Programmeerimine

14. loeng

Täna loengus

- Sabarekursioon vs. iteratsioon
- Erinevad rekursiooniskeemid
- Näiteid:
  - Hanoi tornide ülesanne
  - Puu joonistamine
  - Sierpinski kolmnurk

Sabarekursioon

- Kui kõik tegevused toimuvad enne rekursiivset väljakutset, nimetatakse rekursiooni sabarekursiooniks.
- Sabarekursiooni on väga lihtne teisendada tavaliseks tsükliks (ja ka vastupidi).

Sabarekursioon

- Kui kõik tegevused toimuvad enne rekursiivset väljakutset, nimetatakse rekursiooni sabarekursiooniks.
- Sabarekursiooni on väga lihtne teisendada tavaliseks tsükliks (ja ka vastupidi).

Rekursiivne faktoriaal

```
def factorial(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * factorial(n-1)
```

Sabarekursioon

- Kui kõik tegevused toimuvad enne rekursiivset väljakutset, nimetatakse rekursiooni sabarekursiooniks.
- Sabarekursiooni on väga lihtne teisendada tavaliseks tsükliks (ja ka vastupidi).

Sabarekursiivne faktoriaal

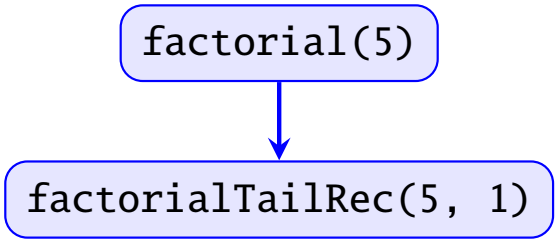
```
def factorialTailRec(n, f):
    if n == 0:
        return f
    else:
        return factorialTailRec(n-1, f*n)

def factorial(n):
    return factorialTailRec(n,1)
```

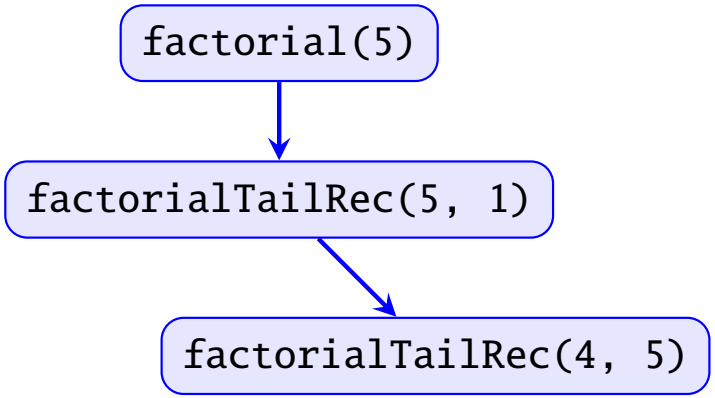
Faktoriaal

```
factorial(5)
```

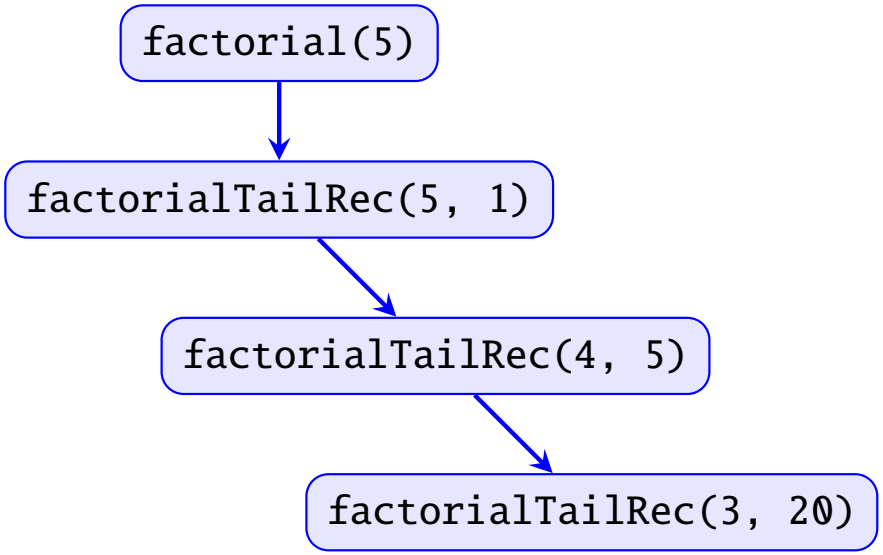
Faktoriaal



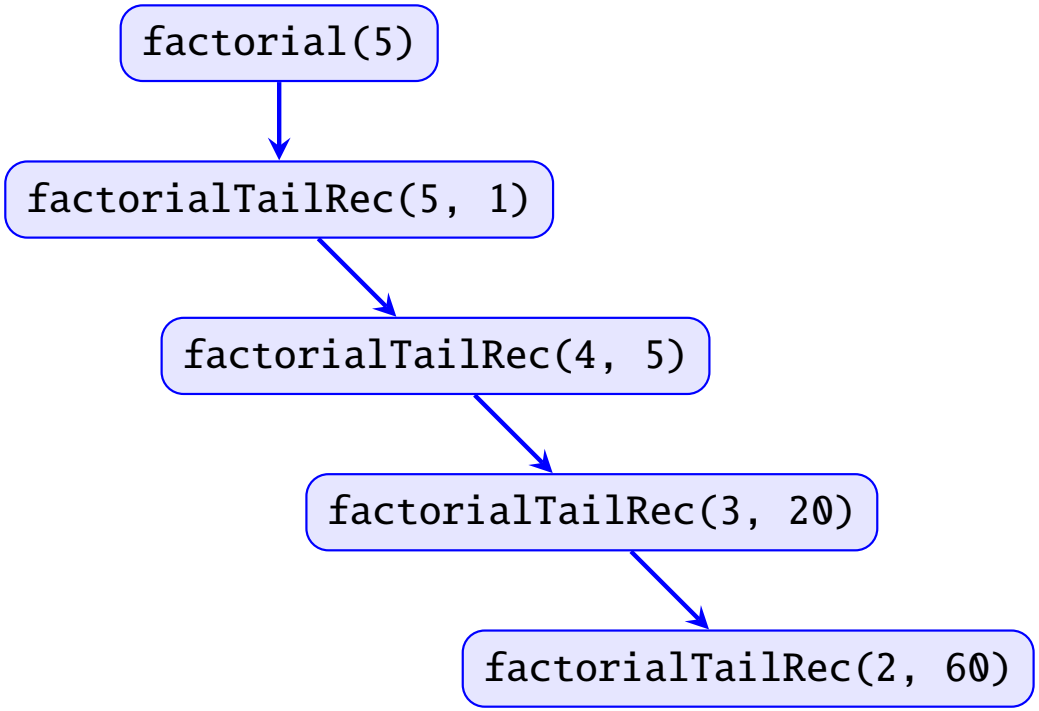
Faktoriaal



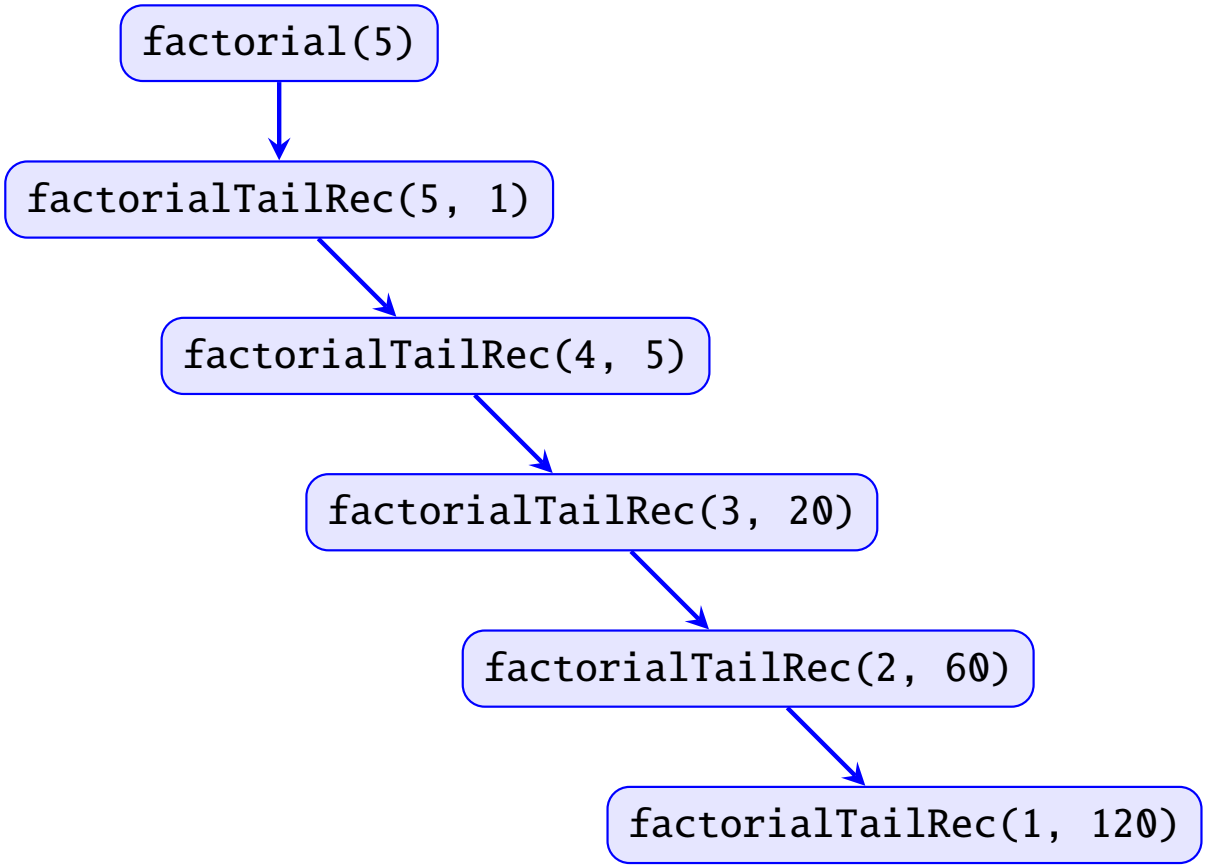
Faktoriaal


factorial(5)
factorialTailRec(5, 1)
factorialTailRec(4, 5)
factorialTailRec(3, 20)

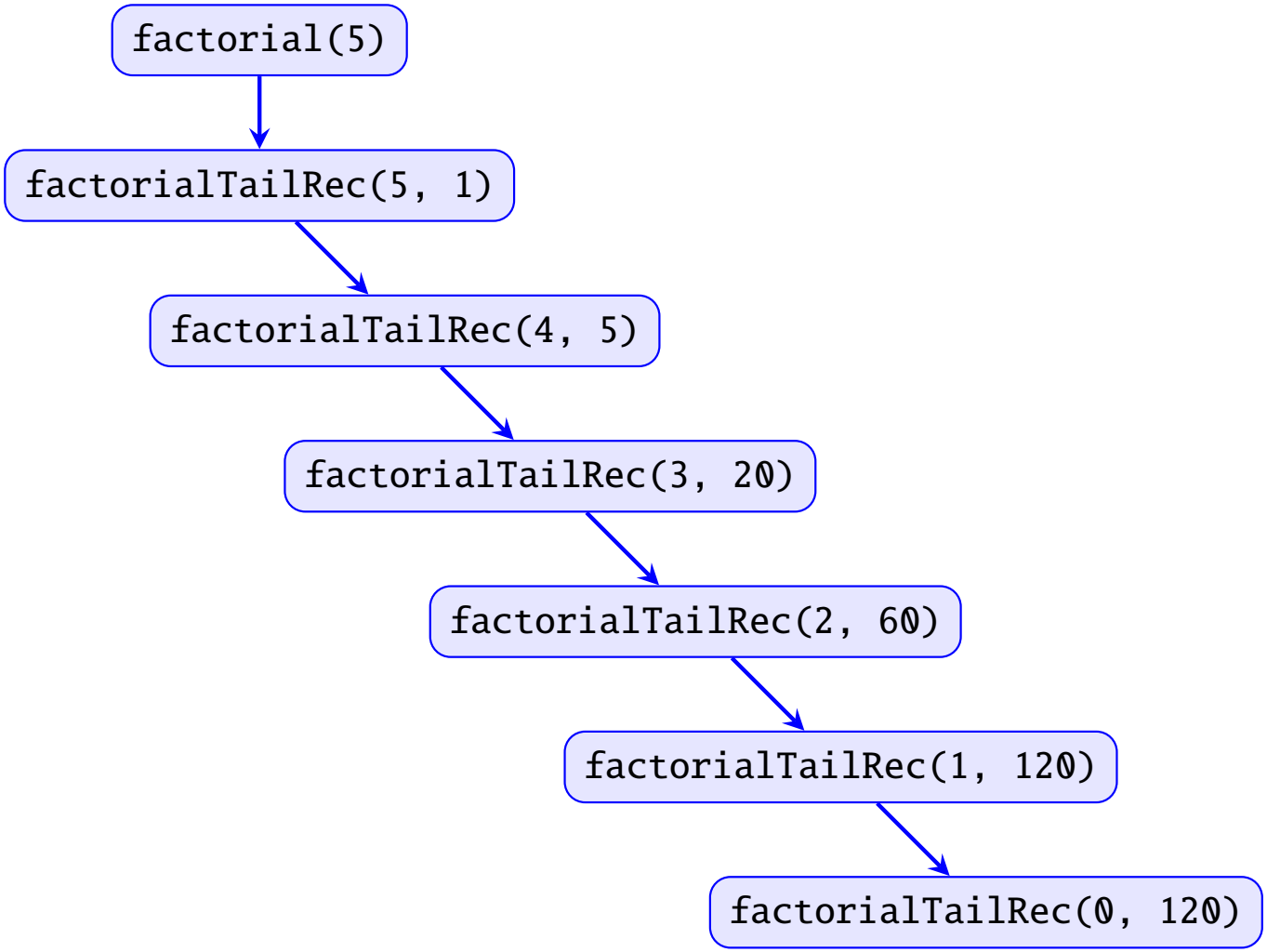
Faktoriaal


factorial(5)
factorialTailRec(5, 1)
factorialTailRec(4, 5)
factorialTailRec(3, 20)
factorialTailRec(2, 60)

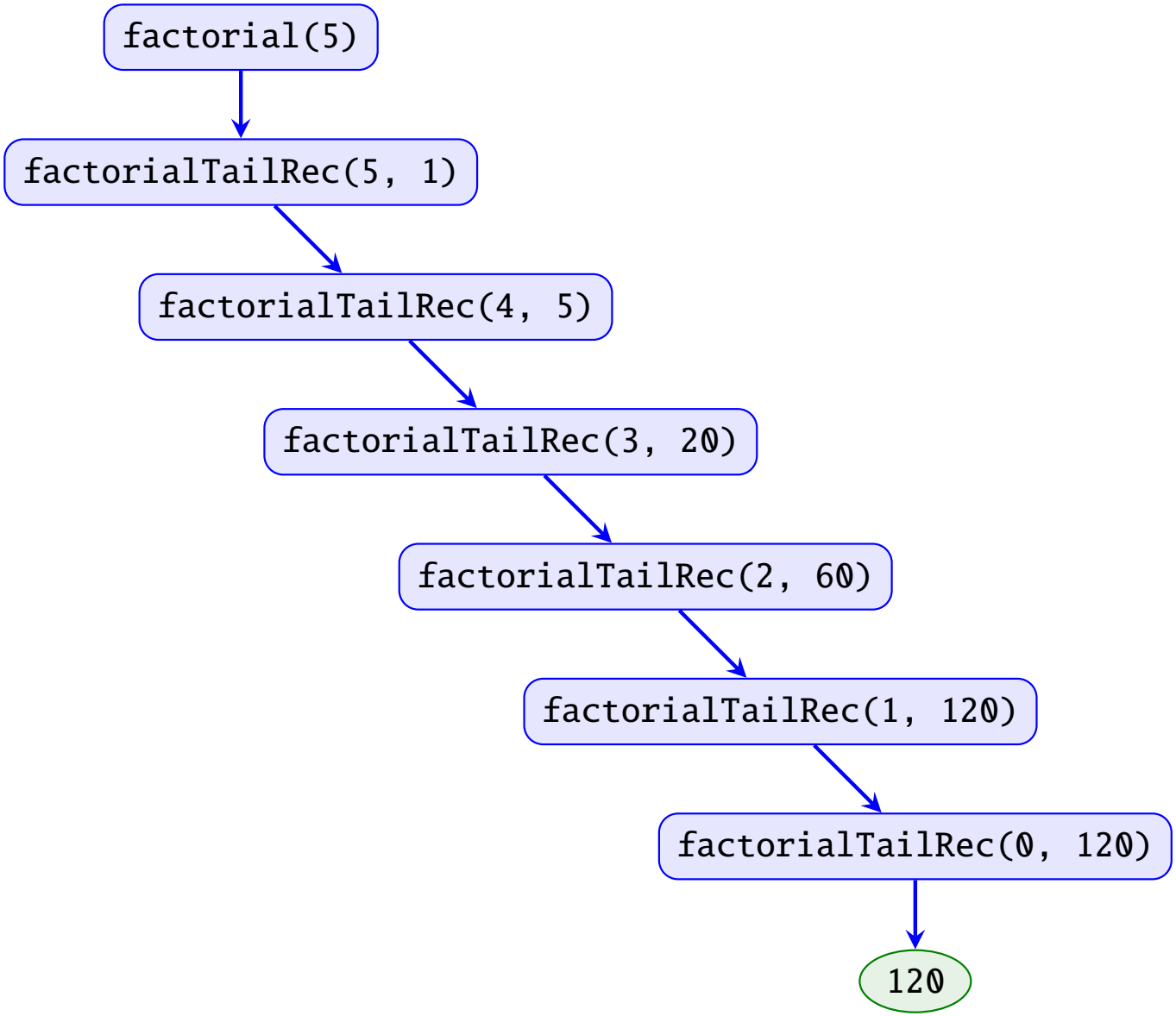
Faktoriaal


factorial(5)
factorialTailRec(5, 1)
factorialTailRec(4, 5)
factorialTailRec(3, 20)
factorialTailRec(2, 60)
factorialTailRec(1, 120)

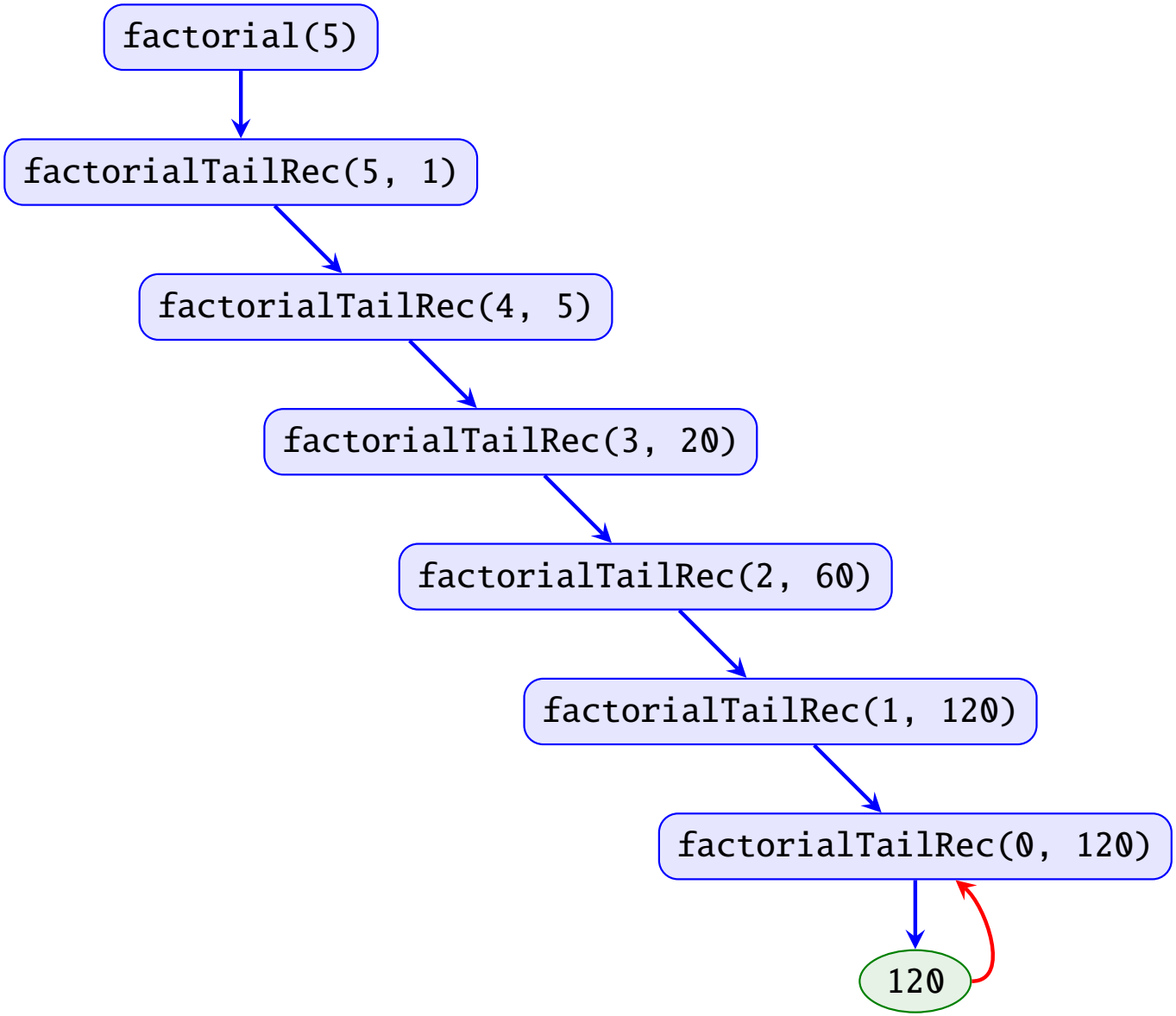
Faktoriaal


factorial(5)
factorialTailRec(5, 1)
factorialTailRec(4, 5)
factorialTailRec(3, 20)
factorialTailRec(2, 60)
factorialTailRec(1, 120)
factorialTailRec(0, 120)

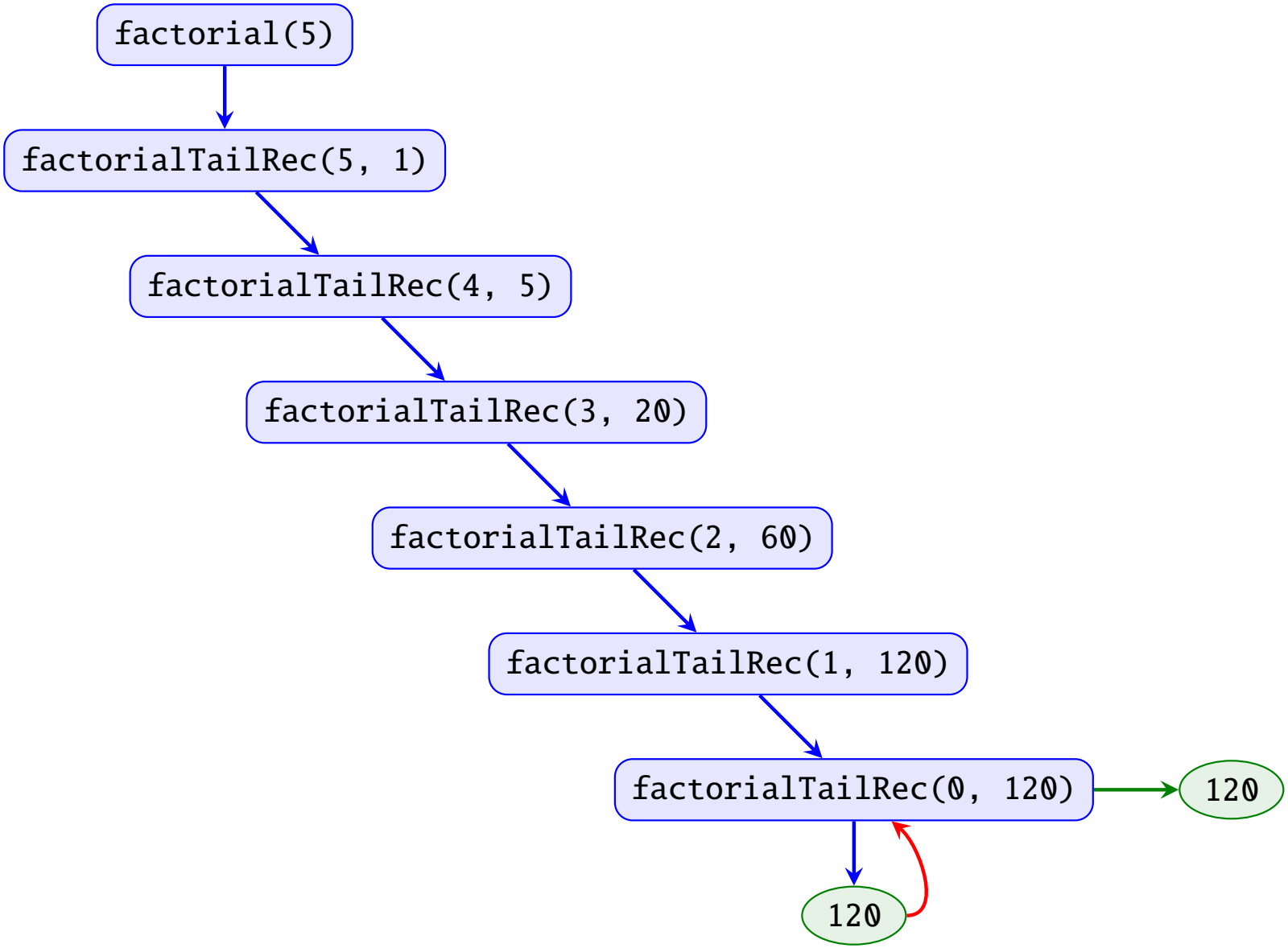
Faktoriaal


factorial(5)
factorialTailRec(5, 1)
factorialTailRec(4, 5)
factorialTailRec(3, 20)
factorialTailRec(2, 60)
factorialTailRec(1, 120)
factorialTailRec(0, 120)
120

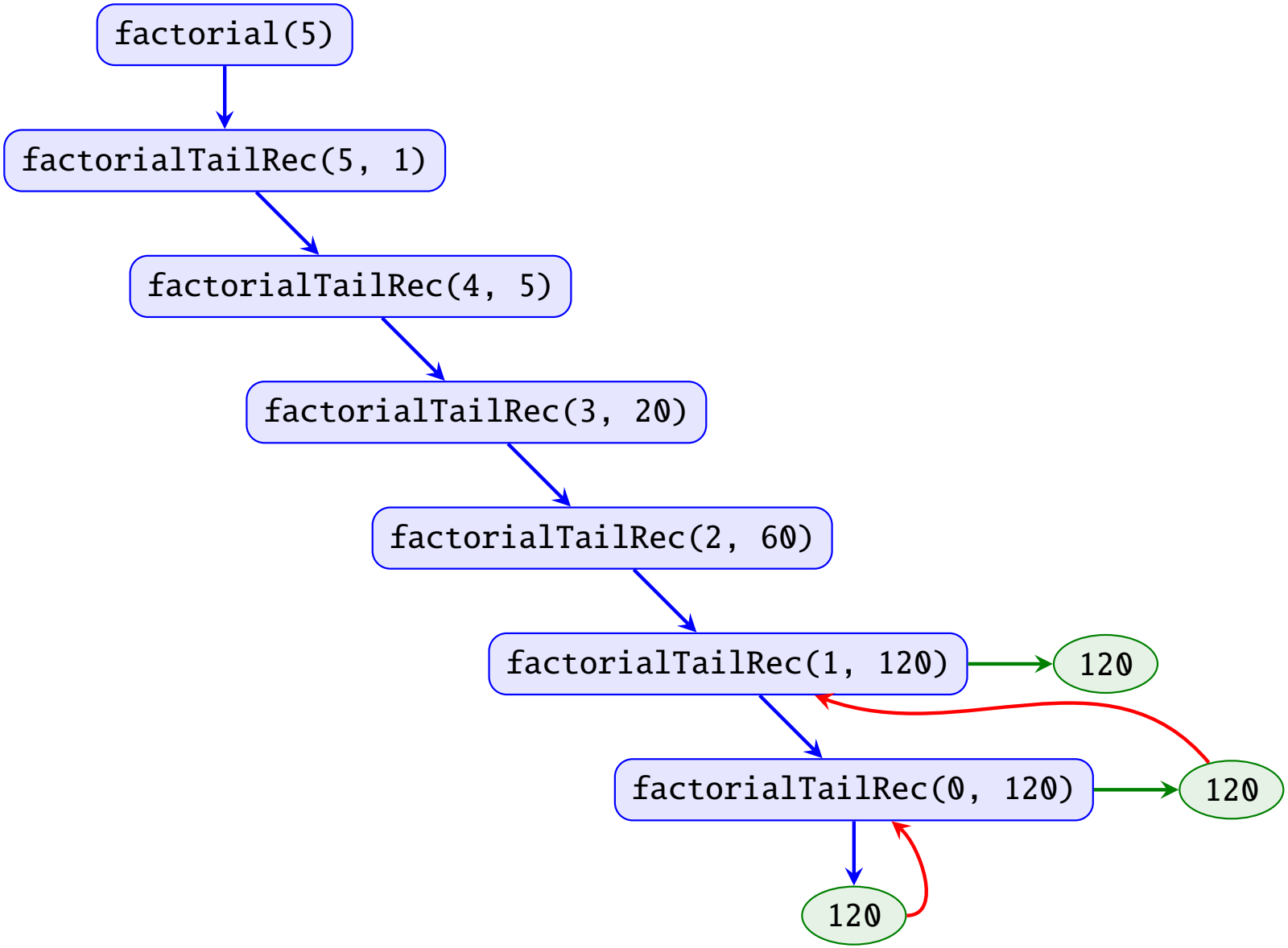
Faktoriaal


factorial(5)
factorialTailRec(5, 1)
factorialTailRec(4, 5)
factorialTailRec(3, 20)
factorialTailRec(2, 60)
factorialTailRec(1, 120)
factorialTailRec(0, 120)
120

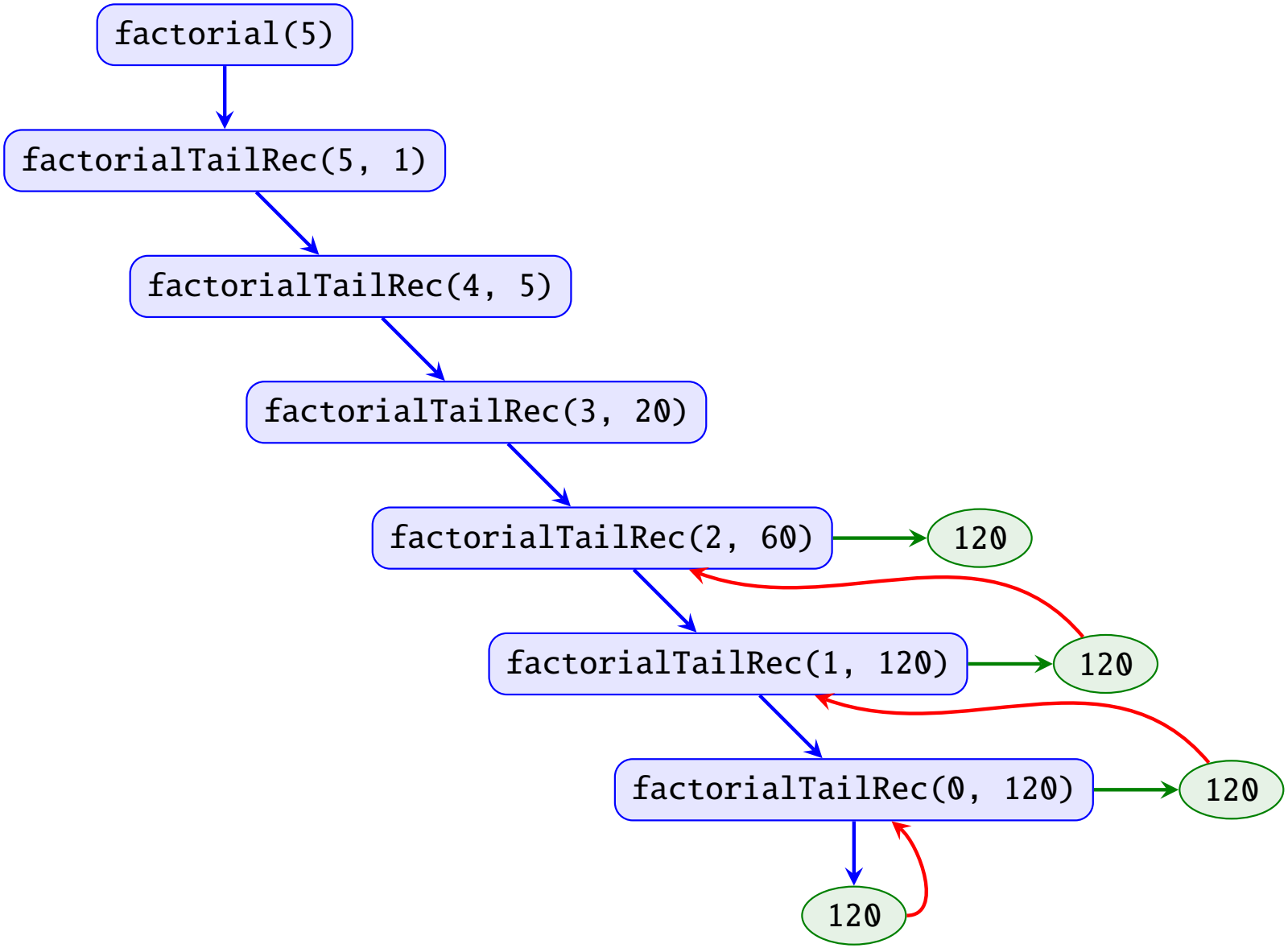
Faktoriaal


factorial(5)
factorialTailRec(5, 1)
factorialTailRec(4, 5)
factorialTailRec(3, 20)
factorialTailRec(2, 60)
factorialTailRec(1, 120)
factorialTailRec(0, 120)
120
120

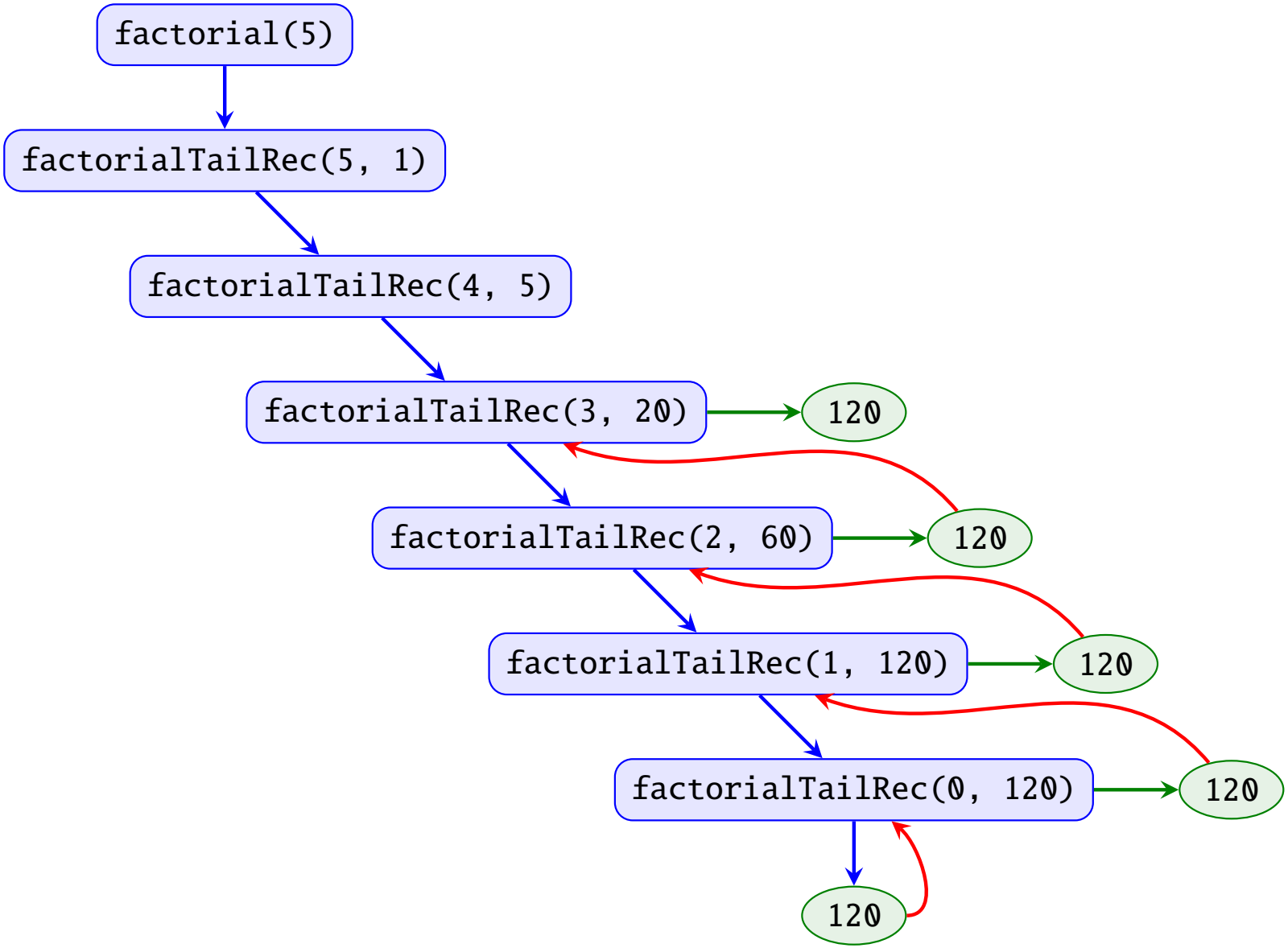
Faktoriaal


factorial(5)
factorialTailRec(5, 1)
factorialTailRec(4, 5)
factorialTailRec(3, 20)
factorialTailRec(2, 60)
factorialTailRec(1, 120)
120
factorialTailRec(0, 120)
120
120

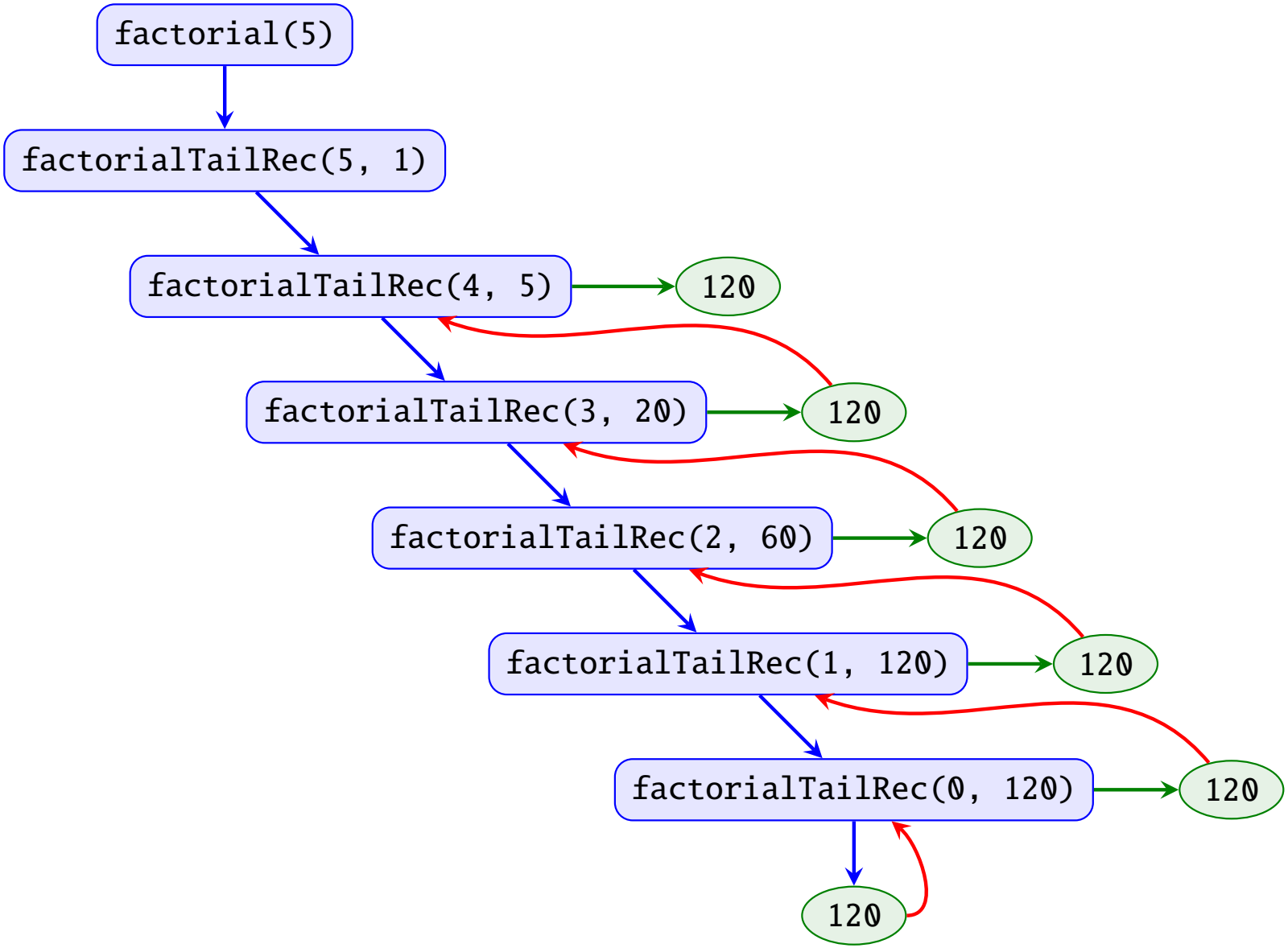
Faktoriaal


factorial(5)
factorialTailRec(5, 1)
factorialTailRec(4, 5)
factorialTailRec(3, 20)
factorialTailRec(2, 60)
120
factorialTailRec(1, 120)
120
factorialTailRec(0, 120)
120
120

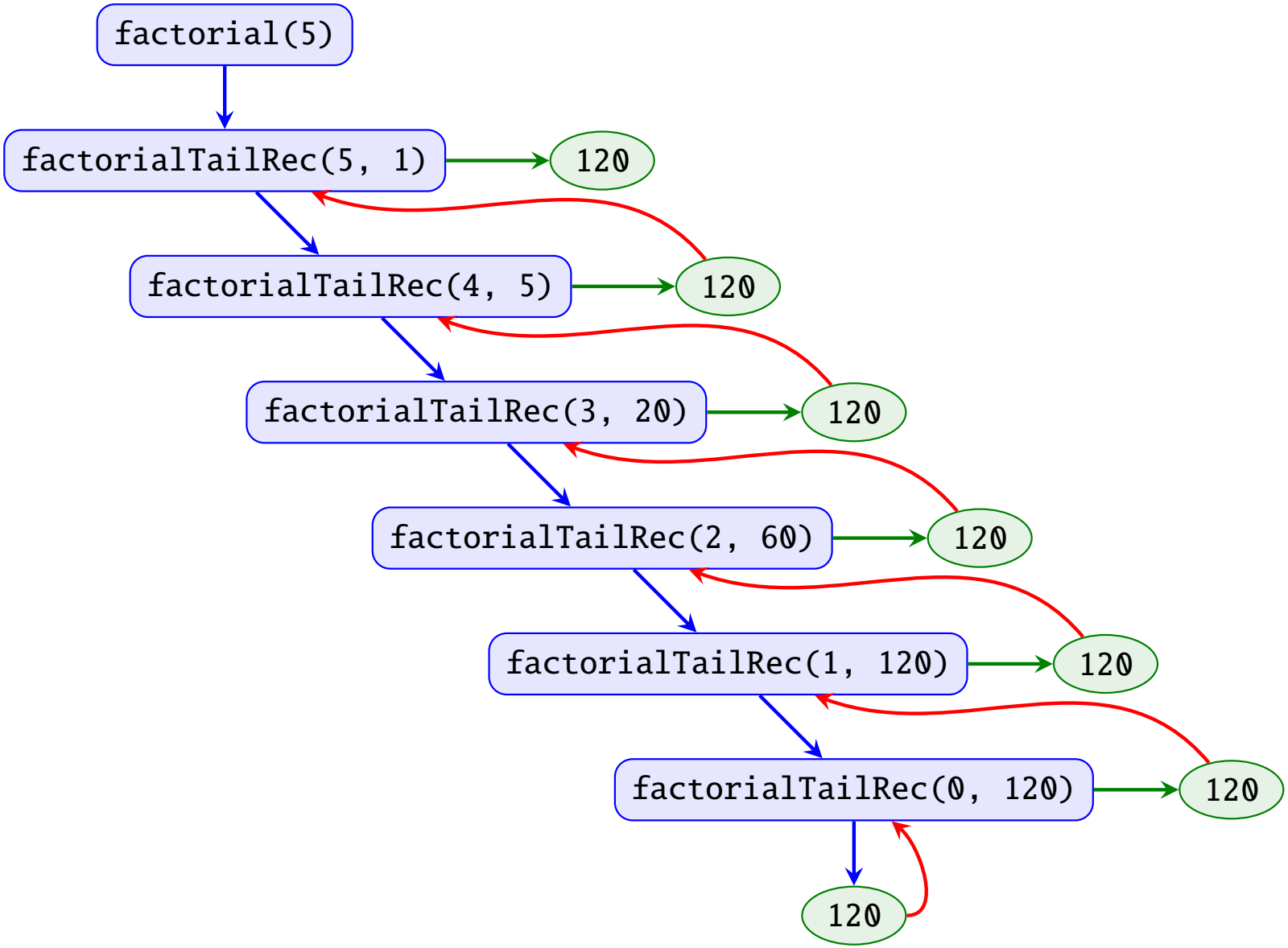
Faktoriaal


factorial(5)
factorialTailRec(5, 1)
factorialTailRec(4, 5)
factorialTailRec(3, 20)
120
factorialTailRec(2, 60)
120
factorialTailRec(1, 120)
120
factorialTailRec(0, 120)
120
120

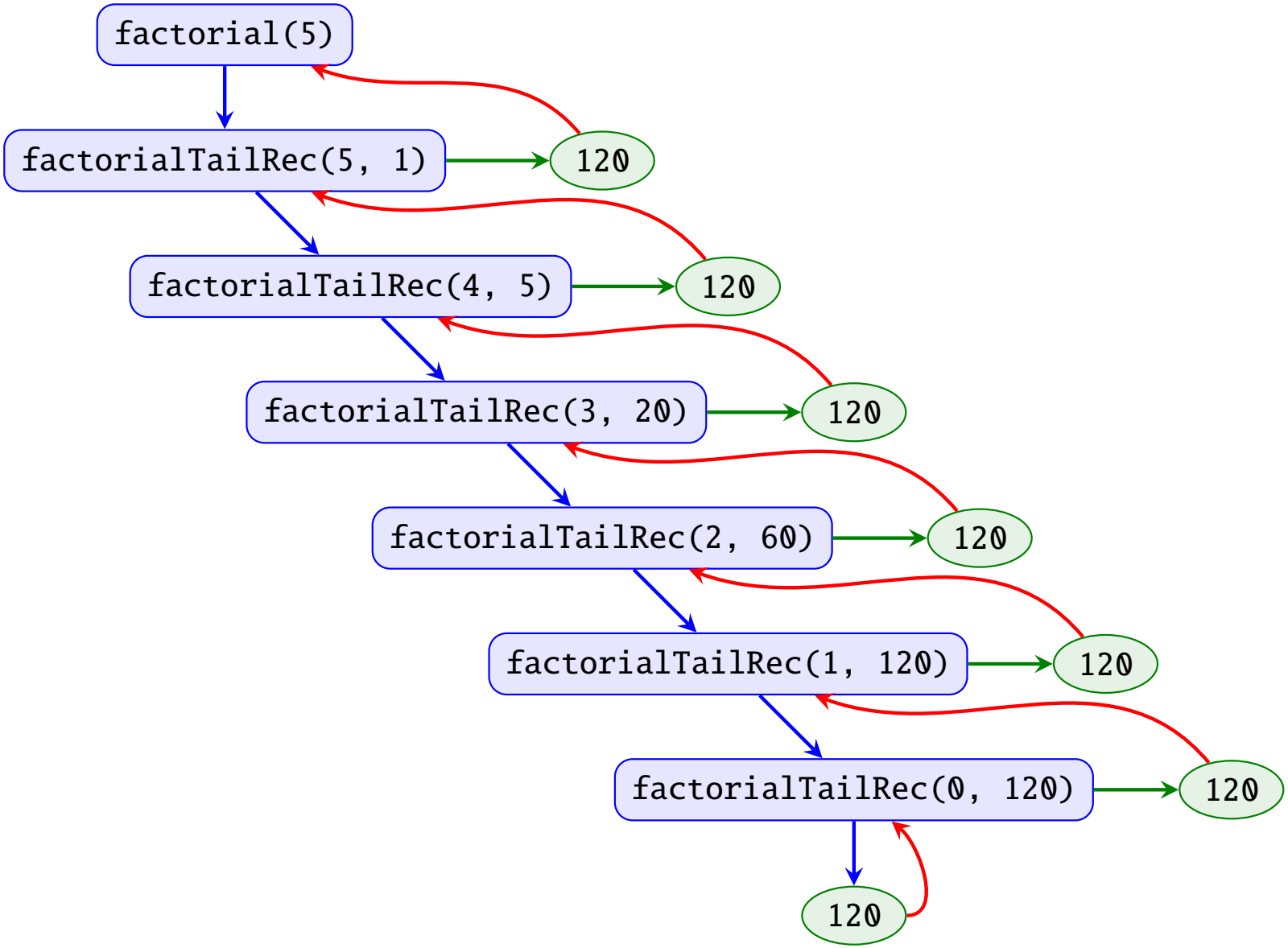
Faktoriaal


factorial(5)
factorialTailRec(5, 1)
factorialTailRec(4, 5)
120
factorialTailRec(3, 20)
120
factorialTailRec(2, 60)
120
factorialTailRec(1, 120)
120
factorialTailRec(0, 120)
120
120

Faktoriaal


factorial(5)
factorialTailRec(5, 1)
120
factorialTailRec(4, 5)
120
factorialTailRec(3, 20)
120
factorialTailRec(2, 60)
120
factorialTailRec(1, 120)
120
factorialTailRec(0, 120)
120
120

Faktoriaal


factorial(5)
factorialTailRec(5, 1)
120
factorialTailRec(4, 5)
120
factorialTailRec(3, 20)
120
factorialTailRec(2, 60)
120
factorialTailRec(1, 120)
120
factorialTailRec(0, 120)
120
120

Sabarekursioon

- Kui kõik tegevused toimuvad enne rekursiivset väljakutset, nimetatakse rekursiooni sabarekursiooniks.
- Sabarekursiooni on väga lihtne teisendada tavaliseks tsükliks (ja ka vastupidi).

Sabarekursiivne faktoriaal

```
def factorialTailRec(n, f):
    if n == 0:
        return f
    else:
        return factorialTailRec(n-1, f*n)

def factorial(n):
    return factorialTailRec(n,1)
```

Sabarekursioon

- Kui kõik tegevused toimuvad enne rekursiivset väljakutset, nimetatakse rekursiooni sabarekursiooniks.
- Sabarekursiooni on väga lihtne teisendada tavaliseks tsükliks (ja ka vastupidi).

Sabarekursiivne faktoriaal (ver. 2)

```
def factorial(n, f=1):
    if n == 0:
        return f
    else:
        return factorial(n-1, f*n)
```

Sabarekursioon

- Kui kõik tegevused toimuvad enne rekursiivset väljakutset, nimetatakse rekursiooni sabarekursiooniks.
- Sabarekursiooni on väga lihtne teisendada tavaliseks tsükliks (ja ka vastupidi).

Sabarekursiivne faktoriaal (ver. 3)

```
def factorial(n, f=1):
    if n != 0:
        return factorial(n-1, f*n)
    else:
        return f
```

Sabarekursioon

- Kui kõik tegevused toimuvad enne rekursiivset väljakutset, nimetatakse rekursiooni sabarekursiooniks.
- Sabarekursiooni on väga lihtne teisendada tavaliseks tsükliks (ja ka vastupidi).

Ekvivalentne iteratiivne faktoriaal

```
def factorial(n):
    f = 1
    while n != 0:
        f = f*n
        n = n-1
    return f
```

Rekursiooniskeemid

- Kõigis seni vaadeldud näidetes kutsuti funktsiooni kehas funktsiooni ennast välja ülimalt üks kord.
- Sellist rekursiooni nimetatakse lineaarseks, kuna rekursiivsete väljakutsete kontrollvoog on lineaarne ahel.
- Keerukamad rekursiooniskeemid kasutavad erinevaid rekursiivse väljakutse mustreid:
  - Puurekursiooni korral kutsutakse funktsiooni rekursiivselt "samal tasemel" välja kaks või enam korda.
  - Vastastikuse rekursiooni korral kutsub üks funktsioon teist ja teine esimest.
  - ...

Puurekursioon

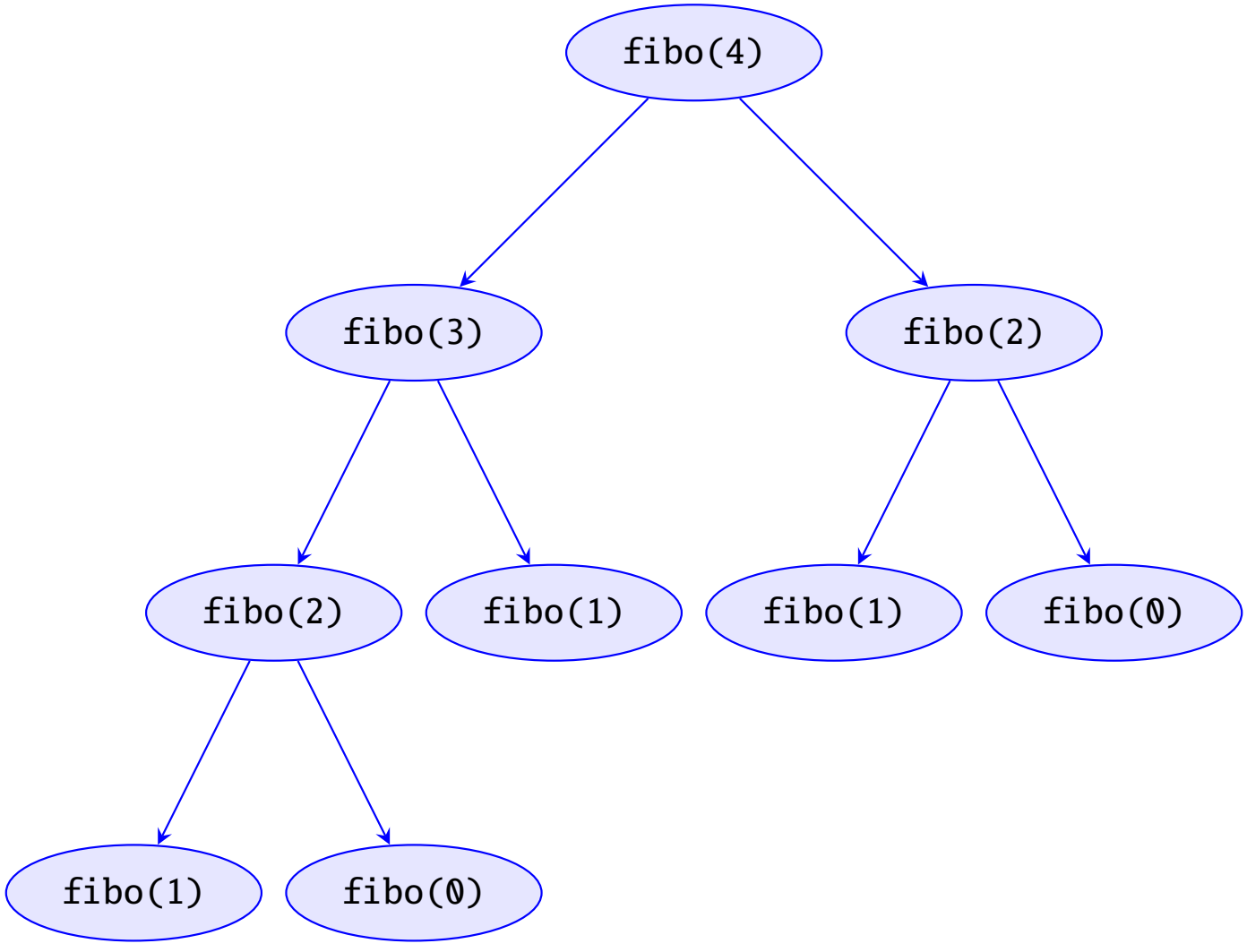
Fibonacci arvud

```
def fibonacci(n):
    if   n == 0:
        return 0
    elif n == 1:
        return 1
    else:
        return fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2)
```

Näide

```
print(fibonacci(2))      # Trükib: 1
print(fibonacci(3))      # Trükib: 2
print(fibonacci(4))      # Trükib: 3
print(fibonacci(5))      # Trükib  5
print(fibonacci(6))      # Trükib  8
```

Puurekursioon



Vastastikune rekursioon

Arvu paarsuse leidmine

```
def even(n):
    if n == 0: return True
    else:      return odd(n-1)

def odd(n):
    if n == 0: return False
    else:      return even(n-1)
```

Näide

```
print(even(2))      # Trükib: True
print(even(3))      # Trükib: False
print(odd(2))       # Trükib: False
print(odd(3))       # Trükib: True
```

Sisestatud rekursioon

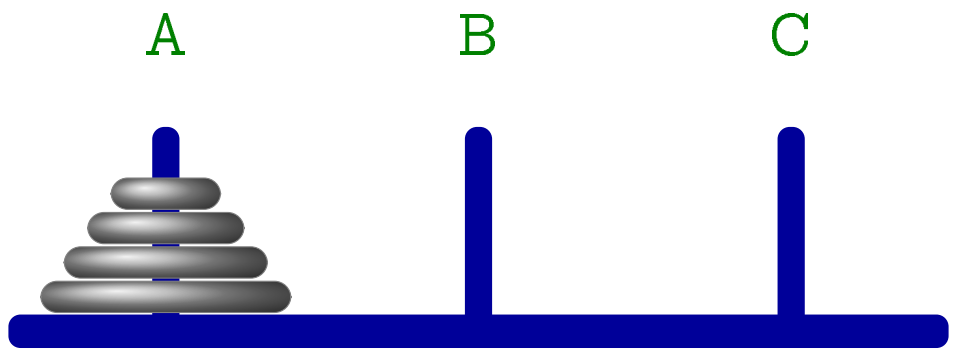
Ackermanni funktsioon

```
def ackermann(m, n):
    if m == 0:
        return n+1
    elif n == 0:
        return ackermann(m-1, 1)
    else:
        return ackermann(m-1, ackermann(m, n-1))
```

Näide

```
print(ackermann(3,4))    # Trükib: 125
print(ackermann(3,5))    # Trükib: 253
print(ackermann(3,6))    # Trükib: 509
print(ackermann(3,7))    # Trükib: ...
print(ackermann(4,1))    # Trükib: ...
```

Näide: Hanoi tornid



Algseis:

Tornis A on n erineva suurusega ketast.
Kettad on suuruse järjekorras (väiksem kõige peal).

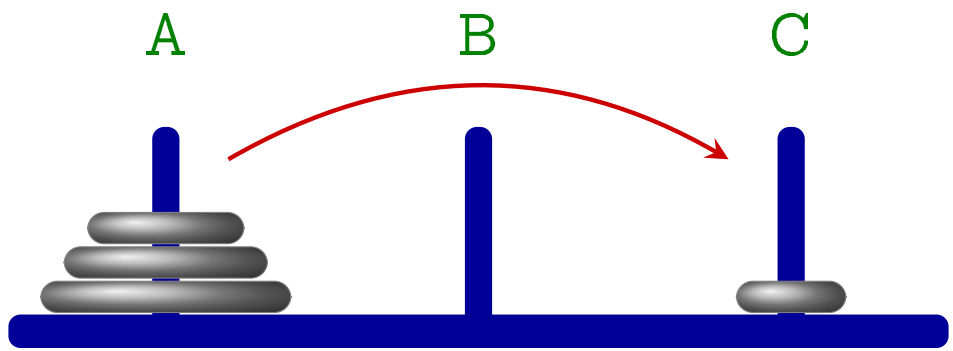
Eesmärk:

Viia kõik kettad tornist A torni B.

Käigud:

Mingi torni ülemise ketta võib tõsta teise torni.
Suuremat ketast ei tohi väiksema peale panna.

Näide: Hanoi tornid



Algseis:

Tornis A on n erineva suurusega ketast.
Kettad on suuruse järjekorras (väiksem kõige peal).

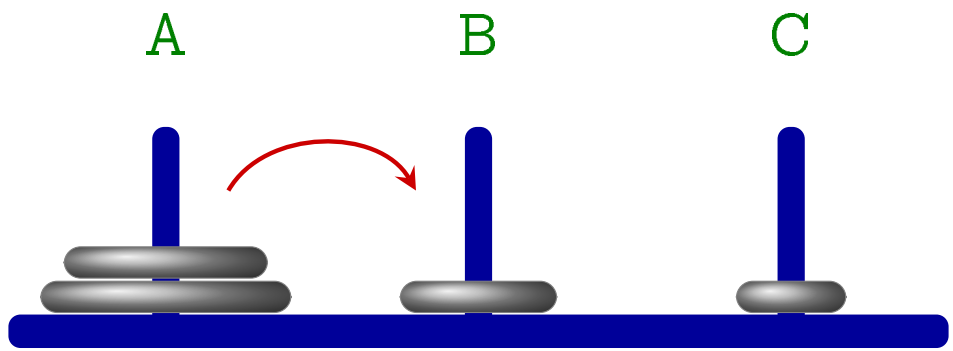
Eesmärk:

Viia kõik kettad tornist A torni B.

Käigud:

Mingi torni ülemise ketta võib tõsta teise torni.
Suuremat ketast ei tohi väiksema peale panna.

Näide: Hanoi tornid



Algseis:

Tornis A on n erineva suurusega ketast.
Kettad on suuruse järjekorras (väiksem kõige peal).

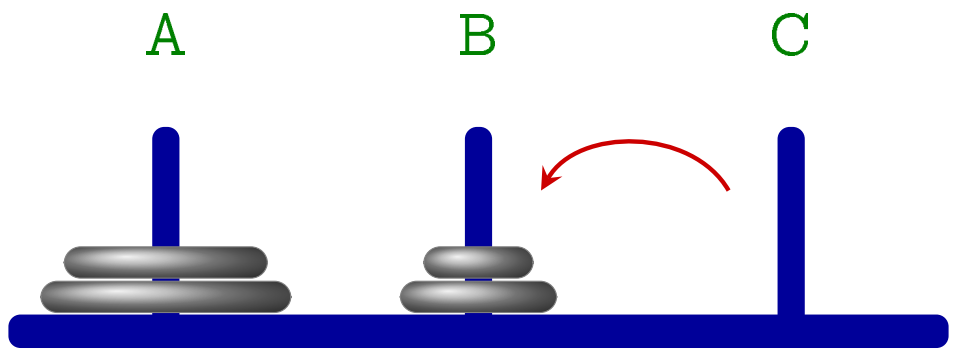
Eesmärk:

Viia kõik kettad tornist A torni B.

Käigud:

Mingi torni ülemise ketta võib tõsta teise torni.
Suuremat ketast ei tohi väiksema peale panna.

Näide: Hanoi tornid



Algseis:

Tornis A on n erineva suurusega ketast.
Kettad on suuruse järjekorras (väiksem kõige peal).

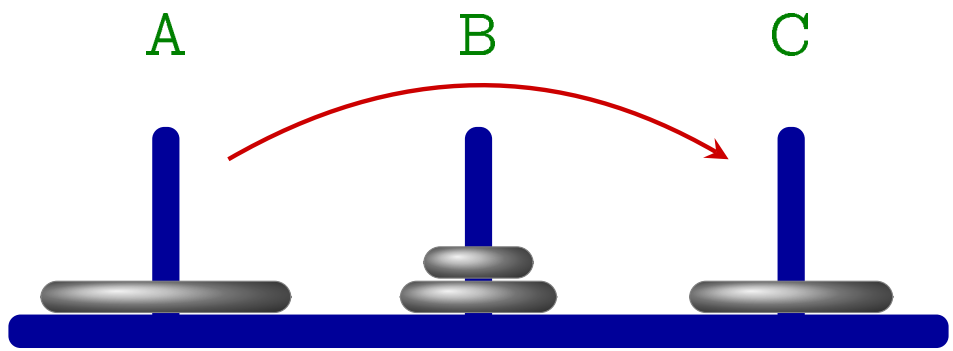
Eesmärk:

Viia kõik kettad tornist A torni B.

Käigud:

Mingi torni ülemise ketta võib tõsta teise torni.
Suuremat ketast ei tohi väiksema peale panna.

Näide: Hanoi tornid



Algseis:

Tornis A on n erineva suurusega ketast.
Kettad on suuruse järjekorras (väiksem kõige peal).

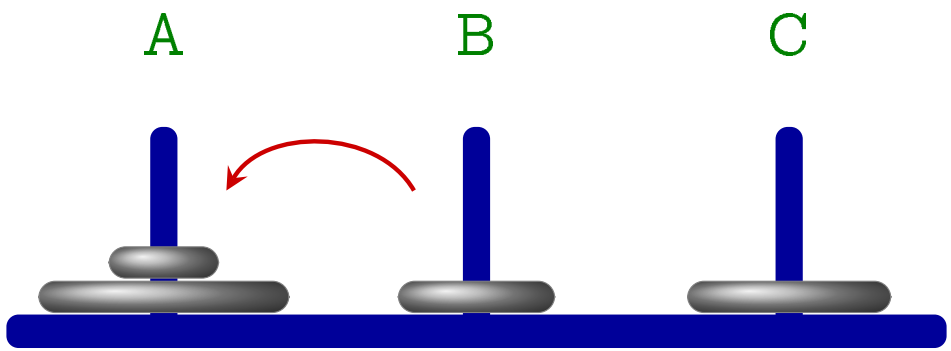
Eesmärk:

Viia kõik kettad tornist A torni B.

Käigud:

Mingi torni ülemise ketta võib tõsta teise torni.
Suuremat ketast ei tohi väiksema peale panna.

Näide: Hanoi tornid



Algseis:

Tornis A on n erineva suurusega ketast.
Kettad on suuruse järjekorras (väiksem kõige peal).

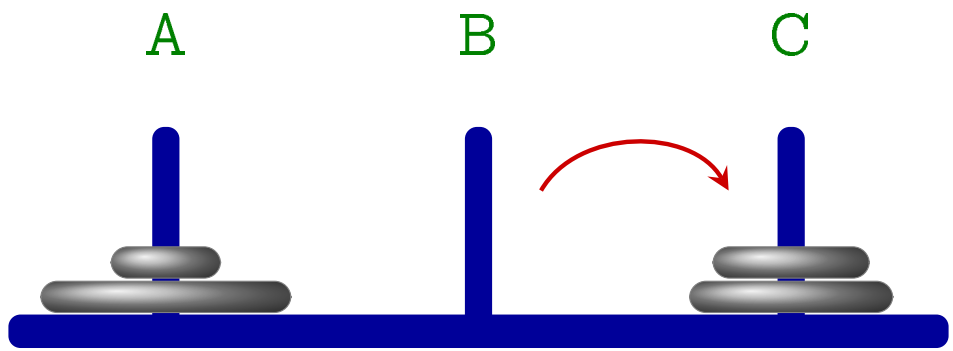
Eesmärk:

Viia kõik kettad tornist A torni B.

Käigud:

Mingi torni ülemise ketta võib tõsta teise torni.
Suuremat ketast ei tohi väiksema peale panna.

Näide: Hanoi tornid



Algseis:

Tornis A on n erineva suurusega ketast.
Kettad on suuruse järjekorras (väiksem kõige peal).

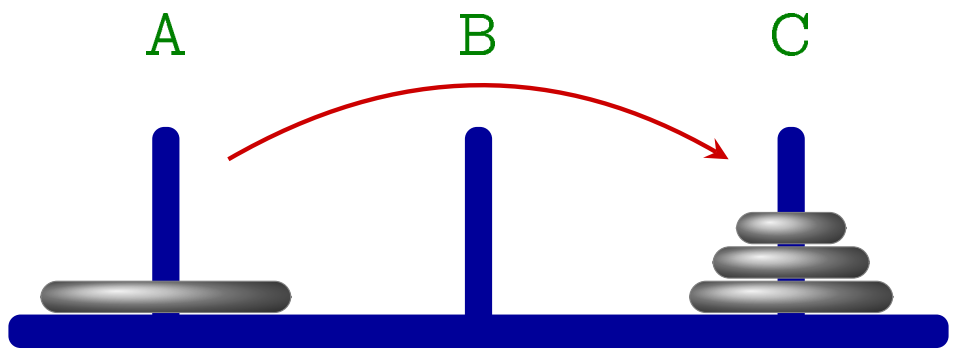
Eesmärk:

Viia kõik kettad tornist A torni B.

Käigud:

Mingi torni ülemise ketta võib tõsta teise torni.
Suuremat ketast ei tohi väiksema peale panna.

Näide: Hanoi tornid



Algseis:

Tornis A on n erineva suurusega ketast.
Kettad on suuruse järjekorras (väiksem kõige peal).

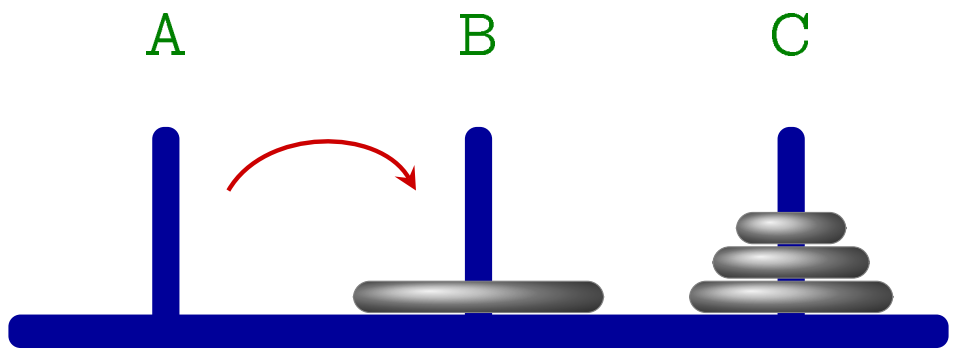
Eesmärk:

Viia kõik kettad tornist A torni B.

Käigud:

Mingi torni ülemise ketta võib tõsta teise torni.
Suuremat ketast ei tohi väiksema peale panna.

Näide: Hanoi tornid



Algseis:

Tornis A on n erineva suurusega ketast.
Kettad on suuruse järjekorras (väiksem kõige peal).

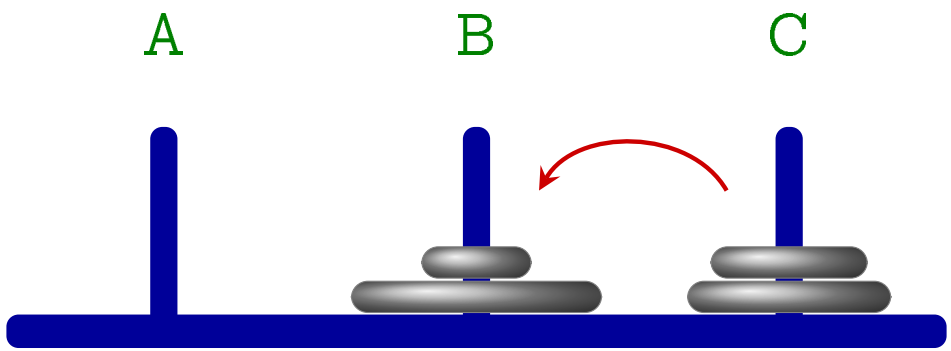
Eesmärk:

Viia kõik kettad tornist A torni B.

Käigud:

Mingi torni ülemise ketta võib tõsta teise torni.
Suuremat ketast ei tohi väiksema peale panna.

Näide: Hanoi tornid



Algseis:

Tornis A on n erineva suurusega ketast.
Kettad on suuruse järjekorras (väiksem kõige peal).

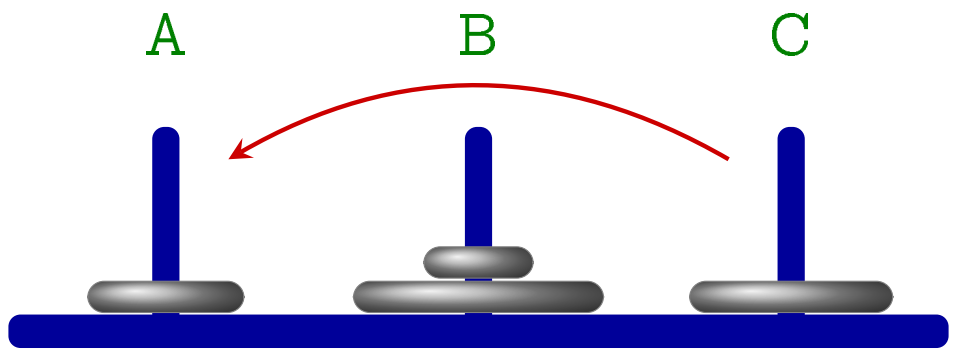
Eesmärk:

Viia kõik kettad tornist A torni B.

Käigud:

Mingi torni ülemise ketta võib tõsta teise torni.
Suuremat ketast ei tohi väiksema peale panna.

Näide: Hanoi tornid



Algseis:

Tornis A on n erineva suurusega ketast.
Kettad on suuruse järjekorras (väiksem kõige peal).

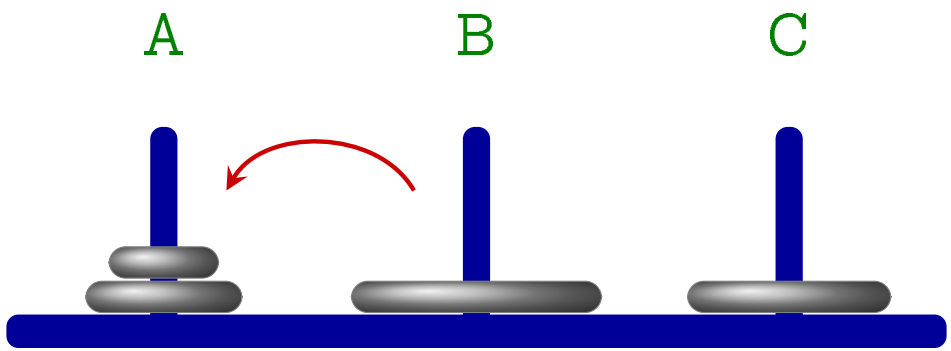
Eesmärk:

Viia kõik kettad tornist A torni B.

Käigud:

Mingi torni ülemise ketta võib tõsta teise torni.
Suuremat ketast ei tohi väiksema peale panna.

Näide: Hanoi tornid



Algseis:

Tornis A on n erineva suurusega ketast.
Kettad on suuruse järjekorras (väiksem kõige peal).

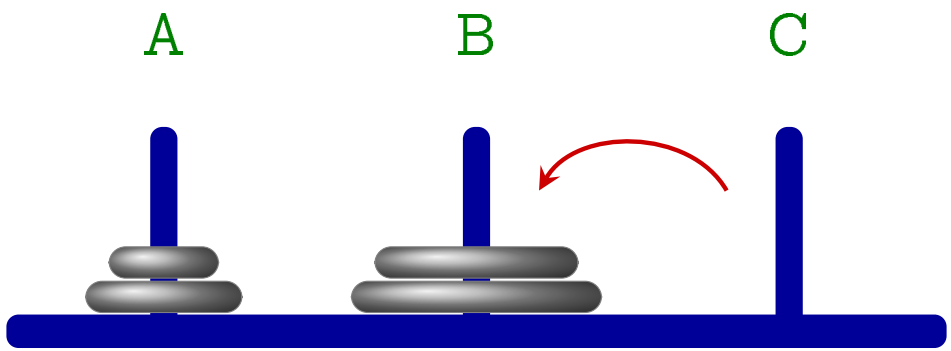
Eesmärk:

Viia kõik kettad tornist A torni B.

Käigud:

Mingi torni ülemise ketta võib tõsta teise torni.
Suuremat ketast ei tohi väiksema peale panna.

Näide: Hanoi tornid



Algseis:

Tornis A on n erineva suurusega ketast.
Kettad on suuruse järjekorras (väiksem kõige peal).

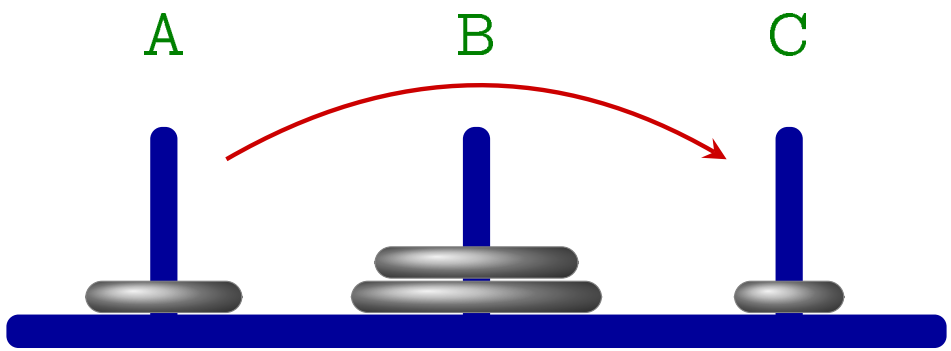
Eesmärk:

Viia kõik kettad tornist A torni B.

Käigud:

Mingi torni ülemise ketta võib tõsta teise torni.
Suuremat ketast ei tohi väiksema peale panna.

Näide: Hanoi tornid



Algseis:

Tornis A on n erineva suurusega ketast.
Kettad on suuruse järjekorras (väiksem kõige peal).

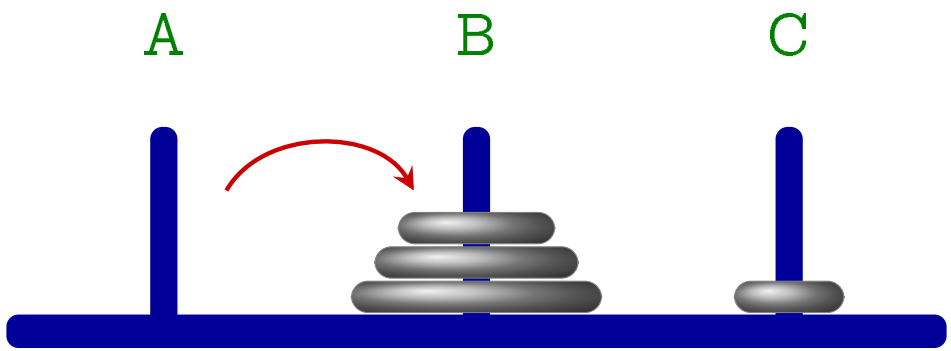
Eesmärk:

Viia kõik kettad tornist A torni B.

Käigud:

Mingi torni ülemise ketta võib tõsta teise torni.
Suuremat ketast ei tohi väiksema peale panna.

Näide: Hanoi tornid



Algseis:

Tornis A on n erineva suurusega ketast.
Kettad on suuruse järjekorras (väiksem kõige peal).

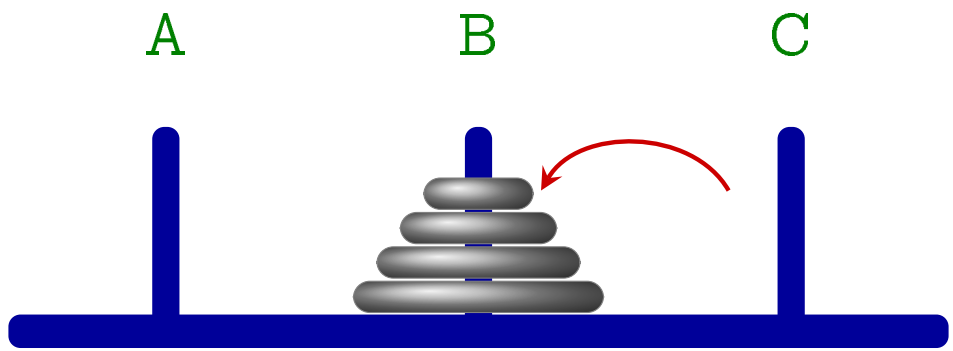
Eesmärk:

Viia kõik kettad tornist A torni B.

Käigud:

Mingi torni ülemise ketta võib tõsta teise torni.
Suuremat ketast ei tohi väiksema peale panna.

Näide: Hanoi tornid



Algseis:

Tornis A on n erineva suurusega ketast.
Kettad on suuruse järjekorras (väiksem kõige peal).

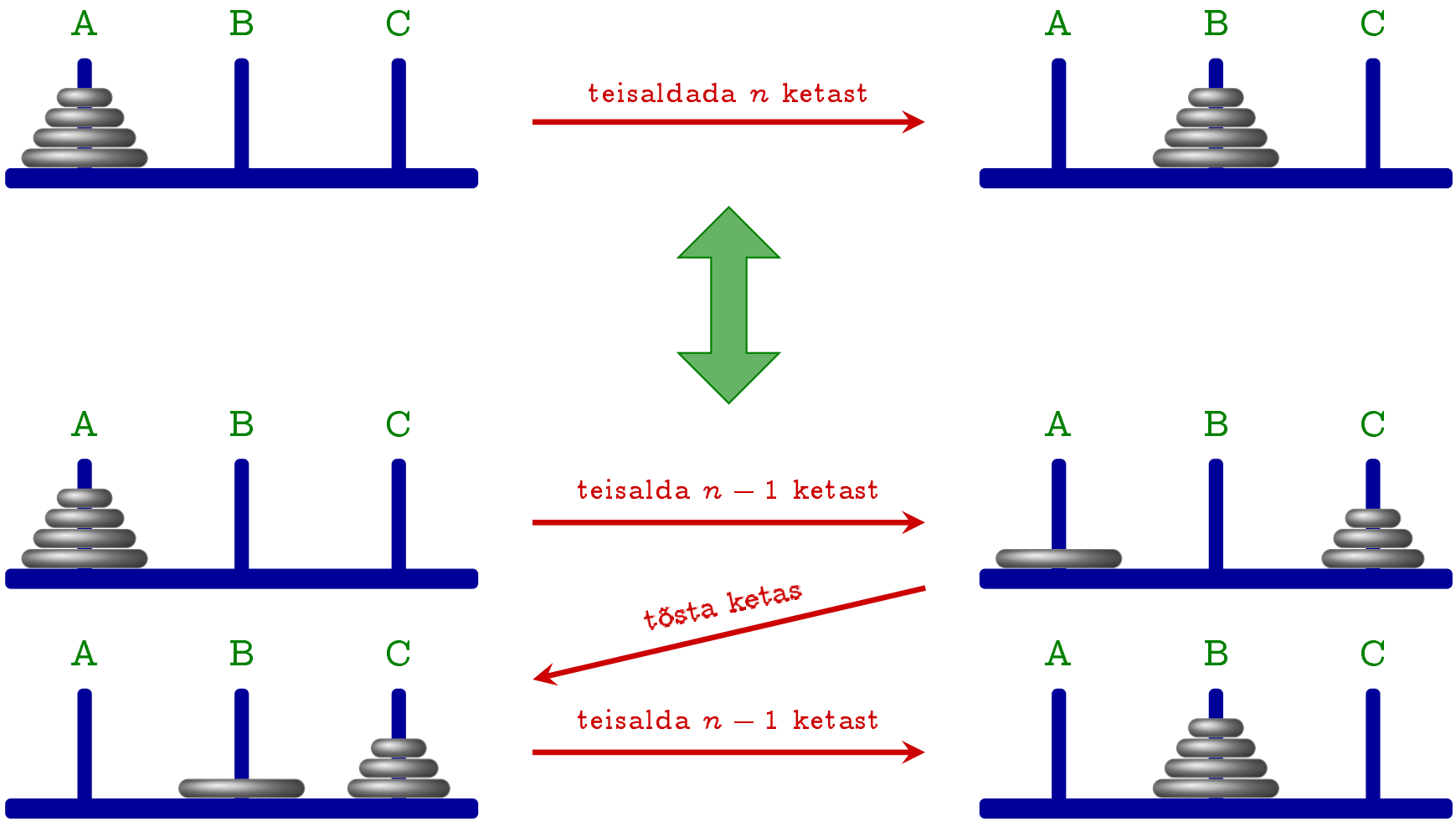
Eesmärk:

Viia kõik kettad tornist A torni B.

Käigud:

Mingi torni ülemise ketta võib tõsta teise torni.
Suuremat ketast ei tohi väiksema peale panna.

Näide: Hanoi tornid



Näide: Hanoi tornid

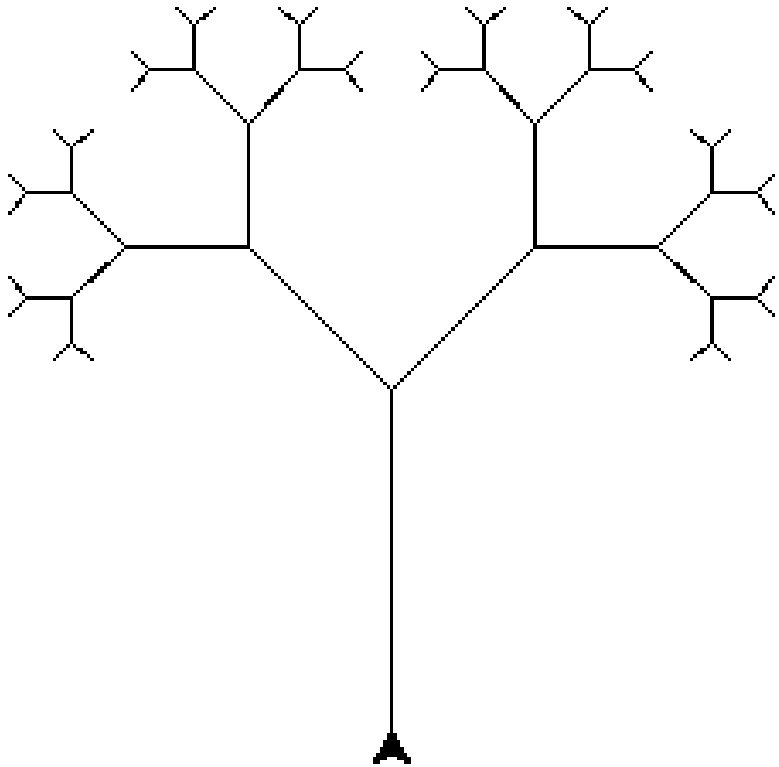
Lahendprogramm Pythonis

```
def moveTower(n,src,tgt,aux):
    if n == 1:
        moveDisk(src,tgt)
    else:
        moveTower(n-1,src,aux,tgt)
        moveDisk(src,tgt)
        moveTower(n-1,aux,tgt,src)

def moveDisk(src,tgt):
    print(src, "->", tgt)

n = int(input('Sisesta ketaste arv: '))
moveTower(n,'A','B','C')
```

Näide: puu joonistamine



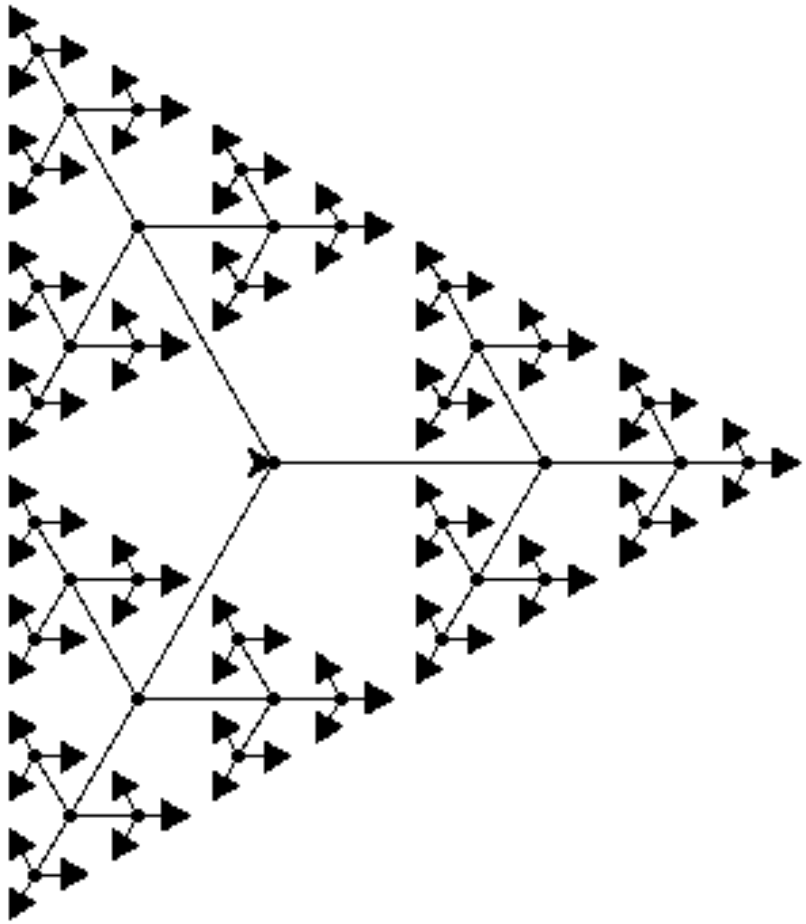
Näide: puu joonistamine

```
import turtle

def tree(length, level):
    if level <= 0:
        return
    turtle.forward(length)
    turtle.left(45)
    tree(0.6*length, level-1)
    turtle.right(90)
    tree(0.6*length, level-1)
    turtle.left(45)
    turtle.backward(length)
    return

turtle.left(90)
tree(100,6)
```

Näide: Sierpinski kolmnurk



Näide: Sierpinski kolmnurk

```
def sierpinski(length, level):
    if level > 1:
        turtle.dot()
    if level == 0:
        turtle.stamp()
    else:
        turtle.forward(length)
        sierpinski(length/2, level-1)
        turtle.backward(length)
        turtle.left(120)
        turtle.forward(length)
        sierpinski(length/2, level-1)
        turtle.backward(length)
        turtle.left(120)
        turtle.forward(length)
        sierpinski(length/2, level-1)
        turtle.backward(length)
        turtle.left(120)
```

Suur tänu osalemast

ja

kohtumiseni!