INAUGURATSIOONILOENG

Järjestatud algebralistest struktuuridest

Valdis Laan

13. aprill 2016

Valdkondadest

- Poolrühmateooria
- Kategooriateooria
- Järjestatud algebralised struktuurid

Morita ekvivalentsus erinevate struktuuride jaoks

Poolrühmadest

Def. **Kahekohaline algebraline tehe** hulgal S on eeskiri, mis igale hulga S elementide järjestatud paarile (s, t) seab vastavusse mingi elemendi $s * t$ hulgast S.

Edaspidi ütleme "kahekohalise algebralise tehte" asemel lühidalt "tehe".

Def. **Poolrühm** on paar $(S, *)$, kus S on hulk ja $*$ on mingi tehe hulgal S, mis on assotsiatiivne, s.t.

$$(s * t) * u = s * (t * u)$$

hulga S mistahes elementide s, t, u korral.

Näide.

1. Naturaalarvude hulk $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ on poolrühm tehete suhtes, mis on defineeritud järgmiselt:

a) $s * t := st$ (sest $(st)u = s(tu)$);

b) $s * t := s + t$ (sest $(s + t) + u = s + (t + u)$);

c) $s * t := \text{SÜT}(s, t)$

(sest $\text{SÜT}(\text{SÜT}(s, t), u) = \text{SÜT}(s, \text{SÜT}(t, u))$).

2. Täisarvude hulk $\mathbb{Z}$ on poolrühm liitmise ja korrutamise suhtes, aga ei ole poolrühm lahutamise suhtes. Tõepoolest:

$$(3 - 2) - 1 = 0 \neq 2 = 3 - (2 - 1).$$

3. Olgu $A = \{a, b, c, \ldots, ö, ü\}$ eesti tähestik. Vaatleme hulka A^+, mis koosneb kõigist sõnadest tähestikus A. Hulk A^+ on poolrühm sõnade kõrvutikirjutamise ehk konkatenatsiooni suhtes. Selles poolrühmas näiteks

$$\begin{aligned} pool * rühm &= poolrühm, \\ all * maa * raud * tee * jaam &= allmaaraudteejaam, \\ kdfenv * mgprsa &= kdfenvmgprsa. \end{aligned}$$

Järjestatud hulkadest

Vaatleme naturaalarvude hulgal $\mathbb{N}$ jaguvusseost. Olgu $a, b \in \mathbb{N}$. Kirjutame $a \mid b$, kui arv b jagub arvuga a. Kui $a \mid b$, siis ütleme ka, et arv a **jagab** arvu b. Näiteks

$$2 \mid 6, \qquad\qquad 7 \mid 70,$$

kuid me ei saa kirjutada, et $2 \mid 3$.

Jaguvusseosel on järgmised omadused: mistahes $a, b, c \in \mathbb{N}$ korral

1. $a \mid a$;
2. kui $a \mid b$ ja $b \mid a$, siis $a = b$;
3. kui $a \mid b$ ja $b \mid c$, siis $a \mid c$.

Ka naturaalarvude harilikul võrdlemise seosel $\leqslant$ on sarnased omadused: mistahes $a, b, c \in \mathbb{N}$ korral

1. $a \leqslant a$;
2. kui $a \leqslant b$ ja $b \leqslant a$, siis $a = b$;
3. kui $a \leqslant b$ ja $b \leqslant c$, siis $a \leqslant c$.

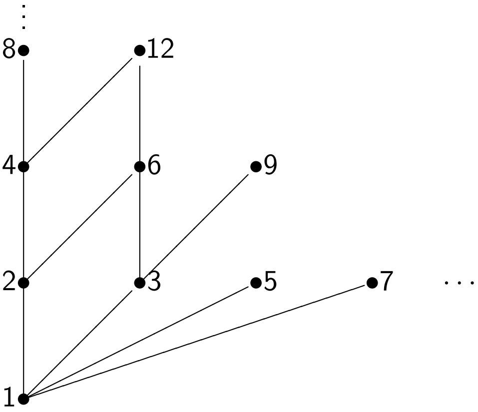
Mõlemad seosed ($|$ ja $\leqslant$) on erijuhuks üldisest järjestusseose mõistest.

Def. Hulga A elementide vahelist seost $\sqsubseteq$ nimetatakse **järjestusseoseks** hulgal A, kui ta rahuldab järgmisi tingimusi: mistahes $a, b, c \in A$ korral

1. $a \sqsubseteq a$ (refleksiivsus);
2. kui $a \sqsubseteq b$ ja $b \sqsubseteq a$, siis $a = b$ (antisümmeetria);
3. kui $a \sqsubseteq b$ ja $b \sqsubseteq c$, siis $a \sqsubseteq c$ (transitiivsus).

Def. **Järjestatud hulk** on paar $(A, \sqsubseteq)$, kus A on hulk ja $\sqsubseteq$ on mingi järjestusseos hulgal A.

$(\mathbb{N}, \leqslant)$



$(\mathbb{N}, \mid)$

Järjestatud poolrühmadest

Def. **Järjestatud poolrühm** on kolmik $(S, *, \leqslant)$, kus

1. $(S, *)$ on poolrühm;
2. $(S, \leqslant)$ on järjestatud hulk;
3. järjestusseos $\leqslant$ on kooskõlas korrutamisega, s.t. poolrühma S mistahes elementide u, v, s korral

$$\text{kui} \quad u \leqslant v, \quad \text{siis} \quad s * u \leqslant s * v \text{ ja } u * s \leqslant v * s.$$

Näide.

1. Hulk $\mathbb{N}$ koos hariliku järjestusega $\leqslant$ on järjestatud poolrühm nii liitmise kui korrutamise suhtes, sest mistahes $u, v, s \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned} u \leqslant v \;&\Rightarrow\; us \leqslant vs, \\ u \leqslant v \;&\Rightarrow\; u + s \leqslant v + s. \end{aligned}$$

2. Üks ja sama poolrühm võib olla järjestatud poolrühm paljude erinevate järjestusseoste suhtes. Näiteks võib lisaks harilikule järjestusele $\leqslant$ vaadelda poolrühmal $(\mathbb{N}, \cdot)$ ka jaguvusseose abil defineeritud järjestust $|$. Tõepoolest, kuna

$$a \mid b \;\; \Rightarrow \;\; ac \mid bc,$$

siis ka kolmik $(\mathbb{N}, \cdot, |)$ on järjestatud poolrühm, kusjuures ta erineb järjestatud poolrühmast $(\mathbb{N}, \cdot, \leqslant)$.

Seega: järjestatud poolrühmi on rohkem kui poolrühmi.

3. Vaatleme jälle sõnade poolrühma A^+ tähestikus $A = \{a, b, c, \dots, \ddot{o}, \ddot{u}\}$. Järjestame selle tähestiku harilikul viisil:

$$a \leqslant b \leqslant c \leqslant \dots \leqslant \ddot{o} \leqslant \ddot{u}.$$

Poolrühma A^+ võib vaadelda järjestatud poolrühmana nn. kvaasileksikograafilise järjestuse suhtes, mis defineeritakse järgmiselt:

$$\begin{aligned} w \preceq w', \; &\text{kui sõna } w \text{ on lühem kui sõna } w' \text{ või} \\ &w \text{ ja } w' \text{ on sama pikkusega ja} \\ &w \text{ on sõnaraamatus } w'\text{-st eespool.} \end{aligned}$$

Selles poolrühmas

$$a \preceq b \preceq \dots \preceq \text{ü} \preceq aa \preceq ab \preceq \dots \preceq \text{üü} \preceq aaa \preceq aab \preceq aac \preceq \dots .$$

Järjestusseos $\preceq$ on kooskõlas kõrvutikirjutamise tehtega. Näiteks

$$\textit{kera} \preceq \textit{rühm} \quad \Rightarrow \quad \textit{poolkera} \preceq \textit{poolrühm}.$$

4. Kui $(A, \leqslant)$ on järjestatud hulk, siis $(\mathcal{T}(A), \circ, \preceq)$ on järjestatud poolrühm, kus $\mathcal{T}(A)$ on kõigi kujutuste $A \to A$ hulk ning kui $f, g \in \mathcal{T}(A)$, siis

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a) &= g(f(a)) \quad \text{iga } a \in A \text{ korral,} \\ f \preceq g &\iff f(a) \leqslant g(a) \text{ iga } a \in A \text{ korral.} \end{aligned}$$

Näiteks kui $A = \mathbb{R}$ ja $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on funktsioonid, mis on defineeritud võrdustega

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x), \\ g(x) &= 2 \end{aligned}$$

iga $x \in \mathbb{R}$ korral, siis

$$f \preceq g.$$

Def. Olgu $(S, *, \leqslant_S)$ ja $(T, \cdot, \leqslant_T)$ kaks järjestatud poolrühma. Kujutust $f : S \to T$ nimetatakse **järjestatud poolrühmade homomorfismiks**, kui mistahes $s, s' \in S$ korral

1. $f(s * s') = f(s) \cdot f(s')$ (tehte säilitamine);
2. kui $s \leqslant_S s'$, siis $f(s) \leqslant_T f(s')$ (järjestuse säilitamine).

Näide. Homomorfismid $f : (\mathbb{N}, +, \leqslant) \longrightarrow (\mathbb{N}, +, \leqslant)$ on järjestust säilitavad kujutused, mis rahuldavad võrdust

$$f(s + s') = f(s) + f(s').$$

Näiteks kujutus $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, mis on defineeritud võrdusega

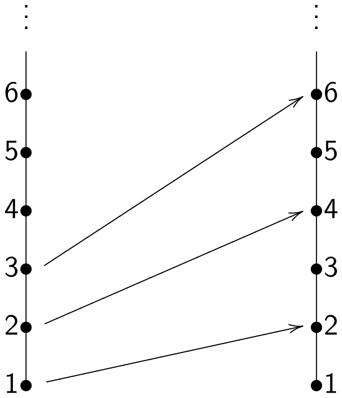
$$f(s) = 2s$$

iga $s \in S$ korral, on homomorfism, sest

$$f(s + s') = 2(s + s') = 2s + 2s' = f(s) + f(s'),$$

$$s \leq s' \;\Rightarrow\; 2s \leq 2s' \;\Rightarrow\; f(s) \leq f(s')$$

mistahes $s, s' \in \mathbb{N}$ korral.



$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(s) = 2s$$

Def. Olgu $(A, \leqslant_A)$ ja $(B, \leqslant_B)$ järjestatud hulgad. Kujutust $h : A \to B$ nimetame **sisestuseks**, kui mistahes $a, a' \in A$ korral

$$a \leqslant_A a' \quad \text{siis ja ainult siis, kui} \quad h(a) \leqslant_B h(a').$$

Näide. Eelmises näites vaadeldud homomorfismid $f : (\mathbb{N}, +, \leqslant) \longrightarrow (\mathbb{N}, +, \leqslant)$ on sisestused, sest

$$s \leqslant s' \iff 2s \leqslant 2s'.$$

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[d, dash] \\
1 \arrow[r] & b \arrow[d, dash] \\
0 \arrow[r, "f"'] & a
\end{tikzcd}$$

ei ole sisestus

$f(0) \leqslant f(1)$, aga $0 \nleqslant 1$

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[d, dash] \\
1 \arrow[r] \arrow[d, dash] & b \arrow[d, dash] \\
0 \arrow[r, "g"'] & a
\end{tikzcd}$$

on sisestus

Iga sisestus peab olema üksühene. Tõepoolest, kui $h : (A, \leqslant_A) \to (B, \leqslant_B)$ on sisestus ja $a, a' \in A$, siis

$$\begin{aligned} h(a) = h(a') &\Rightarrow h(a) \leqslant_B h(a') \text{ ja } h(a') \leqslant_B h(a) \\ &\Rightarrow a \leqslant_A a' \text{ ja } a' \leqslant_A a \\ &\Rightarrow a = a'. \end{aligned}$$

Injektiivsusest

Harilikult mõeldakse algebralise struktuuri Q injektiivsuse all järgmist: mistahes sama tüüpi algebraliste struktuuride A ja B, iga homomorfismi $f : A \to Q$ ja iga üksühese homomorfismi $h : A \to B$ korral leidub homomorfism $g : B \to S$ nii, et $gh = f$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "g"] \\
Q &
\end{tikzcd}$$

(Võrdus $gh = f$ tähendab seda, et $g(h(a)) = f(a)$ iga $a \in A$ korral.)

Osutub, et niisuguse definitsiooni korral on paljudes algebrate klassides (kategooriates) injektiivseteks algebrateks vaid üheelemendilised algebrad. Nii on see näiteks järgmistel juhtudel (Schein 1974):

1. poolrühmad,
2. inverssed poolrühmad,
3. rühmad.

Kui kasutada samasugust definitsiooni järjestatud poolrühmade korral, siis tuleb samuti välja, et injektiivsed on vaid üheelemendilised järjestatud poolrühmad.

Asi muutub huvitavamaks, kui lubame diagrammis

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "g"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

homomorfismide f ja g asemel midagi üldisemat.

Def. Olgu $(S, *, \leqslant_S)$ ja $(T, \cdot, \leqslant_T)$ järjestatud poolrühmad. Kujutust $f : S \to T$ nimetame **järjestatud poolrühmade nõrgaks homomorfismiks**, kui mistahes $s, s' \in S$ korral

1. $f(s) \cdot f(s') \leqslant_T f(s * s')$ (submultiplikatiivsus);
2. kui $s \leqslant_S s'$, siis $f(s) \leqslant_T f(s')$ (järjestuse säilitamine).

Iga homomorfism on nõrk homomorfism. Vastupidine ei kehti.

Näide. Kujutus $f : (\mathbb{N}, +, \leqslant) \longrightarrow (\mathbb{N}, +, \leqslant)$, mis on defineeritud võrdusega

$$f(s) = 2^s$$

on nõrk homomorfism, mis ei ole homomorfism. Tõepoolest,

$$f(s) + f(s') = 2^s + 2^{s'} \leq 2^{s+s'} = f(s + s')$$

mistahes naturaalarvude s, s' korral, kuid

$$f(1) + f(2) = 2^1 + 2^2 = 6 \neq 8 = 2^3 = f(3) = f(1 + 2).$$

Def. Järjestatud poolrühmade **homomorfse sisestuse** all peame silmas homomorfismi, mis on samal ajal ka sisestus.

Def. Ütleme, et järjestatud poolrühm S on **nõrgalt injektiivne**, kui iga nõrga homomorfismi $f : A \to S$ ja iga homomorfse sisestuse $h : A \to B$ korral leidub nõrk homomorfism $g : B \to S$ nii, et $gh = f$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "g"] \\
S &
\end{tikzcd}
$$

Teoreem (Xia Zhang, VL, 2014)

Järjestatud poolrühm on nõrgalt injektiivne siis ja ainult siis, kui ta on kvantaal.

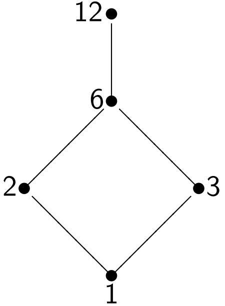
Kvantaalidest

Def. Olgu $(A, \leqslant)$ järjestatud hulk ja $M \subseteq A$. Elementi $a \in A$ nimetatakse hulga M **ülemiseks tõkkeks**, kui $m \leqslant a$ iga $m \in M$ korral. Hulga M ülemist tõket a nimetatakse **ülemiseks rajaks**, kui iga ülemise tõkke b korral $a \leqslant b$. (Ülemine raja on hulga M vähim ülemine tõke.)

Hulga M ülemist raja tähistatakse sümboliga $\bigvee M$. Kui $M = \{x, y\}$, siis $\bigvee\{x, y\}$ asemel kirjutatakse $x \vee y$.

Analoogiliselt defineeritakse alumised tõkked ja alumised rajad.

Näide. Vaatleme hulka $A = \{1, 2, 3, 6, 12\}$ järjestatud hulgana seose $\mid$ suhtes.



Hulga A alamhulgal $M = \{2, 3\}$ on kaks ülemist tõket: 6 ja 12.
Hulga M ülemine raja on $\bigvee M = 2 \vee 3 = 6$.
Hulga A mistahes elementide a ja b korral $a \vee b = \text{VÜK}(a, b)$ ja $a \wedge b = \text{SÜT}(a, b)$.

Def. Järjestatud hulka nimetatakse

1. **võreks**, kui selle igal kaheelemendilisel alamhulgal leidub ülemine ja alumine raja;
2. **täielikuks võreks**, kui selle igal alamhulgal leidub ülemine ja alumine raja.

Lõplik järjestatud hulk on täielik võre siis ja ainult siis, kui ta on võre.

Def. **Kvantaal** on selline järjestatud poolrühm $(S, *, \leqslant)$, mille korral

1. järjestatud hulk $(S, \leqslant)$ on täielik võre;
2. hulga S iga alamhulga M ja iga elemendi $s \in S$ korral

$$s * (\bigvee M) = \bigvee\{s * m \mid m \in M\},$$
$$(\bigvee M) * s = \bigvee\{m * s \mid m \in M\}.$$

Näide.

1. Järjestatud poolrühm $(\mathbb{N}, +, \leqslant)$ ei ole kvantaal, sest alamhulgal $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ puudub ülemine raja.

Konstrueerime selle poolrühma abil ühe kvantaali. Võtame ühe elemendi, mis ei kuulu hulka $\mathbb{N}$ ja tähistame selle sümboliga ∞. Vaatleme hulka $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (see koosneb naturaalarvudest ja elemendist ∞) ning laiendame naturaalarvude järjestust ja liitmist sellele hulgale. Loeme, et $\infty \leqslant \infty$ ja et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$n \leqslant \infty,$$

ning et $\infty + \infty = \infty$ ja iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$n + \infty = \infty = \infty + n.$$

Võib veenduda, et $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, +, \leqslant)$ on kvantaal.

2. Olgu $(R, +, \cdot)$ ring. Vaatleme ringi R kõigi ideaalide hulka $Id(R)$ järjestatud hulgana sisalduvusseose suhtes. Defineerime sellel hulgal korrutamise võrdusega

$$I * J = \{a_1 \cdot b_1 + \ldots + a_n \cdot b_n \mid a_1, \ldots, a_n \in I, b_1, \ldots, b_n \in J, n \in \mathbb{N}\}.$$

Siis $(Id(R), *, \subseteq)$ on kvantaal.

3. Olgu X mingi mittetühi hulk. Vaatleme kõigi binaarsete seoste hulka $Rel(X) = \mathcal{P}(X \times X)$ hulgal X järjestatud hulgana sisalduvusseose suhtes. Defineerime hulgal $Rel(X)$ korrutamise võrdusega

$$\rho \circ \sigma = \{(x, z) \in X \times X \mid (\exists y \in X)((x, y) \in \rho \text{ ja } (y, z) \in \sigma)\}.$$

Siis $(Rel(X), \circ, \subseteq)$ on kvantaal.

Lause. Kvantaalid on nõrgalt injektiivsed.

TÕESTUS. Olgu $(S, *, \leqslant_S)$ kvantaal ja vaatleme diagrammi

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & B \\ S & \end{tikzcd},$$

kus $(A, \circ, \leqslant_A)$ ja $(B, \cdot, \leqslant_B)$ on järjestatud poolrühmad, h on homomorfne sisestus ja f on nõrk homomorfism.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "g"] \\
S &
\end{tikzcd}$$

Defineerime kujutuse $g : B \to S$ võrdusega

$$g(b) = \bigvee X_b, \qquad \text{kus } b \in B \text{ ja}$$

$$X_b = \{f(a_1)*\ldots*f(a_n) \mid h(a_1\circ\ldots\circ a_n) \leqslant b, a_1, \ldots, a_n \in A, n \in \mathbb{N}\}.$$

Saab näidata, et g on nõrk homomorfism. Veendume, et $gh = f$.

Võrduse $gh = f$ tõestamiseks võtame suvalise elemendi $a \in A$. Kuna h on sisestus, siis

$$
\begin{aligned}
&X_{h(a)} \\
&= \{f(a_1) * \ldots * f(a_n) \mid h(a_1 \circ \ldots \circ a_n) \leqslant h(a), a_1, \ldots, a_n \in A, n \in \mathbb{N}\} \\
&= \{f(a_1) * \ldots * f(a_n) \mid a_1 \circ \ldots \circ a_n \leqslant a, \ \ a_1, \ldots, a_n \in A, n \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}
$$

Siit näeme, et $f(a) \in X_{h(a)}$ (kui $n = 1$, $a_1 = a$). Seega

$$f(a) \leqslant \bigvee X_{h(a)} = g(h(a)).$$

Jääb veel näidata, et $g(h(a)) \leqslant f(a)$ (siis antisümmeetria tõttu $g(h(a)) = f(a)$).

Oletame, et $x \in X_{h(a)}$, kus

$$X_{h(a)} = \{f(a_1)*\ldots*f(a_n) \mid a_1\circ\ldots\circ a_n \leqslant a,\ a_1,\ldots,a_n \in A, n \in \mathbb{N}\}.$$

Siis leiduvad $n \in \mathbb{N}$ ja $a_1,\ldots,a_n \in A$ nii, et

$$x = f(a_1) * \ldots * f(a_n) \quad \text{ja} \quad a_1 \circ \ldots \circ a_n \leqslant a.$$

Kuna f on nõrk homomorfism, siis

$$x = f(a_1) * \ldots * f(a_n) \leqslant f(a_1 \circ \ldots \circ a_n) \leqslant f(a).$$

Seega $f(a)$ on hulga $X_{h(a)}$ ülemine tõke ning järelikult

$$g(h(a)) = \bigvee X_{h(a)} \leqslant f(a).$$

$\square$

Def. Öeldakse, et järjestatud hulga $(S, \leqslant)$ alamhulk X on **allapoole kinnine**, kui iga $s \in S$ ja $x \in X$ korral

$$s \leqslant x \quad \Rightarrow \quad s \in X.$$

Iga alamhulga $I \subseteq S$ korral on hulk $\{x \in S \mid x \leqslant i \text{ mingi } i \in I \text{ korral}\}$ allapoole kinnine ja me tähistame seda hulka

$$I{\downarrow} := \{x \in S \mid x \leqslant i \text{ mingi } i \in I \text{ korral}\}.$$

Samuti kasutame elemendi $a \in S$ korral tähistust

$$a{\downarrow} := \{a\}{\downarrow} = \{s \in S \mid s \leqslant a\}.$$

Osutub, et lähtudes suvalisest järjestatud poolrühmast saab konstrueerida ühe kvantaali.

Olgu $(S, *, \leqslant)$ järjestatud poolrühm ja olgu

$$\mathcal{P}(S) := \{I \subseteq S \mid I \text{ on allapoole kinnine}\}.$$

Defineerime hulgal $\mathcal{P}(S)$ tehte $\cdot$ võrdusega

$$I \cdot J = \{x \in S \mid x \leqslant i * j \text{ mingite } i \in I,\ j \in J \text{ korral}\}.$$

Lause. *Olgu $(S, *, \leqslant)$ järjestatud poolrühm. Siis $(\mathcal{P}(S), \cdot, \subseteq)$ on kvantaal.*

Teoreem. *Olgu $(S, *, \leqslant)$ järjestatud poolrühm. Siis S on nõrgalt injektiivne parajasti siis, kui S on kvantaal.*

TÕESTUS. Eespool nägime, et iga kvantaal on nõrgalt injektiivne. Tõestame vastupidise väite. Eeldame, et järjestatud poolrühm S on nõrgalt injektiivne. Näitame, et ta on kvantaal. Defineerime kujutuse $h : (S, *, \leqslant) \to (\mathcal{P}(S), \cdot, \subseteq)$ võrdusega

$$h(s) = s{\downarrow},$$

$s \in S$. Kuna mistahes $s, t \in S$ korral

$$s \leqslant t \iff s{\downarrow} \subseteq t{\downarrow},$$

siis h on järjestatud hulga $(S, \leqslant)$ sisestus järjestatud hulka $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$. Ei ole raske veenduda, et

$$h(s * t) = (s * t){\downarrow} = s{\downarrow} \cdot t{\downarrow} = h(s) \cdot h(t).$$

Seega h on homomorfne sisestus. On selge, et samasusteisendus $1_S : S \to S$ ($1_S(s) = s$ iga $s \in S$ korral) on nõrk homomorfism.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "h"] \arrow[d, "1_S"'] & \mathcal{P}(S) \arrow[dl, dashed, "g"] \\
S &
\end{tikzcd}$$

Kuna eelduse põhjal S on nõrgalt injektiivne, siis leidub selline $g : \mathcal{P}(S) \to S$, et $gh = 1_S$ (seega S on kvantaali $\mathcal{P}(S)$ retrakt). Saab näidata, et siis ka $(S, *, \leqslant)$ on kvantaal. $\square$

Viited

1. X. Zhang, V. Laan, Injective hulls for posemigroups, Proc. Est. Acad. Sci. **63** (2014), 372–378.

2. X. Zhang, V. Laan, Injective hulls for ordered algebras, Algebra Universalis, ilmumas.

Tänan tähelepanu eest!