} : L \times L \to L$ kui
$$\forall l_1, l_2 \in L \;\; l_1 \sqsubseteq (l_1 \check{\sqcup} l_2) \sqsupseteq l_2$$
- $(l_n)_n$ olgu jada L elementidest. Olgu $\phi : L \times L \to L$ täielik funktsioon.
- Konstrueerime uue jada $(l_n^\phi)_n$

$$(l_n^\phi)_n = \begin{cases} l_n & \text{kui } n = 0 \\ l_{n-1}^\phi \; \phi \; l_n & \text{kui } n > 0 \end{cases}$$

Fakt 4.11

Kui $(l_n)_n$ on jada ning $\check{\sqcup}$ on ülemise tõkke operaator:

- (i) $(l_n^{\check{\sqcup}})_n$ on kasvav jada.
- (ii) $\forall n\ \check{\sqcup} \sqsubseteq \bigsqcup\{l_0, l_1, \ldots, l_n\}$

Tõestus (i):

- Näitame, et $\forall n\ \ l_n^{\check{\sqcup}} \sqsubseteq l_{n+1}^{\check{\sqcup}}$
  - Baas: $n = 0$ saame $l_0^{\check{\sqcup}} \sqsubseteq l_0 \mathbin{\check{\sqcup}} l_1 = l_1^{\check{\sqcup}}$
  - Samm: $l_n^{\check{\sqcup}} \sqsubseteq l_n^{\check{\sqcup}} \mathbin{\check{\sqcup}} l_{n+1} = l_{n+1}^{\check{\sqcup}}$

Tõestus (ii):

- Baas: $n = 0\ l_0^{\check{\sqcup}} \sqsupseteq \bigsqcup\{l_0\}$
- Samm: $l_{n+1}^{\check{\sqcup}} = l_n^{\check{\sqcup}} \mathbin{\check{\sqcup}} l_{n+1} \sqsupseteq \bigsqcup\{l_0, l_1, \ldots, l_n\} \sqcup\ l_{n+1} = \bigsqcup\{l_0, l_1, \ldots, l_n, l_{n+1}\}$

Näide 4.12

- Võrdlustehe $int_1 \sqsubseteq int_2$ siis ja ainult siis kui $inf(int_2) \leq inf(int_1) \wedge sup(int_1) \leq sup(int_2)$
- Fikseerime suvalise $int \in$ **Interval**
- Defineerime operaatori $\check{\sqcup}^{int}$

$$int_1 \check{\sqcup}^{int} int_2 = \begin{cases} int_1 \sqcup int_2 & \text{kui } int_1 \sqsubseteq int \vee int_2 \sqsubseteq int_1 \\ [-\infty, \infty] & \text{muul juhul} \end{cases}$$

- Ei ole sümmeetriline. Näide, kui $int = [0, 2]$
  - $[1, 2] \check{\sqcup}^{int} [2, 3] = [1, 3]$
  - $[2, 3] \check{\sqcup}^{int} [1, 2] = [-\infty, \infty]$

Näide 4.12 jätk

Näide 1:

- Olgu meil jada $[0,0],[1,1],[2,2],[3,3],[4,4],[5,5],\ldots$
- Olgu $int = [0,\infty]$
- Saame $[0,0],[0,1],[0,2][0,3],[0,4],[0,5],\ldots$

Näide 2:

- Olgu $int = [0,2]$
- Saame $[0,0],[0,1],[0,2],[0,3],[-\infty,\infty],[-\infty,\infty],\ldots]$

Näide 4.12 jätk

- Olgu $int = [0, 2]$
- Olgu meil jada $[0, 0], [1, 1], [2, 2], [3, 3], [4, 4], [5, 5], \ldots$
- Saame $[0, 0], [0, 1], [0, 2], [0, 3], [-\infty, \infty], [-\infty, \infty], \ldots]$

Sammhaaval:

- $n = 0\ [0, 0] \rightarrow [0, 0]$
- $n = 1\ [1, 1] \rightarrow [0, 0]\ \check{\sqcup}^{int}\ [1, 1] \rightarrow [0, 0] \sqcup [1, 1] \rightarrow [0, 1]$
- $n = 2\ [2, 2] \rightarrow [0, 1]\ \check{\sqcup}^{int}\ [2, 2] \rightarrow [0, 1] \sqcup [2, 2] \rightarrow [0, 2]$
- $n = 3\ [3, 3] \rightarrow [0, 2]\ \check{\sqcup}^{int}\ [3, 3] \rightarrow [0, 2] \sqcup [3, 3] \rightarrow [0, 3]$
- $n = 4\ [4, 4] \rightarrow [0, 3]\ \check{\sqcup}^{int}\ [4, 4] \rightarrow [-\infty, \infty]$

Widening operaator

$\nabla : L \times L \to L$ on *widening operaator* siis ja ainult siis kui:

- Kui tegemist on ülemise tõkke operaatoriga.
- Iga kasvava ahela $(l_n)_n$ puhul kasvav ahel $(l_n^{\nabla})_n$ stabiliseerub.

Defineerime uue jada:

- $f : L \to L$ on monotoonne funktsioon, L on täisvõre.
- ∇ on widening operaator.
- $(f_{\nabla}^{n})_n$ on defineeritud kui:

$$f_{\nabla}^{n} = \begin{cases} \perp & \text{kui } n = 0 \\ f_{\nabla}^{n-1} & \text{kui } n > 0 \wedge f(f_{\nabla}^{n-1}) \sqsubseteq f_{\nabla}^{n-1} \\ f_{\nabla}^{n-1} \nabla f(f_{\nabla}^{n-1}) & \text{muuljuhul} \end{cases}$$

Vahekokkuvõte

- f_{∇}^{n} on kasvav ahel (Fakt 4.11).
- f_{∇}^{n} on stabiliseerub (Teoreem 4.13).
- f_{∇}^{n} puhul kehtib $f(f_{\nabla}^{m}) \sqsubseteq f_{\nabla}^{m}$ mingi m puhul (Teoreem 4.14).
  - f on reduktiivne kohal f_{∇}^{m}.
  - $f_{\nabla}^{m} \sqsupseteq lfp(f)$. (Tarski teoreem)
  - $lfp_{\nabla}(f) = f_{\nabla}^{m}$ ohutu $lfp(f)$ aproksimatsioon.

Teoreem 4.14

Kui ∇ on widening operaator, siis

(i) $(f^n_\nabla)_n$ on kasvav jada.

(ii) kui $f(f^m_\nabla) \sqsubseteq f^m_\nabla$ mingi m korral siis $(f^n_\nabla)_n$ stabiliseerub ning $\forall n > m : f^n_\nabla = f^m_\nabla$ ning $\bigsqcup_n f^n_\nabla = f^m_\nabla$

(iii) kui $(f^n_\nabla)_n$ stabiliseerub siis $\exists m \;\; f(f^m_\nabla) \sqsubseteq f^m_\nabla$

(iv) kui $(f^n_\nabla)_n$ stabiliseerub siis $\bigsqcup_n f^n_\nabla \sqsupseteq lfp(f)$

Märkus: Need väited kehtivad ka siis, kui ∇ on lihtsalt ülemise tõkke operaator.

Teoreem 4.14 — (ii)

Kui $f(f_\nabla^m) \sqsubseteq f_\nabla^m$ mingi m korral siis $(f_\nabla^n)_n$ stabiliseerub ning $\forall n > m : f_\nabla^n = f_\nabla^m$ ning $\bigsqcup_n f_\nabla^n = f_\nabla^m$

- Induktsiooniga $n > m$, näitame, et $f_\nabla^n = f_\nabla^m$.
  - Baas: $n = m + 1$ $f_\nabla^{m+1} = f_\nabla^m$
  - Samm: $f(f_\nabla^n) \sqsubseteq f_\nabla^n$ seega $f_\nabla^{n+1} = f_\nabla^n$.
  - Seega $(f_\nabla^n)_n$ stabiliseerub ning $\bigsqcup_n f_\nabla^n = f_\nabla^m$.

Teoreem 4.14 — (iii)

Kui $(f_\nabla^n)_n$ stabiliseerub siis $\exists m \;\; f(f_\nabla^m) \sqsubseteq f_\nabla^m$

- $\exists m \, \forall n > m : f_\nabla^n = f_\nabla^m$.

Tõestame vastuväiteliselt. Eeldame, et $f(f_\nabla^m) \sqsubseteq f_\nabla^m$ ei kehti, siis

- $f_\nabla^m = f_\nabla^{m+1} = f_\nabla^m \nabla f(f_\nabla^m) \sqsupseteq f(f_\nabla^m)$ Vastuolu!

Teoreem 4.14 — (iv)

Kui $(f^n_\nabla)_n$ stabiliseerub siis $\bigsqcup_n f^n_\nabla \sqsupseteq lfp(f)$

- Väidetest (ii) ning (iii) tuleneb, et mingi m korral $\bigsqcup_n f^n_\nabla = f^m_\nabla$ kus $f(f^m_\nabla) \sqsubseteq f^m_\nabla$.
- Reduktsiooni definitsiooni põhjal $f^m_\nabla \in Red(f)$ ning Tarski teoreemi põhjal $f^m_\nabla \sqsupseteq lfp(f)$.

Teoreem 4.13

Teoreem 4.13 - Kui ∇ on widening operaator, siis kasvav jada $(f_\nabla^n)_n$ stabiliseerub.

- Vastuväiteliselt eeldame, et kasvav jada $(f_\nabla^n)_n$ ei stabiliseeru

$$\forall n_0 : \exists n \geq n_0 : f_\nabla^n \neq f_\nabla^{n_0}$$

Järeldub, et $f(f_\nabla^{n-1}) \sqsubseteq f_\nabla^{n-1}$ ei kehti ühegi $n > 0$ korral. Kui kehtiks, siis teoreem 4.14 põhjal $(f_\nabla^n)_n$ stabiliseeruks.

Seega $(f_\nabla^n)_n$ on defineeritud järgmiselt:

$$(f_\nabla^n)_n = \begin{cases} \perp & \text{kui } n = 0 \\ f_\nabla^{n-1} \nabla f(f_\nabla^{n-1}) & \text{muul juhul} \end{cases}$$

Teoreem 4.13 jätk

Definneerime $(l_n)_n$:

$$l_n = \begin{cases} \perp & \text{kui } n = 0 \\ f(f_\nabla^{n-1}) & \text{kui } n > 0 \end{cases}$$

- $(l_n)_n$ on kasvav jada, sest $(f_\nabla^n)_n$ on kasvav jada (Teoreem 4.14). f on monotoonne.

Tõestame, et $\forall n : l_n^\nabla = f_\nabla^n$ induktsiooniga üle n'i.

- Baas: $n = 0$ $\;l_0^\nabla = f_\nabla^0 \to \perp = \perp$
- Samm: $n > 0$ eeldame, et $l_{n-1}^\nabla = f_\nabla^{n-1}$
  - $l_n^\nabla = l_{n-1}^\nabla \nabla l_n \Rightarrow l_n^\nabla = f_\nabla^{n-1} \nabla f(f_\nabla^{n-1})$
  - $f_\nabla^n = f_\nabla^{n-1} \nabla f(f_\nabla^{n-1})$

Teoreem 4.13 jätk

- Vastuolu: $(l_n)_n$ on kasvav ahel ja ∇ on widening operaator $\Rightarrow$ jada $(l_n^{\nabla})_n$ stabiliseerub $\Rightarrow$ $(f_{\nabla}^n)_n$ stabiliseerub.

Näide

- Olgu K lõplik hulk täisarve - täisarvude hulk defineeritud programmis.
- Olgu ∇_K widening operaator.
- $[z_1, z_2]\nabla_K[z_3, z_4]$ on midagi sellist $[LB(z_1, z_3), UB(z_2, z_4)]$.
  - $LB(z_1, z_3) \in \{z_1\} \cup K \cup \{-\infty\}$ on parim alumine tõke.
  - $UB(z_2, z_4) \in \{z_2\} \cup K \cup \{\infty\}$ on parim ülemine tõke.
- Muutus üheski tõkkes intervallis $[z_1, z_2]$ saab toimuda lõplike sammudega.

Näide jätk

- Täpsema definitsiooni jaoks $z_i \in \mathbf{Z}' = \mathbf{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$

$$LB_K(z_1, z_3) = \begin{cases} z_1 & \text{kui } z_1 \leq z_3 \\ k & \text{kui } z_3 < z_1 \wedge k = max\{k \in K | k \leq z_3\} \\ -\infty & \text{kui } z_3 < z_1 \wedge \forall k \in K : z_3 < k \end{cases}$$

$$UB_K(z_2, z_4) = \begin{cases} z_2 & \text{kui } z_4 \leq z_2 \\ k & \text{kui } z_2 < z_4 \wedge k = min\{k \in K | z_4 \leq k\} \\ \infty & \text{kui } z_2 < z_4 \wedge \forall k \in K : k < z_4 \end{cases}$$

Näide jätk

- Defineerime $\nabla = \nabla_K$

$$int_1 \nabla int_2 = \begin{cases} \bot \text{ kui } int_1 = int_2 = \bot \\ [LB_K(inf(int_1), inf(int_2)), UB_K(sup(int_1), sup(int_2))] \end{cases}$$

- Vaatleme kasvavat ahelat $(int_n)_n$:

$$[0,1],[0,2],[0,3],[0,4],[0,5],[0,6],[0,7],\ldots$$

- Võtame $K = \{3,5\}$. Siis saame $(int_n^{\nabla})_n$:

$$[0,1],[0,3],[0,3],[0,5],[0,5],[0,\infty],[0,\infty],\ldots$$

Narrowing

- Oleme jõudnud f^m_∇ näol $lfp(f)$ ülemise aproksimatsioonini.
- Teame, et $f(f^m_\nabla) \sqsubseteq f^m_\nabla$ seega f on reduktiivne kohal f^m_∇.
- Proovime täpsustada aproksimatsiooni, vaadeldes jada $(f^n(f^m_\nabla))_n$.
- Kuna $f^m_\nabla \in Red(f)$ siis meil on kahanev ahel, kus $f^n(f^m_\nabla) \in Red(f)$ ning seega $\forall n\ f^n(f^m_\nabla) \sqsupseteq lfp(f)$
- Jällegi ei ole põhjust, et ahel stabiliseerub aga muidugi võime iga hetk ära lõpetada protsessi.

Narrowing operaator

Operaator $\triangle : L \times L \to L$ on *narrowing operaator* kui:

- $\forall l_1, l_2 \ \in L \ \ l_2 \sqsubseteq l_1 \Rightarrow l_2 \sqsubseteq (l_1 \triangle l_2) \sqsubseteq l_1$
- Iga kahaneva ahela $(l_n)_n$ korral $(l_n^{\triangle})_n$ stabiliseerub.

Idee on järgmine: f_{∇}^{m}, mis rahuldab $f(f_{\nabla}^{m}) \sqsubseteq f_{\nabla}^{m}$, näiteks $lfp_{\nabla}(f) = f_{\nabla}^{m}$ konstrueerime jada $([f]_{\triangle}^{n})_n$:

$$[f]_{\triangle}^{n} = \begin{cases} f_{\nabla}^{m} & \text{kui } n = 0 \\ [f]_{\triangle}^{n-1} \triangle f([f]_{\triangle}^{n-1}) & \text{kui } n > 0 \end{cases}$$

Narrowing

- Lemma 4.16. Kui $\triangle$ on narrowing operaator ja $f(f_{\nabla}^{m}) \sqsubseteq f_{\nabla}^{m}$ siis $([f]_{\triangle}^{n})_n \in Red(f)$ on kahanev jada ning

$$\forall n \;\; [f]_{\triangle}^{n} \sqsupseteq f^{n}(f_{\nabla}^{m}) \sqsupseteq lfp(f)$$

- Teoreem 4.17. Kui $\triangle$ on narrowing operaator ja $f(f_{\nabla}^{m}) \sqsubseteq f_{\nabla}^{m}$ siis kahanev jada $([f]_{\triangle}^{n})_n$ stabiliseerub.
  - $\exists m \; [f]_{\triangle}^{m} = [f]_{\triangle}^{m+1}$.
  - Valime $lfp_{\nabla}^{\triangle}(f) = [f]_{\triangle}^{m}$ kui meie aproksimatsioon vähimale püsipunktile $lfp(f)$.

Lemma 4.16

- Lemma 4.16. Kui $\triangle$ on narrowing operaator ja $f(f_{\nabla}^{m}) \sqsubseteq f_{\nabla}^{m}$ siis $([f]_{\triangle}^{n})_n \in Red(f)$ on kahanev jada ning

$$\forall n \;\; lfp(f) \sqsubseteq f^n(f_{\nabla}^{m}) \sqsubseteq [f]_{\triangle}^{n}$$

Induktsiooniga üle n tõestame, et:

$$f^{n+1}(f_{\nabla}^{m}) \sqsubseteq f([f]_{\triangle}^{n}) \sqsubseteq [f]_{\triangle}^{n+1} \sqsubseteq [f]_{\triangle}^{n}$$

Baas:

- $f^1(f_{\nabla}^{m}) \sqsubseteq f([f]_{\triangle}^{0}) \sqsubseteq [f]_{\triangle}^{0}$, kasutades $f(f_{\nabla}^{m}) \sqsubseteq f_{\nabla}^{m}$
- $f([f]_{\triangle}^{0}) \sqsubseteq [f]_{\triangle}^{1} \sqsubseteq [f]_{\triangle}^{0}$
  - $f(f_{\nabla}^{m}) \sqsubseteq f_{\nabla}^{m} \triangle f(f_{\nabla}^{m}) \sqsubseteq f_{\nabla}^{m}$

Lemma 4.16 jätk

Rakendame funktsiooni f (monotoonne):

$$f^{n+2}(f_{\nabla}^{m}) \sqsubseteq f^{2}([f]_{\triangle}^{n}) \sqsubseteq f([f]_{\triangle}^{n+1}) \sqsubseteq f([f]_{\triangle}^{n})$$

Kasutades induktsiooni hüpoteesi, on meil ka $f([f]_{\triangle}^{n}) \sqsubseteq [f]_{\triangle}^{n+1}$, ning saame:

$$f^{n+2}(f_{\nabla}^{m}) \sqsubseteq f([f]_{\triangle}^{n+1}) \sqsubseteq [f]_{\triangle}^{n+1}$$

Konstrueerides $[f]_{\triangle}^{n+2}$ saame:

$$f([f]_{\triangle}^{n+1}) \sqsubseteq [f]_{\triangle}^{n+2} \sqsubseteq [f]_{\triangle}^{n+1}$$

Eeldusest $f(f_{\nabla}^{m}) \sqsubseteq f_{\nabla}^{m}$ saame, et $\forall n \geq 0 \;\; f(f^{n}(f_{\nabla}^{m})) \sqsubseteq f^{n}(f_{\nabla}^{m})$ ning seega $f^{n}(f_{\nabla}^{m}) \in Red(f)$. Ning $lfp(f) \sqsubseteq f^{n}(f_{\nabla}^{m})$.

Teoreem 4.17

Kui $\triangle$ on narrowing operaator ja $f(f^m_\nabla) \sqsubseteq f^m_\nabla$ siis kahanev jada $([f]^n_\triangle)_n$ stabiliseerub.

Defineerime jada $(l_n)_n$:

$$l_n = \begin{cases} f^m_\nabla & \text{kui } n = 0 \\ f([f]^{n-1}_\triangle) & \text{kui } n > 0 \end{cases}$$

See jada on kahanev ahel, sest $([f]^n_\triangle)_n$ on kahanev ahel ning $f([f]^0_\triangle) \sqsubseteq f^m_\nabla$. Seega jada $(l^\triangle_n)_n$ stabiliseerub.

Näitame induktsiooniga üle n, et:

$$l^\triangle_n = [f]^n_\triangle$$

Teoreem 4.17 jätk

Baas:

$$l_0^{\triangle} = [f]^0_{\triangle}$$

Samm:

$$l_{n+1}^{\triangle} = l_n^{\triangle} \triangle l_{n+1} = [f]^n_{\triangle} \triangle f([f]^n_{\triangle}) = [f]^{n+1}_{\triangle}$$

$$(l_n^{\phi})_n = \begin{cases} l_n & \text{kui } n = 0 \\ l_{n-1}^{\phi} \ \phi \ l_n & \text{kui } n > 0 \end{cases}$$

Näide

- On kahte liiki lõpmatuid ahelaid intervallis **Interval**.
  - $[z, \infty]$ $z \in \mathbf{Z}$
  - $[-\infty, z]$ $z \in \mathbf{Z}$
- Vaatleme jada $[z_1, \infty], [z_2, \infty], [z_3, \infty], \ldots$ kus $z_1 < z_2 < z_3 < \ldots$.
- Idee on defineerida narrowing operaator $\triangle_N$, mis põhjustab ahela stabiliseerumise, kui $z_i \geq N$ (mitte negatiivse fikseeritud N korral).
- Sarnaselt kahaneva ahela puhul elemendid kujul $[-\infty, z_i]$ narrowing operaator stabiliseerib ahela kui $z_i \leq -N$.

Näide jätk

Formaalselt, me defineerime $\triangle = \triangle_N$:

$$int_1 \triangle int_2 = \begin{cases} \bot & \text{kui } int_1 = \bot \vee int_2 = \bot \\ [z_1, z_2] & \text{muul juhul} \end{cases}$$

kus

$$z_1 = \begin{cases} inf(int_1) & \text{kui } N < inf(int_2) \wedge sup(int_2) = \infty \\ inf(int_2) & \text{muul juhul} \end{cases}$$

$$z_2 = \begin{cases} sup(int_1) & \text{kui } inf(int_2) = -\infty \wedge sup(int_2) < -N \\ sup(int_2) & \text{muul juhul} \end{cases}$$

Näide jätk

- Vaatleme lõpmatut kahanevad jada $([n, \infty])_n$

$$[0, \infty], [1, \infty], [2, \infty], [3, \infty], [4, \infty], [5, \infty], \ldots$$

- Valime $N = 3$, saame jada $([n, \infty]^{\triangle})_n$:

$$[0, \infty], [1, \infty], [2, \infty], [3, \infty], [3, \infty], [3, \infty], \ldots$$

Aitäh

Küsimusi?