EESTI MATEMAATIKA SELTS

AASTARAAMAT 2006

Tartu 2007

EESTI MATEMAATIKA SELTS
J. Liivi 2, 50409 Tartu, Eesti
e-post: kaarli@math.ut.ee
http://ioc.ee/matem/EMS/

Toimetajad: Kalle Kaarli, Valdis Laan

Autoriõigus Eesti Matemaatika Selts, 2007

ISSN 1406-4316

Trükkinud: OÜ Paar

Sisukord

Saateks 9

Matemaatika

Thurstoni hüpotees, Ricci voog ja edusammud Poincaré probleemi lahendamisel. Viktor Abramov 10

Madala hälbivusega jadad ja integraalide arvutamine. Raul Kangro 30

Tõenäosusjaotuste lähendamine hulkadega. Meelis Käärik . . 38

Black-Scholes-Mertoni järgne finantsmatemaatika. Artur Sepp 43

GPS ja meteoroloogia ning natuke matemaatikat selles. Peep Uba 56

Matemaatikud

Jüri Afanasjev 60. Elts Abel 72

Helki Haavasalu 60. Viive Tamm 74

Helgi Uudelepp 70. Kalle Kaarli 77

In memoriam

Jaak Lõhmus 28.09.1937–23.02.2006 79

Olaf Prinits 03.09.1924–14.04.2006 80

Paul Moritz Cohn 08.01.1924–20.04.2006 82

Paul Halmos 03.03.1916–02.10.2006 84

Donald G. Higman 20.09.1928–13.02.2006 85

Irving Kaplansky 22.03.1917–25.06.2006 86

Karl Zeller 28.12.1924–20.07.2006 87

Koolimatemaatika

Kokkuvõte õpilaste matemaatikavõistlustest aastal 2006.
Härmel Nestra 88

Konverentsid ja seminarid

Rahvusvaheline matemaatikute kongress ICM 2006 Madridis.
Peeter Puusemp 107

II Soome-Eesti Matemaatikakollokvium. Kalle Kaarli 125

Seminar "Algebra ja tema rakendused". Valdis Laan 128

Matemaatikahariduse konverents Tartus. Jüri Afanasjev ... 129

SOBI 2006. Otu Vaarmann 131

Eesti Matemaatika Päevad Jäneda mõisas. Andi Kivinukk .. 134

Matemaatiline tarkvaratehnoloogia Saaremaal.
Tarmo Uustalu 136

Riiklike Matemaatikavõistluste Ülemaailmse Föderatsiooni
viies konverents. Raili Vilt 139

Vabariiklikud matemaatikaõpetajate päevad Pärnus.
Lea Lepmann 144

Preemiad ja autasud

Üle anti järjekordsed prof. Gerhard Rägo nimelised medalid.
Tiit Lepmann 148

Eesti Vabariigis antud preemiad ja autasud 151

- Eesti Matemaatika Seltsi preemiad 151
- Haridus- ja Teadusministeeriumi 2006. a. üliõpilaste teadustööde riiklik konkurss 151
- Teisi preemiaid 151
- Matemaatikud – riiklike teenetemärkide kavalerid 2006 ... 152

Varia

Statistika ja eetika. Ene-Margit Tiit 154

Rahvusvaheline Üliõpilaste Matemaatikavõistlus.
Vladimir Kutšmei 168

Väitekirjade kaitsmine 177

Ülikoolide lõpetajad 2006 183

Juubelid 187

EMS 2006. a. tegevuse kroonika 189

Contents

Foreword 9

Mathematics

Thurston's conjecture, Ricci flow and progress in solving the Poincaré problem. Viktor Abramov 10

Low dicrepancy sequences and numerical integration. Raul Kangro 30

Fitting sets to probability distributions. Meelis Käärik 38

Mathematical finance beyond Black-Scholes-Merton. Artur Sepp 43

GPS and meteorology, and some mathematics appropriate to both. Peep Uba 56

Mathematicians

Jüri Afanasjev 60. Elts Abel 72

Helki Haavasalu 60. Viive Tamm 74

Helgi Uudelepp 70. Kalle Kaarli 77

In memoriam

Jaak Lõhmus 28.09.1937–23.02.2006 79

Olaf Prinits 03.09.1924–14.04.2006 80

Paul Moritz Cohn 08.01.1924–20.04.2006 82

Paul Halmos 03.03.1916–02.10.2006 84

Donald G. Higman 20.09.1928–13.02.2006 85

Irving Kaplansky 22.03.1917–25.06.2006 86

Karl Zeller 28.12.1924–20.07.2006 87

School Mathematics

Summary of mathematical contests in 2006.
Härmel Nestra 88

Conferences and seminars

International Congress of Mathematicians ICM 2006 in Madrid.
Peeter Puusemp 107

II Finnish-Estonian Mathematics Colloquium. Kalle Kaarli 125

Workshop "Algebra and its Applications". Valdis Laan 128

Conference on mathematics education in Tartu.
Jüri Afanasjev 129

SOBI 2006. Otu Vaarmann 131

Estonian Mathematics Days at Jäneda manor. Andi Kivinukk 134

Mathematical software technology in Saaremaa.
Tarmo Uustalu 136

V Conference of World Federation of National Mathematics Competitions. Raili Vilt 139

Mathematics Teachers' Days in Pärnu.
Lea Lepmann 144

Prizes and awards

Winners of Professor Gerhard Rägo medals. Tiit Lepmann ..148

Winners of prizes and awards in Estonia 151

- Awards of Estonian Mathematical Society 151
- State contest of the Ministry of Education and Science for scientific works of students in 2006 151
- Other awards 151
- Mathematicians – recipients of state decorations 2006 152

Varia

Statistics and ethics. Ene-Margit Tiit 154

International Mathematics Competition for University Students. Vladimir Kutšmei 168

PhD theses and Master's theses 2006 177

Graduates of universities in 2006 183

Jubilees 187

Chronicle of the 2006 activities of the Estonian Mathematical Society 189

Saateks

Teie ees on Eesti Matemaatika Seltsi 2006. a. aastaraamat. Aastaraamatu koostamisel arvestasime väljakujunenud traditsioone ja kolleegide ettepanekuid. Meil on hea meel öelda, et praktiliselt kõik, kelle poole me kaastöö palvega pöördusime, reageerisid positiivselt. Suur tänu neile! Samuti rõõmustab meid matemaatika suur osakaal aastaraamatus – viis artiklit, mis tutvustavad erinevaid matemaatika ja tema rakenduste valdkondi. Aastaraamat algab V. Abramovi artikliga, mis tutvustab olulisimat sündmust matemaatikas 2006. aastal. See oli Poincaré probleemi lahendamine G. Perelmani poolt, üks neist vähestest sündmustest kaasaja matemaatikas, mis jõuab ka tavaajakirjandusse. Oma töid tutvustavad A. Humala preemia võitja M. Käärik ja EMS publikatsiooniauhinna pälvinud A. Sepp. Samuti avaldame R. Kangro ja P. Uba artiklid, mis põhinevad Jänedal Eesti Matemaatika Päevadel peetud ettekannetele. Eriti täname R. Kangrot, kes lisaks oma artikli kirjutamisele tõlkis eesti keelde ka A. Sepa originaalis ingliskeelse teksti. Aastaraamat sisaldab veel V. Kutšmei artikli üliõpilaste rahvusvahelistest matemaatikaolümpiaadidest ja E. Tiidu kirjutise eetikast statistikas. E. Tiidult palusime kaastööd seoses tema valimisega EMS auliimeks.

Ülejäänud materjal on päevakajalise iseloomuga, kajastades Eestiga seonduvaid matemaatikaelu sündmusi 2006. a. Neist juhiksime eelkõige tähelepanu H. Nestra väga põhjalikule ülevaatele koolinoorte matemaatikavõistlustest ja P. Puusempi pikemale kirjutisele Madridis toimunud Rahvusvahelisest Matemaatikute Kongressist.

Suur tänu Vladimir Kutšmeile tehnilise abi eest.

Aastaraamatu koostajad

MATEMAATIKA

Thurstoni hüpotees, Ricci voog ja edusammud Poincaré probleemi lahendamisel

Viktor Abramov
Tartu Ülikool

1. Clay instituudi millenniumiprobleemid

2000. a. avaldas Clay Matemaatika Instituut (Clay Mathematics Institute) loetelu seitsmest kaasaegse matemaatika tähtsaimast probleemist (millenniumiprobleemist), määrates iga probleemi lahenduse eest preemiaks miljon USA dollarit. Probleemide arv oli ära määratud selle instituudi asutaja Bostoni miljardäri Landon T. Clay poolt preemiateks eraldatud miljonite arvuga. Clay instituudi eksperdid, kes tegid eespool nimetatud valiku, arvavad, et just nimelt need 7 probleemi määravad ära matemaatika arengu XXI sajandil. Eesti Matemaatika Seltsi juhatus korraldas 2001. a. millenniumiprobleemidele pühendatud seltsi ettekandekoosoleku. Sellel koosolekul ettekantu publitseeriti Eesti Matemaatika Seltsi aastaraamatus 2001. Käesoleva artikli autor esines ettekandega teemal "Poincaré hüpotees", milles kirjeldas probleemi olemust, sisu ja arengut eelmisel sajandil. Ettekanne avaldati Eesti Matemaatika Seltsi aastaraamatus 2001 ([1]) ja autor soovitab sellega tutvuda lugejatel, kes soovivad saada ettekujutust diferentsiaalgeomeetria ja topoloogia põhimõistetest selleks, et mõista Poincaré hüpoteesi sisu.

Peterburi matemaatik Grigori (mõnikord kirjutatakse Grisha) Perelman paigutas aastatel 2002–2003 e-preprintide elektroonilise arhiivi `arXiv.org` (`http://arxiv.org`) diferentsiaalgeomeetria ossa (math.DG) kolm preprinti ([13], [14], [15]), mis suurema osa 3-mõõtmeliste muutkondade topoloogiaga tegelevate eskpertide arvates lubavad väita, et Poincaré probleem on lahendatud. Tahaks rõhutada, et G. Perelman talitas küllaltki omapäraselt, paigutades

oma tööd e-preprintide elektroonilisse arhiivi, sest rangelt võttes ei loeta neid sel juhul teaduspublikatsioonideks. Kui sellisel juhul oleks teoreemide tõestustes ilmnenud lüngad või puudused ja oleks leidunud matemaatik, kes, kõrvaldanud lüngad ja puudused, oleks oma töö avaldanud matemaatilises teadusväljaandes, oleks too matemaatik võinud ka pretendeerida Poincaré probleemi lahendajaks. Peale selle ei saa G. Perelman pretendeerida ka miljonidollarilisele preemiale ühe millenniumiprobleemi lahenduse eest, kuna seal on tingimuseks, et probleemi lahendus peab olema publitseeritud retsenseeritavas teadusajakirjas ning kahe aasta jooksul alates avaldamise momendist pole lahenduse õigsus antud valdkonnas tegutsevate ekspertide poolt kahtluse alla seatud. Samas otsustades massimeedias G. Perelmanile pühendatud artiklite järgi, ei kavatsegi ta sellele preemiale pretendeerida. Just need momendid ning ka see, et G. Perelman ei sõitnud 2006. a. Hispaanias toimunud rahvusvahelisele matemaatikakongressile, kus kuningas Juan Carlos pidi talle üle andma Fieldsi preemia panuse eest geomeetriasse ja saavutuste eest Ricci voogude (*Ricci flow*) geomeetrilise ja analüütilise struktuuri uurimisel, tegidki G. Perelmani nime avalikkusele tuttavaks. Käesoleva artikli eesmärgiks on luua ettekujutus struktuuridest, meetoditest ja ideedest, mida kasutas G. Perelman Poincaré probleemi lahendamiseks.

2. Poincaré probleem

Meenutagem lühidalt Poincaré hüpoteesi (probleemi) formuleeringut (üksikasjalise kirjelduse leiab artiklis [1]). Oma 1904. a. avaldatud artikli ([17]) lõpus mainis Henri Poincaré (1854–1912), et on jäänud veel üks probleem, mida tasuks uurida (sõnastus on antud kaasaegsetes terminites):

Kas 3-mõõtmeline diferentseeruv kinnine (s.o. kompaktne ja rajata) triviaalse fundamentaalrühmaga $\pi_1(M)$ muutkond M on difeomorfne 3-mõõtmelise sfääriga S^3?

Poincaré hüpotees seisneb selles, et vastus sellele küsimusele on jaa-

tav. Poincaré ise ei jõudnud probleemi lahendamisel kuigi kaugele, osutades, et see kallutab teda põhiuuringutest kõrvale. Järgnevate aastate katsed leida probleemile lahendus stimuleerisid uute mõistete ja meetodite arengut lõplikumõõtmeliste muutkondade topoloogias. Poincaré probleemil on tähtis osa 3-mõõtmelise muutkonna topoloogilise struktuuri uurimisel, sest ta puudutab selliste muutkondade klassifikatsiooni. Mõned selle ala spetsialistid ennustavad, et juhul kui G. Perelmani antud Poincaré probleemi lahendus on õige (ja tõenäoliselt see nii ka on), siis huvi antud matemaatika valdkonna vastu jahtub ja paljud uurijad lülituvad teistele valdkondadele. Rõhutagem, et Poincaré probleemi lahendus pole tähtis mitte ainult muutkondade teooria sisemise arengu seisukohalt, vaid sellel on ka rakenduslikud aspektid. Arvatakse, et Perelmani poolt pakutud lahendus annab impulsi uute meetodite tekkeks füüsikaliste protsesside kirjeldamisel keerulistes 3-mõõtmelistes geomeetrilistes ruumides ja arvutitopoloogias.

Poincaré probleemiga analoogilise probleemi topoloogiliste muutkondade jaoks dimensioonis $m \geqslant 5$ lahendasid 1960. a. Stephen Smale ([18]), John Stallings ([19]) ja Andrew Wallace ([22]). Kuid meetodid, mida nemad kasutasid, osutusid kõlbmatuks 4-mõõtmeliste muutkondade puhul. Viimaste jaoks lahendas Poincaré probleemi 1981. a. Michael Freedman ([6]). Seega sai möödunud sajandi lõpuks selgeks, et 3-mõõtmelised muutkonnad kujutuvad endast kõige keerulisemat juhtu. Tähtis on see tõsiasi, et igal 3-mõõtmelisel topoloogilisel muutkonnal on ainult üks (difeomorfismi täpsusega) diferentseeruv struktuur. Seega on 3-mõõtmeliste topoloogiliste muutkondade klassifikatsioon homöomorfismi täpsusega ekvivalentne diferentseeruvate muutkondade klassifikatsiooniga difeomorfismi täpsusega. Asjalood on teised kolmest kõrgemate dimensioonide korral. Kirby ja Siebenmann näitasid ([10]), et topoloogilisel muutkonnal dimensiooniga $m \geqslant 4$ võib olla mitu erinevat diferentseeruvat struktuuri. Hiljem selgus, et kõige keerulisemateks selles suhtes on just 4-mõõtmelised muutkonnad. Michael Freedman näitas eksootiliste siledate struktuuride olemasolu triviaalsel topoloogilisel muutkonnal $\mathbb{R}^4$. Muutkonna $\mathbb{R}^4$ siledat struktuuri nimetatakse

eksootiliseks, kui ta ei ole difeomorfne selle muutkonna standartse sileda struktuuriga. Tõestuseks näitas M. Freedman, et selle väite eitus viib vastuoluni 4-mõõtmeliste muutkondade täieliku klassifikatsiooni konstrueerinud S. Donaldsoni teoreemidega ([4],[5]). Hiljem tõestas C.H. Taubes ([20]), et selliste eksootiliste siledate struktuuride hulk on mitteloenduv. Dimensiooni 4 puhul erinevate siledate struktuuride ilmsikstulek oli sedavõrd sensatsiooniline, et New York Times'is ilmus sellele avastusele pühendatud artikkel ja ühes oma artiklis esitas C.H. Taubes küsimuse: "Kas me oskame diferentseerida?"

Seega fakt, et 3-mõõtmelisel juhul muutkondade klassifikatsiooniprobleemi uurides võime vaadelda diferentseeruvaid muutkondi, võimaldab rakendada diferentsiaalgeomeetria meetodeid. Diferentseeruvate muutkondade hulgas on tähtsaimaks ja huvitavaimaks klassiks Riemanni muutkonnad. Et G. Perelmani ja tema eelkäijate lähenemine 3-mõõtmeliste muutkondade vallas tugineb 3-mõõtmelise muutkonna Riemanni struktuurile, siis järgmises punktis meenutame lühidalt Riemanni geomeetria mõningaid põhimõisteid.

3. Ricci kõverus ja lokaalselt homogeenne Riemanni muutkond

Diferentseeruvat m-mõõtmelist muutkonda M^m nimetatakse Riemanni muutkonnaks, kui muutkonna igas punktis $p \in M^m$ on puutujaruumil T_pM^m antud bilineaarne sümmeetriline positiivselt määratud ruutvorm g, mis sõltub siledalt punktist p. Seega määrab g puutujavektorite $u, v \in T_pM^m$ skalaarkorrutise $g(u, v)$ muutkonna M^m igas punktis p. Vormi g nimetatakse Riemanni meetrikaks. Muutkonna M^m lokaalsetes koordinaatides $x^1, x^2, \ldots, x^m$ kirjutatakse meetrika g tavaliselt kujul $g = g_{ij}(x)\, dx^i dx^j$, kus $g_{ij}(x)$ on lokaalsete koordinaatide siledad funktsioonid ja mida nimetatakse meetrilise tensori komponentideks. Riemanni muutkonna tähtsaimaks karakteristikuks on tema kõverus. Kõveruse defineerimisel lähtutakse kõveruse mõistest, mis on üks olulisim kaasaegses diferentsiaalgeomeetrias.

Olgu $C^\infty(M^m)$ siledate funktsioonide algebra ja $\mathfrak{D}(M^m)$ siledate vektorväljade Lie algebra diferentseeruval muutkonnal M^n. Meenutame, et vektorväli $X \in \mathfrak{D}(M^m)$ on algebra $C^\infty(M^m)$ derivatsioon, s.o. vektorruumi $C^\infty(M^m)$ lineaarteisendus, mis rahuldab Leibnizi valemit funktsioonide korrutamise suhtes. Vektorväljade $X, Y \in \mathfrak{D}(M^m)$ kommutaator $[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X$, kus $X \cdot Y$ on teisenduste korrutis (kompositsioon), tekitab Lie algebra struktuuri vektorruumil $\mathfrak{D}(M^m)$. Levi-Civita seostuseks muutkonnal M^m nimetatakse reeglit, mis igale vektorväljale $X \in \mathfrak{D}(M^m)$ seab vastavusse vektorruumi $\mathfrak{D}(M^m)$ lineaarteisenduse (endomorfismi) ∇_X nii, et rahuldatud on tingimused

$$\begin{aligned} \nabla_{f\,X+h\,Y} &= f\,\nabla_X + h\,\nabla_Y, \\ \nabla_X(f\,Y) &= X(f)\,Y + f\,\nabla_X Y, \end{aligned}$$

kus $f, h \in C^\infty(M^m)$ ja $X, Y \in \mathfrak{D}(M^m)$. Kui M^m on Riemanni muutkond meetrikaga g, siis Levi-Civita seostust nimetatakse Riemanni seostuseks, kui ta rahuldab kahte tingimust:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \nabla_X Y - \nabla_Y X, \\ Z(g(X, Y)) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y), \quad Z \in \mathfrak{D}(M^m). \end{aligned}$$

Esimene tingimus näitab, et Riemanni seostus on seostus ilma väändeta ja teine tingimus näitab, et Riemanni seostus on kooskõlas meetrikaga. Riemanni muutkondade teoorias tõestatakse, et Riemanni muutkonnal M^m meetrikaga g leidub parajasti üks Riemanni seostus ([16]), s.t. Riemanni seostus on üheselt määratud meetrikaga g. Riemanni seostuse kõveruseks R nimetatakse suurust

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}, \quad X, Y \in \mathfrak{D}(M^m).$$

Et $R(X, Y) = -R(Y, X)$, osutub kõverus R teist järku diferentsiaalvormiks (2-vormiks) muutkonnal M^m, mille väärtusteks punktis $p \in M^m$ on puutujaruumi T_pM^m lineaarteisendused. Kõverus R tekitab kõverustensori $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$. Kõverustensor on $(0, 4)$-tüüpi tensor (neljandat järku kovariantne tensor), mille komponente tähistame R_{lijk}, kus $R_{lijk} = g(R(e_j, e_k)e_i, e_l)$ ja

$\{e_i\}$ on muutkona M^m puutujakihtkonna lokaalne ortonormeeritud reeper. Ricci kõveruseks nimetatakse sümmeetrilist bilineaarset vormi $\mathrm{Ric} : T_pM^m \times T_pM^m \to \mathbb{R}$, mis on määratud lokaalses ortonormeeritud reeperis $\{e_i\}$ valemiga

$$\mathrm{Ric}(u,v) = \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i,u)v,e_i), \quad u,v \in T_pM^m.$$

Ricci kõverus tekitab Ricci (0,2)-tensori, mille komponendid avalduvad kõverustensori komponentide kaudu järgmiselt:

$$\mathrm{Ric}_{ij} = \sum_{k=1}^{m} R_{kikj}. \tag{1}$$

Seega võib öelda, et Ricci kõverus osutub kõverustensori jäljeks. Kuna Ricci voogu kirjeldav võrrandisüsteem tugineb Ricci kõverusele, siis Ricci kõverustensori komponendid avalduvad meetrika ja Riemanni seostuse komponentide kaudu. Kui $x^1, x^2, \ldots, x^m$ on muutkonna M^m lokaalsed koordinaadid, siis kehtib

$$\mathrm{Ric}_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km},$$

kus Γ^k_{ij} on Riemanni seostuse lokaalsed komponendid (lokaalsete koordinaatide funktsioonid), mis omakorda avalduvad meetrilise tensori komponentide kaudu järgmiselt:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right).$$

Ricci kõveruse jälge nimetatakse skalaarseks kõveruseks. Kui skalaarset kõverust tähistada $\mathfrak{R}$, siis saame

$$\mathfrak{R} = \mathrm{Tr}\,\mathrm{Ric} = \sum_{i,j=1}^{m} g(R(e_i,e_j)e_j,e_i). \tag{2}$$

Suunakõveruseks nimetatakse vormi

$$\sec(u,v) = \frac{g(R(v,u)u,v)}{g(u,u)g(v,v) - (g(u,v))^2}, \quad u,v \in T_pM^m.$$

Saab näidata, et suunakõverus sõltub ainult vektorite u, v poolt tekitatud tasandist $\pi \subset T_pM^m$, tingimusel, et nood on lineaarselt sõltumatud. Kui suunakõverus $\sec(\pi)$ on võrdne ühe ja sama reaalarvuga k iga tasandi $\pi \subset T_pM^m$ korral ja muutkonna M^m kõikides punktides, siis nimetatakse Riemanni muutkonda M^m konstantse kõverusega Riemanni muutkonnaks. Kolmemõõtmelise Riemanni muutkonna M^3 puhul sisaldub kogu informatsioon selle muutkonna kõveruse R kohta Ricci kõveruses Ric.

Kui M^m ja N^n on kaks Riemanni muutkonda vastavalt meetrikatega g ja h, siis difeomorfismi $\phi : M^m \to N^n$ nimetatakse isomeetriaks, kui ta rahuldab tingimust $g(u, v) = h(D_\phi(u), D_\phi(v))$ suvaliste $u, v \in T_pM^m$ ja $p \in M^m$ korral (siin $D\phi : TM^m \to TN^n$ on kujutuse ϕ diferentsiaal). Ilmselt moodustab muutkonna M^m kõikide isomeetriate $\phi : M^m \to M^m$ hulk rühma, mida tähistame $\mathrm{Isom}(M^m)$. See rühm toimib loomulikul viisil muutkonnal M^m, s.t. $M^m \times \mathrm{Isom}(M^m) \to M^m$, kus $(p, \phi) \mapsto \phi(p)$. Kui isomeetriate rühm toimib transitiivselt, siis nimetatakse Riemanni muutkonda homogeenseks muutkonnaks. Meenutagem, et rühm toimib transitiivselt, kui muutkonna M suvalise kahe punkti p ja q korral leidub selline isomeetria $\phi \in \mathrm{Isom}(M^m)$ nii, et $q = \phi(p)$. Seega on homogeensel muutkonnal igas punktis üks ja sama meetriline struktuur. Homogeense Riemanni muutkonna näideteks on sfäär S^n, Eukleidiline ruum $\mathbb{R}^n$, hüperboolne ruum $\mathbb{H}^n$. Märkigem, et neist kaks esimest on konstantse kõverusega, vastavalt kõverustega $+1$ ja 0. Hüperboolne ruum $\mathbb{H}^n$ on Riemanni muutkond konstantse kõverusega -1 ja tema mudelit võib kirjeldada järgmiselt: ruum $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x^0, x^1, \ldots, x^n) : x^\mu \in \mathbb{R}\}$ temal määratud meetrikaga g, kus

$$g = -(dx^0)^2 + \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2; \tag{3}$$

vastavat Riemanni muutkonda tähistame $\mathbb{R}^{1,n}$. Seega on $\mathbb{R}^{1,n}$ harilik (topoloogilises mõttes) ruum $\mathbb{R}^{n+1}$ indefiniitse meetrikaga g ja meetrika indefiniitsuse pärast ei ole $\mathbb{R}^{1,n}$ Riemanni muutkond. Kui $n = 3$, siis nimetatakse ruumi $\mathbb{R}^{1,3}$ Minkowski ruumiks. Mainime, et sellel ruumil baaserub relatiivsusteooria geomeetria. Olgu $r > 0$ ja

$H(r) \subset \mathbb{R}^{1,n}$ hüperpind ruumis $\mathbb{R}^{1,n}$, mis on määratud võrrandiga

$$-(x^0)^2 + \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 = -r^2.$$

Mainime, et hüperpinda $H(r)$ võib interpreteerida imaginaarse raadiusega *ir* n-mõõtmelise "sfäärina" meetrikas g. Juhul $n = 2$ on $H(r)$ kahekatteline hüperboloid ning me võime eraldada ühe tema katetest, seades tingimuse $x^0 > 0$. Pole keeruline näidata, et meetrika g kitsendus $g|_{H(r)}$ hüperpinnale $H(r)$ määrab Riemanni meetrika h hüperpinnal $H(r)$ ja $H(r)$ indutseeritud meetrikaga h muutub Riemanni muutkonnaks. See muutkond ongi juhul $r = 1$ hüperboolse ruumi $\mathbb{H}^n$ mudeliks.

Riemanni geomeetria põhimõisteks, mis on vajalik, et anda lugejale ettekujutus Poincaré hüpoteesi üldistuseks olevast Thurstoni hüpoteesist, on lokaalselt homogeenne Riemanni muutkond. Lokaalselt homogeenne Riemanni muutkond peab rahuldama kahte tingimust:

1. olema lokaalselt isomeetriline antud homogeense Riemanni muutkonnaga M^m;

2. olema täielik Riemanni muutkond.

Olgu N lokaalselt homogeenne Riemanni muutkond. Esimene nõue tähendab, et muutkonna N suvalise punkti q jaoks leidub selle ümbrus $U_q \subset N$ ja isomeetria $\phi : U_q \to V$, kus $V \subset M^m$ on muutkonna M^m lahtine alamhulk. Homogeenset Riemanni muutkonda M^m nimetatakse lokaalselt homogeense Riemanni muutkonna N mudelmuutkonnaks. Et selgitada teist, täielikkuse nõuet, meenutagem geodeetilise joone mõistet Riemanni muutkonnal. Siledat joont $\gamma : I \to M^m$, kus $I \subset \mathbb{R}$, nimetatakse geodeetiliseks, kui $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$, kus $\dot\gamma$ on puutujavektorväli piki joont γ ja ∇ on Riemanni seostus. Geodeetilistel joontel on Riemanni muutkonnal täita sama roll, mis sirgetel Eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^n$. Riemanni geomeetrias tõestatakse ([16]), et Riemanni muutkonna M^m suvalise punkti p ja suvalise puutujavektori $v \in T_pM^m$ korral leidub ainus geodeetiline

joon $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M^m$ nii, et joon γ läbib punkti p ja tema puutujavektoriks punktis p on vektor v, s.t. $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$. Seega punkt ja muutkonna puutujavektor selles punktis määravad üheselt ära geodeetilise joone, kuid see, kui kaugele seda võib jätkata, sõltub muutkonnast. Riemanni muutkonda nimetatakse geodeetiliselt täielikuks kui kõik selle muutkonna geodeetilised jooned on määratud kogu arvsirgel $\mathbb{R}$. Hoff-Rinowi teoreem kehtestab selle mõiste ja Riemanni muutkonna kui meetrilise ruumi täielikkuse mõiste ekvivalentsuse, kui kahe punkti vaheline kaugus määrata valemiga

$$d(p, q) = \inf\{l(\gamma) : \gamma \in \Omega(p, q)\},$$

kus $l(\gamma)$ on tükiti-sileda joone γ pikkus ja $\Omega(p, q)$ on muutkonna M^m tükiti-siledate punktist p punkti q kulgevate joonte hulk.

Ruumala vormiks Riemanni muutkonnal M^m meetrikaga g nimetatakse m-diferentsiaalvormi dV_g, mis on määratud muutkonna punktis p valemiga

$$dV_g(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \det(g(v_i, e_j)), \tag{4}$$

kus $v_1, v_2, \ldots, v_m \in T_pM^m$ ja $\{e_i\}$ on puutujaruumi T_pM^m positiivselt orienteeritud ortonormeeritud baas. Ruumala vormi kuju lokaalsetes koordinaatides on

$$dV_g = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m.$$

Riemanni muutkonda M^m nimetatakse lõpliku ruumalaga Riemanni muutkonnaks, kui kehtib

$$\int_{M^m} dV_g < \infty.$$

Suuremat huvi pakuvad meile lõpliku ruumalaga lokaalselt homogeensed Riemanni muutkonnad.

4. Thurstoni hüpotees

Olles end varustanud Riemanni geomeetria vajalike mõistetega, võime asuda kirjeldama Poincaré probleemiga seotud geomeetria ja topoloogia valdkonna edasist arengut. Olulise panuse sellesse arengusse on andnud W. Thurston ([21]), kes 1980-ndatel aastatel edendas teistsugust, topoloogilistest meetoditest erinevat lähenemisviisi 3-mõõtmelistele muutkondadele. Thurston vaatles lokaalselt homogeenseid Riemanni muutkondi, mille mudelmuutkonnaks on hüperboolne ruum $\mathbb{H}^3$. Selliseid muutkondi nimetatakse hüperboolseteks muutkondadeks. Mitte iga 3-mõõtmeline muutkond ei saa olla varustatud sellise meetrikaga (mis teeb ta hüperboolseks muutkonnaks), sest on olemas ilmsed ja hästituntud takistused. Kõige üldisemalt formuleeritud Thurstoni hüpotees väidab, et need takistused osutuvad ainukesteks ja et kui nad kõrvaldada, siis saab muutkonda varustada hüperboolse muutkonna meetrikaga. Tõestanud selle hüpoteesi mitme erijuhu korral, jõudis Thurston hüpoteesi üldisema formuleeringuni lokaalselt homogeensete meetrikate olemasolust (kas hüperboolsete või vastasel juhul kõikide muutkondade jaoks). Seda hüpoteesi hakati nimetama Thurstoni geometriseerimise hüpoteesiks. Oluline on, et selles hüpoteesis sisaldub Poincaré hüpotees erijuhuna. Thurstoni hüpoteesi eelis Poincaré hüpoteesi ees väljendub selles, et Thurstoni hüpotees:

1. käsitleb kõiki kinniseid orienteeritavaid 3-muutkondi;

2. tekitab seose 3-mõõtmeliste muutkondade topoloogia ja diferentsiaalgeomeetria vahel.

Et anda Thurstoni hüpoteesi täpne formuleering, meenutagem mõnda hädavajalikku mõistet muutkondade teooriast. Olgu M^m ja N^n kaks siledat muutkonda, $n \geqslant m$, ja olgu $f : M^m \to N^n$ sile kujutus. Kujutust f nimetatakse muutkonna M^m sisestuseks muutkonda N^n, kui f on injektsioon ja kujutuse f diferentsiaali $Df : TM^m \to TN^n$ astak igas punktis on m, s.t. maksimaalne.

Topoloogiliste muutkondade teoorias on tähtis roll topoloogiliste muutkondade sidusa summa mõistel. Olgu M ja N kaks orienteeritavat topoloogilist (või siledat) sidusat n-mõõtmelist muutkonda. Eemaldame mõlema muutkonna sisemusest (s.t. riivamata nende muutkondade rajasid ∂M ja ∂N) n-mõõtmelise kera. Me saame kaks muutkonda, mille rajade üheks komponendiks on n-mõõtmeline sfäär. Nüüd kleebime need muutkonnad piki sfääre kokku nii, et nende orientatsioonid liimitavatel sfääridel kokku langeksid. Võib näidata, et saadud objekt on sile n-mõõtmeline muutkond (kui M ja N on siledad muutkonnad), mille sile struktuur on kooskõlas lähtemuutkondade siledate struktuuridega, ja mis ei sõltu ei kera ega kleepiva (liimiva) isomorfismi valikust. Sellist muutkonda nimetataksegi muutkondade M ja N sidusaks summaks ja tähistatakse sümboliga $M\#N$. Tuletame meelde, et topoloogiliste muutkondade teoorias nimetatakse 3-mõõtmelist muutkonda algmuutkonnaks (*prime manifold*), kui ta pole difeomorfne 3-mõõtmelise sfääriga S^3 ja igal antud muutkonda sisestatud ja seda kaheks mittelõikuvaks osaks eraldaval 2-mõõtmelisel sfääril S^2 on see omadus, et üks neist osadest on difeomorfne 3-mõõtmelise keraga.

Üks tähtsaimatest teoreemidest 3-mõõtmeliste muutkondade topoloogias kuulub H. Kneserile[1] ([11]).

Teoreem (Kneser, 1929). *Iga kinnine orienteeritav 3-mõõtmeline muutkond on esitatav lõpliku arvu orienteeritavate 3-mõõtmeliste algmuutkondade (prime factor) sidusa summana. See lahutus on ainus liidetavate järjestuse ja iga liidetava orientatsiooni säilitava difeomorfismi täpsusega. Kõikide orienteeritavate 3-mõõtmeliste algmuutkondade hulk on lõpmatu, kuid loenduv.*

Seega Kneseri teoreem taandab kinniste orienteeritavate 3-mõõtmeliste muutkondade topoloogia uurimise Kneseri lahutuse liidetavate uurimisele. Tähtsaks on antud juhul osutunud fakt, et iga lokaalselt homogeenne Riemanni muutkond on algmuutkond, välja arvatud erandina $\mathbb{R}P^3\#\mathbb{R}P^3$, kus $\mathbb{R}P^3$ on 3-mõõtmeline

[1] On huvitav teada, et Hellmuth Kneser sündis 16. aprillil 1898. a. Tartus, kus tema isa Adolf Kneser oli tollal Tartu Ülikooli matemaatikaõppejõud

projektiivne ruum, millele mudelmuutkonnaks on $S^2 \times \mathbb{R}$.

Tahtes kasutada Riemanni geomeetria meetodeid 3-mõõtmelise muutkonna uurimisel, peame viimase varustama lokaalselt homogeense meetrikaga ja seepärast peame piirduma algmuutkondade klassiga. Thurstoni hüpotees käib just algmuutkondade kohta.

Thurstoni hüpotees. *Olgu M kinnine, orienteeritav 3-mõõtmeline algmuutkond. Eksisteerib mittelõikuvate 2-mõõtmeliste tooride ja Kleini pudelite ühendi sisestus $f : \amalg_i T_i^2 \to M$ muutkonda M nii, et täiendi $M \setminus f(\amalg_i T_i^2)$ iga komponendi jaoks leidub lõpliku ruumalaga lokaalselt homogeenne meetrika.*

Seega on näha, et lõigates kinnise orienteeritava algmuutkonna M lahti piki 2-toore ja Kleini pudeleid, lahutame me selle tükkideks, millest igaühe jaoks leidub lokaalselt homogeenne Riemanni meetrika. Tasub tähele panna, et sisestus f tekitab 2-toori ja Kleini pudeli fundamentaalrühmade injektiivse homomorfismi muutkonna M fundamentaalrühma $\pi(M)$. Seda kasutades võib näidata, et Thurstoni hüpoteesist järeldub Poincaré hüpotees, s.t. Poincaré hüpotees on Thurstoni hüpoteesi erijuht. Olgu Σ^3 homotoopne sfäär, s.t. kinnine ühelisidus (s.t. triviaalse fundamentaalrühmaga) 3-mõõtmeline muutkond. Oletame, et Thurstoni hüpotees vastab tõele. Siis pole keeruline näidata, et homotoopse sfääri Σ^3 lahutus piki 2-toore ja 2-Kleini pudeleid lahtilõikamise teel on triviaalne, s.t. et homotoopset sfääri Σ^3 selles mõttes lahutada ei saa. Tõepoolest, kui selline 2-toor või Kleini pudel leiduksid, siis kujutuksid nende fundamentaalrühmad (nad on mittetriviaalsed) injektiivselt rühma $\pi(\Sigma^3)$ kuid $\pi(\Sigma^3) = \{1\}$ on triviaalne, seega selliseid 2-toore ja Kleini pudeleid pole. Vastavalt Thurstoni hüpoteesile leidub sfääril Σ^3 lõpliku ruumalaga lokaalselt homogeenne Riemanni meetrika. Et $\pi(\Sigma^3) = \{1\}$, on Σ^3 mudelmuutkonnaks Σ^3. Kuid Σ^3 on kompaktne muutkond ja 3-mõõtmelistest mudelmuutkondadest on kompaktne ainult üks, S^3. Seega on Σ^3 isomeetriline (seega difeomorfne) muutkonnaga S^3, millega on Poincaré hüpotees tõestatud.

5. Ricci voog, Hamiltoni ja Perelmani tulemused

Riemanni geomeetria vaatevinklist kinnitab Thurstoni hüpotees "parima võimaliku" meetrika olemasolu kinnisel 3-mõõtmelisel muutkonnal. Sellise meetrika võib konstrueerida sobiva vektorvälja integraaljoonte abil antud muutkonna kõikide meetrikate ruumil. Mainime, et lõplikumõõtmelise sileda muutkonna M^m kõikide Riemanni meetrikate ruum $\mathfrak{G}_{M^m}$ on lõpmatumõõtmeline funktsionaalne ruum, mille elementideks on antud muutkonnal määratud Riemanni meetrikad g. Meenutagem, et kui N^n on lõplikumõõtmeline sile muutkond ja X on vektorväli muutkonnal N^n, siis genereerib vektorväli X integraaljoonte voo, mille iga joon $\alpha : I \to N^n$, kus $I \subset \mathbb{R}$, rahuldab diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t)) = X(\alpha(t)) \tag{5}$$

algtingimusega $\alpha(0) = p \in N^n$. Võrrandisüsteem (5) näitab, et vektorvälja integraaljoone puutujavektor iga $t \in I$ korral on võrdne vektorvälja väärtusega vastavas punktis $\alpha(t)$.

Kuna muutkonnaks N^n on lõplikumõõtmelise muutkonna M^m kõikide meetrikate funktsionaalne ruum $\mathfrak{G}_{M^m}$, siis selleks, et meil oleks määratud vektorväli meetrikate ruumil $\mathfrak{G}_{M^m}$, peame sobivalt valima funktsionaali sellel ruumil. Funktsionaal peab sõltuma meetrikast (ja võib-olla meetrika tuletistest) ja meetrikate ruumi $\mathfrak{G}_{M^m}$ igas punktis g on funktsionaali väärtuseks sümmeetriline teist järku kovariantne tensor nagu meetrikagi. Kõige loomulikum ja lihtsam valik on Ricci kõverustensor Ric_{ij} (1). Sel juhul kirjeldab vektorvälja integraaljoonte voogu võrrandisüsteemiga (5) analoogiline võrrandisüsteem

$$\frac{d}{dt}(g(t)) = -2\,\mathrm{Ric}(g(t)). \tag{6}$$

Võrrandisüsteemiga (6) määratud integraaljoonte voogu meetrikate ruumis $\mathfrak{G}_{M^m}$ nimetatakse Ricci vooks (*Ricci flow*). Ricci voo mõiste võttis kasutusele R. Hamilton. Põhjused, miks Hamilton valis võrrandisüsteemi (6) paremale poole Ricci kõverustensori, on väga

sarnased nendega, miks Einstein võttis oma gravitatsiooniteoorias kasutusele Ricci kõverustensori: vaja oli teist järku kovariantset sümmeetrilist tensorit, mis sõltuks meetrikast ning selle esimest ja teist järku osatuletistest. Nende nõuetega on Ricci kõverustensor määratud peaaegu üheselt (meetrilise tensori kordseks oleva tensori täpsusega).

Olgu $x^1, x^2, \ldots, x^m$ Riemanni muutkonna M^m lokaalsed harmoonilised koordinaadid meetrika $g(t)$ suhtes, kus $g(t)$ on võrrandisüsteemiga (6) määratud Ricci voog. Riemanni muutkonna harmoonilistes koordinaatides kehtib võrdus ([16])

$$-2\,\mathrm{Ric}_{ij} = \Delta\, g_{ij} + Q_{ij}(g, \partial g),$$

kus $\Delta = g^{kl}\partial_k\partial_l$ on Laplace'i operaator (meetrikas g) ning avaldis Q_{ij} on polünomiaalne meetrika g ja tema osatuletiste suhtes, sealjuures ruutvorm osatuletiste suhtes. Muutkonna M^m harmoonilistes koordinaatides muutub Ricci voo võrrandisüsteemi (6) kuju järgmiseks:

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = \Delta\, g_{ij} + Q_{ij}(g, \partial g). \tag{7}$$

See on mittelineaarne soojusjuhtivuse tüüpi võrrand meetrika jaoks. Diferentsiaalvõrrandite teooriast järeldub Ricci voo $g(t)$ olemasolu ja ainsus ajaintervallil $-\delta < t < \delta$, kui algtingimuseks on sile Riemanni meetrika g_0. Seega Ricci voo võrrandisüsteemi (6) paremal poolel asetseval miinusel on tähtis roll, sest ta viib meid korrektsele soojusjuhtivuse tüüpi võrrandile (harmoonilistes koordinaatides) ja sellega Ricci voo eksisteerimine on garanteeritud. Kui võrrandisüsteemi (6) paremal pool asuv Ricci tensor oleks plussiga, siis esimene liige võrrandisüsteemi (7) paremal poolel oleks miinusega ja vastav võrrandisüsteem oleks soojusjuhtivuse tüüpi võrrand tagasisuunatud ajaga. Sellisel võrrandisüsteemil lahendeid üldiselt ei ole.

Võrrandisüsteemi (6) lahendiks algtingimusega $g(0) = g_0$, kus g_0 on mingi sile Riemanni meetrika muutkonnal M^m, on Riemanni meetrikate $g(t)$ pere antud muutkonnal M^m. Riemanni meetrikate

pere $g(t)$ käitumine erinevate parameetri t väärtuste korral ja samuti tekkivad singulaarsused olid Hamiltoni uuringute objektiks. Toome ära kaks Hamiltoni poolt tõestatud tulemust ([7], [8], [9]):

1. *olemasolu ja ainsus lõplikul ajaintervallil*: kui g_0 on sile Riemanni meetrika kompaktsel muutkonnal, siis leidub selline meetrikast g_0 sõltuv arv $\epsilon > 0$ ja võrrandisüsteemi (6) ainuke lahend $g(t)$, mis on määratud $t \in [0, \epsilon)$ korral ning $g(0) = g_0$;

2. *singulaarsuste tekkimise iseloomustamine kõveruse abil*: kui võrrandisüsteemi (6) lahend $g(t)$ on määratud intervallil $[0, T)$, kus T on reaalarv, ja seda pole võimalik jätkata suuremale intervallile $[0, T')$, kus $T' > T$, siis leidub muutkonna punkt x, milles Riemanni meetrikaga $g(t)$ määratud kõverustensor $R(x, t)$ on tõkestamata $t \to T$ korral.

Need Hamiltoni tulemused on üldise iseloomuga selles mõttes, et kehtivad suvalise mõõtmega muutkonna jaoks. Hamilton kasutas kolmemõõtmeliste muutkondade uurimiseks omaenda tehnikat ning proovis tõestada Thurstoni hüpoteesi. Õnnestus tal see siiski vaid tugevate lisaeeldustega juhu jaoks. Hamiltoni poolt tõestatud teoreemidest järeldub järgmine tulemus:

Kui Ricci voog $g(t)$ 3-mõõtmelisel sidusal Riemanni muutkonnal M Riemanni meetrikaga g_0 (s.t. $g(0) = g_0$) on määratud suvalise $t \in [0, \infty)$ korral ja meetrika $g(t)$ poolt määratud normaliseeritud kõverus $t \cdot R(x, t)$, kus $x \in M$, on tõkestatud $t \to \infty$ korral, siis rahuldab muutkond M Thurstoni hüpoteesi.

Thurstoni hüpoteesi lahenduse pakkus välja Perelman oma preprintide seerias ([13], [14], [15]). Perelman jätkas Ricci voo uurimist, pakkudes välja suure hulga originaalseid ideid. Selle artikli lõpetuseks olekski mõningate Perelmani ideede ja meetodite lühike kirjeldus ([3], [12]).

Gravitatsiooniteoorias nimetatakse Einstein-Hilberti mõjufunktsionaaliks funktsionaali $S : \mathfrak{G}_M \to \mathbb{R}$, kusjuures

$$S(g) = \int_M \mathfrak{R}\, dV_g, \tag{8}$$

kus M on Riemanni muutkond meetrikaga g, $\mathfrak{R}$ on skalaarne kõverus (2), dV_g on ruumala vorm (4) ja $\mathfrak{G}_M$ on muutkonna M meetrikate ruum. Mainime, et selle mõjufunktsionaali Euler-Lagrange'i võrrandid on Einsteini võrrandid gravitatsioonivälja jaoks.

Meenutagem, et siledal lõplikumõõtmelisel muutkonnal N antud sile funktsioon $f : N \to \mathbb{R}$ tekitab vektorvälja $\mathrm{grad}(f)$, kusjuures muutkonna N lokaalsetes koordinaatides $x^1, x^2, \ldots, x^n$ kehtib

$$\mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right).$$

Vektorvälja $\mathrm{grad}(f)$ integraaljoontega on määratud selle vektorvälja voog, mida nimetatakse funktsiooni f gradiendi vooks. Einstein-Hilberti mõjufunktsionaal on funktsionaal muutkonna M meetrikate ruumil $\mathfrak{G}_M$ ja seoses sellega kerkib loomulik küsimus, kas Ricci voog on seotud Einstein-Hilberti mõjufunktsionaaliga $S(g)$? Näiteks, kas Ricci voog on Einstein-Hilberti mõjufunktsionaali gradiendi voog? Osutub, et see on väga lähedane sellele, et olla õige, kuid siiski vastus on eitav. On võimalik isegi näidata, et Einstein-Hilberti mõjufunktsionaali gradiendi voog ei eksisteeri ja see on seotud sellega, et Einstein-Hilberti mõjufunktsionaali varieerimine viib meid soojusjuhtivuse võrrandile skalaarse kõveruse jaoks tagasisuunatud ajaga, s.t.

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{R}) = -\Delta\mathfrak{R} + Q,$$

ja see on mittekorrektne võrrand. Funktsiooni $f \in C^\infty(M)$ kasutades modifitseerime Einstein-Hilberti mõjufunktsionaali $S(g)$ järgmiselt

$$\mathcal{S}(g, f) = \int_M (\mathfrak{R} + |\mathrm{grad}(f)|^2)\, e^{-f}\, dV_g. \tag{9}$$

Funktsionaali $\mathcal{S}(g, f)$ võime vaadelda kui muutkonna M Riemanni meetrikate ruumil määratud funktsionaalide parve, kus parve parameetrite ruumiks on siledate funktsioonide ruum $C^\infty(M)$. Mainime,

et funktsionaal $S(g, f)$ tekib stringiteoorias (väljateooria kaasaegses teoreetilises füüsikas ([2]), milles osakest kujutatakse mitte punktina ruumis nagu klassikalises teoorias, vaid ühedimensionaalse objektina (string) ehk matemaatika vaatevinklist kõverjoonena) kui madalenergia efektiivne mõjufunktsionaal, kusjuures funktsiooni f (ehk väljateooria terminites skalaarvälja) nimetatakse dilatoniks. Valime muutkonnal M mingi sileda mõõdu $d\mu$ ja defineerime Perelmani seose (*Perelman coupling*) valemiga

$$e^{-f} dV_g = d\mu. \tag{10}$$

Perelmani seose abil saadud funktsionaal

$$\mathcal{S}^{\mu}(g, f) = \int_M (\mathfrak{R} + |\mathrm{grad}(f)|^2)\, d\mu,$$

on funktsionaal muutkonna M Riemanni meetrikate ruumil $\mathfrak{G}_M$. Esmapilgul paistab, et saadud funktsionaal on palju keerulisem, kui Einstein-Hilberti funktsionaal $S(g)$ ja sellega meie suurt midagi ei võida, kuid osutub, et leidub selliste funktsioonide f (või mõõtude $d\mu$) üsna suur klass, et funktsionaali $S^{\mu}(g, f)$ gradiendi voog eksisteerib ja rahuldab võrrandisüsteemi

$$\frac{d}{dt}(\tilde{g}(t)) = -2\,(\mathrm{Ric}(\tilde{g}(t)) + D^2 f), \tag{11}$$

kus $D^2 f$ on funktsiooni f Hesse determinant Riemanni meetrika $\tilde{g}(t)$ suhtes. Seega võrrandisüsteemiga (11) määratud meetrikate $\tilde{g}(t)$ voog on infinitesimaalse difeomorfismi $D^2 f$ abil modifitseeritud Ricci voog (6), kus

$$D^2 f = \frac{d}{dt}(\psi_t^*(\tilde{g}(t))),$$

ja ψ_t on vektorvälja $\mathrm{grad}(f)$ poolt indutseeritud muutkonna M lokaalsete difeomorfismide üheparameetriline rühm. Järelikult funktsionaali $\mathcal{S}^{\mu}(g, f)$ gradiendi voog on Ricci voog infinitesimaalsete difeomorfismide täpsusega, kusjuures mõõdu $d\mu$ erinevatele valikutele

vastavad erinevad infinitesimaalsed difeomorfismid $D^2 f$. On tähtis, et funktsionaal $\mathcal{S}^\mu$ kasvab mööda Ricci voogu.

Perelman näitas, et kui $g(t)$ on muutkonna M Ricci voog algtingimusega $g(0) = g_0$, siis suvalise $t > 0$ korral funktsioonide ja vastavate mõõtude klass, mille iga funktsioon f ja vastav mõõt $d\mu$ rahuldavad Perelmani seost (10) meetrika $g(t)$ korral, on väga lai, ja valides sobival teel funktsiooni f, Perelman uuris Riemanni meetrika $g(t)$ poolt tekitatud muutkonna M geomeetriat. Näiteks uurides funktsionaali $\mathcal{S}^\mu$ Perelman näitas, et meetrika $g(t)$ kidumist (kollapsit) muutkonna M mingi punkti p ümbruses on võimalik kindlaks teha funktsionaali $\mathcal{S}^\mu(f, g(t))$ väärtuse abil, kui funktsioon f on valitud nii, et e^{-f} on deltafunktsiooni $\delta(x - p)$ lähend. Mida suurem on Riemanni meetrika $g(t)$ kollaps punkti p ligidal, seda suurem absoluutväärtuselt on funktsionaali $\mathcal{S}^\mu(f, g(t))$ negatiivne väärtus. Kasutades nüüd seda, et funktsionaal $\mathcal{S}^\mu(f, g(t))$ kasvab mööda Ricci voogu, on võimalik vältida meetrika suvalise mastaabiga kollapsit lõpliku aja t jooksul.

Kirjandus

1. V. Abramov, *Poincaré hüpotees*, Eesti Matemaatika Seltsi aastaraamat 2001, Tartu 2003, 56–68.

2. V. Abramov, P. Kuusk, *Supersümmeetria füüsikas ja matemaatikas*, Tartu Ülikooli Kirjastus, Tartu 1994.

3. M.T. Anderson, *Geometrization of 3-manifolds via the Ricci flow*, Notices Am. Math. Soc. **51** (2004), 184–193.

4. S. Donaldson, *An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 269–316.

5. D.S. Freed, K. Uhlenbeck, *Instantons and Four-Manifolds*, Springer-Verlag, 1984.

6. M. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geom. **17** (1982), 357–453.

7. R. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. **17** (1982), 255–306.

8. R. Hamilton, *The Harnack estimate for the Ricci flow*, J. Differential Geom. **37** (1993), 225–243.

9. R. Hamilton, *Formation of singularities in the Ricci flow*, Surveys in Differential Geometry 2, International Press 1995, 7–136.

10. R. Kirby, L. Siebenmann, *On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung*, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 742–749.

11. H. Kneser, *Geschlossene Flächen in drei-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Jahresber. D. M. V. **38** (1929), 248–260.

12. J.W. Morgan, *Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds*, Bull. Am. Math. Soc., New Ser. **42** (2005), 57–78.

13. G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, preprint (2002), math.DG/0211159.

14. G. Perelman, *Ricci flow with surgery on thee-manifolds*, preprint (2003), math.DG/0303109.

15. G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, preprint (2003), math.DG/0307245.

16. P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 171, Springer, 1997.

17. H. Poincaré, *Cinquième complément à l'analysis situs*, Rend. Circ. Mat. Palermo **18** (1904), 45–110.

18. S. Smale, *The generalized Poincaré conjecture in higher dimensions*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 373–375.

19. J. Stallings, *Polyhedral homotopy spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 485–488.

20. C.H. Taubes, *Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds*, J. Diff. Geom. **25** (1987), 363–430.

21. W. Thurston, *Three-dimensional Geometry and Topology, Vol. 1*, Princeton Math. Ser., Vol. 35, Princeton Univ. Press 1997.

22. A. Wallace, *Modifications and cobounding manifolds. II*, J. Math. Mech. **10** (1961), 773–809.

Madala hälbivusega jadad ja integraalide arvutamine

Raul Kangro
Tartu Ülikool

1. Sissejuhatus

Integraalide arvutamine on tähtsal kohal paljudes matemaatika rakendustes, kuna integraalsel kujul esituvad mitmed füüsikalised suurused, samuti ka juhuslike suuruste keskväärtused. Kuigi integraale õnnestub täpselt arvutada suhteliselt harva, on palju erinevaid meetodeid nende ligikaudseks leidmiseks. Sageli aga on praktilistes rakendustes (näiteks finantsmatemaatikas) vaja arvutada suurest arvust muutujatest sõltuvate funktsioonide integraale ning sel juhul standardsed meedodid pahatihti ei tööta või on liiga aeglased. Käesolevas artiklis tuleb juttu ühest suhteliselt uuest lähenemisest, mis võimaldab ka viimasel juhul enamasti saada mõistliku täpsusega tulemusi aktsepteeritava tööajaga.

2. Motivatsioon ja eesmärgid

Vaatleme integraalide

$$I = \int_D f(x)\,dx,$$

kus $D = [0,\,1]^d$, $d \geqslant 1$, arvutamise mõningaid meetodeid. Alustame juhust $d = 1$, s.t. integraalidest üle ühiklõigu.

1. **Ristkülikvalem.** Jaotame lõigu $[0,\,1]$ n osalõiguks, arvutame funktsiooni väärtused nende osalõikude keskpunktides, korrutame osalõigu pikkusega ja summeerime. Nii saame integraali väärtuseks
$$I \approx I_n = \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{n},$$

kus $x_i = \frac{2i-1}{2n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Selle valemi kohta on teada, et ta on ruutkoonduvusega:

$$|I - I_n| \leq \frac{c}{n^2},$$

kus c sõltub ainult funktsioonist f; viga on võimalik arvutuste käigus hinnata Runge võttega:

$$I - I_{3n} \approx \frac{I_n - I_{3n}}{8}.$$

2. **Monte-Carlo meetod.** Kasutades teadmist, et lõigul [0, 1] ühtlase jaotusega juhusliku suuruse korral avaldub keskväärtus $\mathrm{E}[f(X)]$ vaadeldava integraaliga ning et suurte arvude seaduse kohaselt saab keskväärtust leida kui sõltumatute katsete aritmeetilise keskmise piirväärtust katsete arvu kasvades, saame vaadeldava integraali ligikaudse väärtuse leida nii, et genereerime n ühtlase jaotusega juhuslikku arvu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ning leiame

$$I \approx I_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(X_i)}{n}.$$

Erinevalt ristkülikvalemist on suuruse I_n viga Monte-Carlo meetodi korral juhuslik; fikseeritud n korral võime arvutusi korrates saada iga kord erineva tulemuse. Seetõttu on ka veahinnang tõenäosuslik: tõenäosusega p on n katse korral tulemuse viga hinnatav järgmiselt:

$$|I - I_n| \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}\sqrt{1-p}},$$

kus σ on juhusliku suuruse $f(X)$ dispersioon, mida saab hinnata arvutatud funktsiooni väärtuste $f(X_i)$ abil.

Kui võrrelda neid kahte meetodit, siis ristkülikvalemi eeliseks on tema suurem koonduvuskiirus: näiteks funktsiooni $f(x) = \cos(x)$ puhul annab ristkülikvalemi kasutamine juba $n = 6$ korral

(ja ka suuremate n väärtuste korral) tulemuse veaga, mis on väiksem kui $0,001$, kuid Monte-Carlo meetodi abil tuleb selleks, et saada sama täpsus keskmiselt 19 juhul 20-st kasutada rohkem kui 74000 genereerimist. Samuti võib ristkülikvalemi eeliseks lugeda veahinnangu mittejuhuslikkust. Monte-Carlo meetodi eeliseks võib aga lugeda seda, et juba leitud tulemust on lihtne täpsustada, selleks tuleb ainult juhusliku suuruse X väärtusi juurde genereerida, kusjuures arvutused võib peatada suvalisel momendil (näiteks kui enam pole aega oodata) ning kõiki arvutatud funktsiooni väärtusi saab kasutada integraali ligikaudse väärtuse leidmiseks. Ristkülikvalemi puhul on tulemuse täpsustamine nii, et varemtehtud töö raisku ei läheks, tunduvalt keerulisem, kuna selleks tuleb suurendada n väärtust kolm korda ning arvutusi ei tohi peatada enne, kui funktsiooni väärtus on kõigis lisandunud punktides välja arvutatud ja kokku summeeritud. Kokkuvõtvalt võib aga öelda, et ühemõõtmeliste integraalide korral ei suuda Monte-Carlo meetod ristkülikvalemiga konkureerida.

Integreerimispiirkonna dimensiooni d kasvades aga muutub pilt varsti teiseks. Ei ole kuigi raske veenduda, et ristkülikvalemi analoog (kus me jaotame piirkonna $n = k^d$ d-mõõtmeliseks kuubiks ja leiame keskmise funktsiooni väärtustest nende kuubikeste keskpunktides) koondub d-mõõtmelise integraali korral kiirusega $\frac{c}{n^{2/d}}$, mis juba $d = 5$ korral on aeglasem, kui Monte-Carlo meetodi koonduvuskiirus $\frac{c}{\sqrt{n}}$. Seega muutub mitmemõõtmeliste integraalide korral Monte-Carlo meetod arvestatavaks konkurendiks klassikalistele integraalide arvutamise numbrilistele meetoditele, samuti muutub suurema dimensiooni korral olulisemaks võimalus arvutusi peatada siis, kui see meile vajalikuks osutub. Samas aga jäävad probleemideks suhteliselt aeglane koonduvuskiirus ning tulemuse juhuslikkus.

Siit tekibki küsimus, et kas ei ole võimalik konstrueerida integraalide ligikaudse arvutamise meetodit, mis koonduks kiiremini kui Monte-Carlo meetod suvalise dimensiooni d korral, oleks mittejuhuslik ning võimaldaks arvutusi peatada suvalisel momendil. Osutub, et see on võimalik, kuid sellise meetodi konstrueerimisel

tuleb kasutada spetsiaalselt valitud punkte x_i, kus funktsiooni väärtusi välja arvutada. Siin tulevadki mängu nn. madala hälbivusega jadad.

3. Madala hälbivusega jadad ja integraalide arvutamine

On arusaadav, et integraali heaks lähendamiseks peavad punktid, kus funktsiooni väärtused leitakse, paiknema integreerimispiirkonnas mingis mõttes ühtlaselt. Kui me tahame, et integraal oleks hästi lähendatud suvalise arvu punktide korral, peaks ühtlase paigutuse tingimus olema täidetud jada $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jaoks iga n korral. Siin tekib aga küsimus, kuidas punktide paigutuse ühtlust mõõta. Osutub, et selleks sobib hälbivuse mõiste.

Definitsioon 1. *Olgu P mingi lõplik hulk punkte piirkonnas $[0,1]^d$ ning olgu $\mathcal{H}$ hulga $[0,1]^d$ mingi Lebesgue'i mõttes mõõtuvate alamhulkade kollektsioon. Punktihulga P hälbivuseks $\mathcal{H}$ suhtes nimetatakse suurust*

$$\sup_{H\in\mathcal{H}} \left| \frac{|H \cap P|}{|P|} - \mu(H) \right|,$$

kus $|A|$ tähistab hulga A elementide arvu ning μH on hulga H Lebesgue'i mõõt (pindala $d = 2$ korral, ruumala $d = 3$ korral jne.). Kui $\mathcal{H}$ koosneb risttahukatest kujul $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, kus $0 \le a_i < b_i \le 1$, siis hälbivust $\mathcal{H}$ suhtes nimetatakse lihtsalt hälbivuseks ning tähistatakse kujul $D(P)$. Kui $\mathcal{H}$ koosneb hulkadest kujul $[0, b_1] \times [0, b_2] \times \cdots \times [0, b_d]$, siis hälbivust $\mathcal{H}$ suhtes nimetatakse $*$-hälbivuseks (tärn-hälbivus) ja tähistatakse kujul $D^*(P)$.

Definitsioonist järeldub, et iga lõpliku punktihulga P korral kehtib võrratus $D^*(P) \le D(P)$. Veidi raskem on veenduda selles, et tegelikult kehtib ka võrratus $D(P) \le 2^d D^*(P)$, mistõttu on $*$-hälbivus ja tavaline hälbivus ekvivalentsed suurused. Lihtne on näha ka seda, et $D(P) \geqslant \frac{1}{|P|}$ (selleks piisab väikeste, ühte punkti

sisaldavate ruudukeste vaatlemisest). Huvitavaks probleemiks on aga selliste punktijadade konstrueerimine, mille korral esimesest n elemendist koosnevate punktihulkade hälbivus läheks n kasvades nulli võimalikult kiiresti.

On teada mitmeid mooduseid jadade konstrueerimiseks d-mõõtmelises ühikkuubis, mille korral kehtivad võrratused

$$D(\{x_1, \ldots, x_n\}) \leq \frac{c(\ln n)^{d-1}}{n}.$$

Üldtunnustatud (kuid seni tõestamata) hüpoteesiks on, et kiiremat nullikoondumist ei ole võimalik saavutada, mistõttu selliseid jadasid nimetatakse *madala hälbivusega jadadeks.*

Integraalide arvutamise seisukohalt muudab madala hälbivusega jadad väga huvipakkuvaks järgnev Koskma-Hlawka võrratuse nime all tuntav tulemus.

Teoreem 1. *Suvalise teatud tehnilisi eeldusi (lõpliku Hardy-Krause variatsiooni olemasolu) rahuldava funktsiooni f korral kehtib võrratus*

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \int_{[0,\,1]^d} f(u)du \right| \leq c_f D^*(\{x_1, \ldots, x_n\}),$$

kus konstant c_f sõltub ainult funktsiooni f omadustest.

Siit on näha, et madala hälbivusega jada kasutamise korral võime integraali arvutada samuti nagu Monte-Carlo simulatsiooni kasutades: arvutame funktsiooni väärtused mingis arvus punktides ning integraali lähendiks on nende väärtuste keskmine, kusjuures madala hälbivusega jadade korral on koonduvuskiirus suurem (viga käitub peaaegu nagu $\frac{c}{n}$ Monte-Carlo $\frac{c}{\sqrt{n}}$ asemel). Seetõttu on madala hälbivusega jada kasutamine mitmekordsete integraalide arvutamisel Monte-Carlo meetodile vägagi arvestatavaks konkurendiks. Ainukeseks seni ületamata puuduseks on see, et siiani ei ole leitud efektiivset moodust tegeliku vea hindamiseks arvutuste käigus (vastava konstandi väljaarvutamine on enamasti vähemalt sama keerukas ülesanne, kui integraali väärtuse leidmine).

Vaatleme ühte küllaltki lihtsat moodust madala hälbivusega jadade konstrueerimiseks. Selleks tähistame naturaalarvu k baasil b esituse i-ndat numbrit kujul $\alpha_b(i,k)$, s.t. $0 \le \alpha_b(i,k) < b$ ning

$$k = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_b(i,k) b^i,$$

kusjuures $\alpha_b(i,k) = 0$, kui $i > \log_b(k)$. Naturaalarvude esituse kaudu b-ndsüsteemis saame defineerida kujutuse naturaalarvude hulgast lõiku [0, 1] kujul

$$\psi_b(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha_b(i,k)}{b^{i+1}}, \ k \in I\!N.$$

Näiteks $b = 2$ korral saame

$$\psi_2(0) = 0, \ \ \psi_2(1) = \frac{1}{2}, \ \ \psi_2(2) = \frac{1}{4}, \ \ \psi_2(3) = \frac{3}{4}, \ \ \psi_2(4) = \frac{1}{8},$$
$$\psi_2(5) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \quad \text{jne.}$$

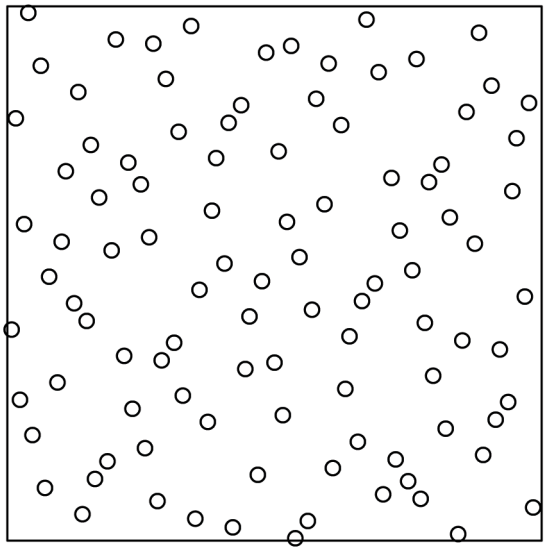
Osutub, et kui fikseerida d erinevat algarvu (või üldisemalt, d ühistegurita arvu) ning defineerida d-mõõtmeliste punktide jada

$$x_k = (\psi_{b_1}(k), \ldots, \psi_{b_d}(k)), k \in I\!N,$$

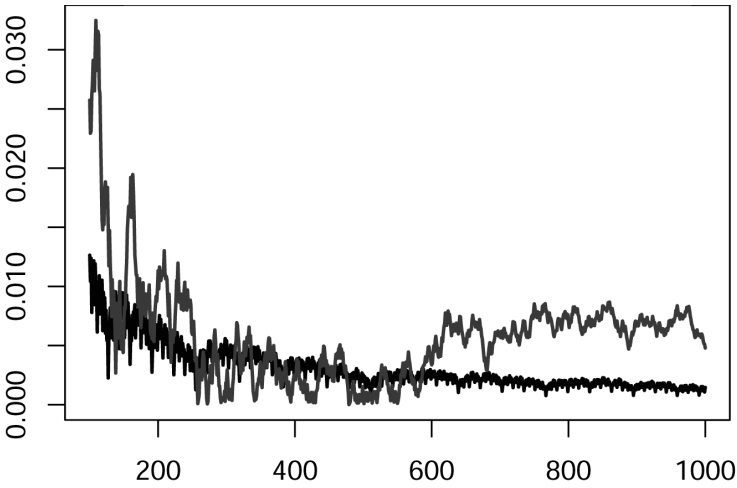
siis saadud nn. Haltoni jada on madala hälbivusega. Näiteks $b_1 = 2, b_2 = 3$ korral saame nii punktid

$$(0,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{9}\right), \left(\frac{5}{8}, \frac{4}{9}\right) \quad \text{jne.}$$

Esimese saja punkti paiknemist võib näha jooniselt 1. Kahjuks suure dimensiooni d korral ei ole Haltoni punktid väga heade omadustega, mistõttu praktilistes rakendustes kasutatakse tunduvalt keerulisemalt defineeritud, kuid paremate omadustega madala hälbivusega jadasid.



Joonis 1: Esimesed sada Haltoni punkti juhul $b_1 = 2$, $b_2 = 3$.



Joonis 2: Integraali lähisväärtuse viga Monte-Carlo meetodi (hall joon) ja kvaasi-Monte-Carlo meetodi (must joon) korral

Lõpetuseks toome ka ühe numbrilise eksperimendi tulemused. Nimelt vaatleme integraali

$$\int_0^1 \int_0^1 x \cdot \sin(x+y)\, dx\, dy$$

ligikaudset leidmist Monte-Carlo meetodil ning eelpool defineeritud Haltoni punkte kasutava nn. kvaasi-Monte-Carlo meetodil, võrreldes saadud tulemuste erinevusi täpsest väärtusest $n = 100, 101, \ldots, 1000$ korral. Nagu jooniselt 2 näha, on Monte-Carlo viga tunduvalt hüppelisem ning kahaneb aeglasemalt kui Haltoni punktide kasutamisel saadud tulemuse viga.

Tõenäosusjaotuste lähendamine hulkadega

Meelis Käärik
Tartu Ülikool

Tõenäosusjaotuste lähendamine hulkadega on oluline ülesanne nii klassikalises statistikas ja tõenäosusteoorias kui mitmetes praktilistes valdkondades. Teatavasti on ka sellised tuntud karakteristikud nagu juhusliku suuruse keskväärtus ja mediaan tema parimad ühepunktilised lähendid vastavalt ruutkauguse või absoluutse kauguse mõttes. Käesolevas töös vaadeldakse selle klassikalise ülesande kaugeleulatuvat üldistust, seda nii lähendhulkade valiku, kaofunktsiooni kuju kui ka põhiruumi enda osas.

Võimalike lähendhulkade valik on väga lai. Tuntumad näited on k-punktilised hulgad, sirged, tasandid, aga ka erinevad kõverad ja pinnad. Kõige sügavamad tulemused on kirjanduses seni saadud juhul, kui klass $\mathcal{A}$ koosneb k-punktilistest hulkadest. Selliste lähendhulkadega on tegemist näiteks kvantimise (analoogsignaali muutmine digitaalseks) korral. Suhteliselt hästi on lahendatud optimaalsete k-hulkade olemasolu, nende koondumise jt. küsimused (vt. [12], [3], [8]). Lähendhulkade koondumise probleem tekib siis, kui lähendhulgad on optimaalsed mõõtude jada $\{P_n\}$ suhtes, kus P_n koondub (nõrgalt) mõõduks P. Kirjeldatud situatsioon on praktikas väga levinud: nimelt on statistikas enamasti vaja hinnata üldkogumi kriteeriume, aga võimalik on kasutada ainult valimist saadud informatsiooni. On ilmne, et valimi karakteristikute koondumine üldkogumile vastavaks karakteristikuks on igati soovitav omadus, mille tõestamine üldjuhul aga pole sugugi triviaalne ülesanne. Seejuures on teada fakt, et valimi tekitatud empiiriline jaotus koondub nõrgalt üldkogumile vastavaks jaotuseks tõenäosusega 1. Eelpool mainitud töödes ongi vaatluse all just empiirilised mõõdud P_n ning väitekirja üks ülesanne oligi käsitleda üldisemat juhtu, mis haaraks ka näiteks ergoodiliste protsesside poolt indutseeritud mõõte.

Seoses arvutustehnika võimsuse pideva kasvuga on järjest enam hakatud uurima ka keerulisemaid mudeleid kui k punktiga lähen-

damine. Jaotuste ringjoontega lähendamise probleem on kerkinud mitmetes eri valdkondades. Huvitavaks näiteks on siin ühe Antiik-Kreeka staadioni rekonstrueerimine osaliselt säilinud stardiraja järgi ([16]). Lähendamine ringjoonte ja ellipsitega on oluline teema füüsikas osakeste kiirendamisel magnetväljas, astronoomias ([11]), lennukitööstuses, metroloogias, helilainete uurimisel ([17]) ja mujal.

Matemaatiliselt saame uuritava ülesande kirja panna järgmiselt. Olgu antud juhuslik element X jaotusega P separaablil meetrilisel ruumil (S, d) ja olgu $\mathcal{A}$ ruumi S teatud alamhulkade hulk. Lähendhulka $A \in \mathcal{A}$ nimetame optimaalseks (jaotuse P mõttes), kui ta minimiseerib järgmise kaofunktsiooni:

$$W(A, P) = E\varphi(d(X, A)),$$

kus $d(x, A)$ on kaugus punkti x ja lähendhulga A vahel ja hälbefunktsioon φ annab lähendhulgale tema kauguse põhjal "hinde".

Töös püstitatud põhiküsimused olid:

1) millal optimaalne lähendhulk üldse leidub?
2) kas kaofunktsioonide infiimumväärtuste ("parimate hinnete") jada koondub?
3) kas optimaalsete lähendhulkade jada $\{A_n\}$ koondub?

Paneme tähele, et "parimate hinnete" käitumise uurimine on sageli olulisemgi kui optimaalsete lähendite endi uurimine. Nimelt, tihti on meil lihtsalt vaja jaotuse P_n põhjal leida jaotuse P jaoks "piisavalt hea hindega" lähendit. Sellise ülesande püstituse korral ei olegi niivõrd oluline see, kas P_n-optimaalsed lähendid koonduvad, tähtis on, et just "hinnete" jada koonduks (vt. näiteks [18]).

Toodud probleeme on üsna laialdaselt uuritud ka varem ([12], [1], [3], [4], [13], [14], [2], [8], [9]). Töö eesmärk oli üldistada seniseid tulemusi antud valdkonnas kahes põhisuunas:

- valides võimalikult laia lähendhulkade klassi $\mathcal{A}$;
- tehes võimalikult vähe kitsendusi mõõtudele $\{P_n\}$ ja P, et kaasata ka praktikas olulisi mitte-empiirilisi mõõte (kaasatud on näiteks ka ergoodiliste protsesside poolt genereeritud mõõtude jadad).

Töö tulemused võib jagada kahele põhilise üldistuse tasemele. Esmalt on uuritud jaotuste lähendamist suvalise lähendhulkade klassi ja separaabli meetrilise ruumi S korral. Sellistel üldistel eeldustel õnnestus tõestada kaofunktsioonide optimaalsete väärtuste ("parimate hinnete") koondumine – üks püstitatud põhieesmärke. Toodud teoreem (koos mitmete kaasnevate tulemustega) üldistab paljusid varasemaid samalaadseid tulemusi (vt. [12], [1], [14], [18]).

Edasi on lähemalt vaadeldud kahte võrdlemisi laia lähendhulkade klassi: teatud tüüpi tõkestatud hulgad ja parameetrilised hulgad. Mõlema klassi korral said positiivse vastuse kaks ülejäänud põhiküsimust: tõestatud on optimaalsete lähendhulkade leidumine ja koondumine lõplikumõõtmelises normeeritud ruumis.

Saadud tulemused on edasiarenduseks artikli (Käärik, 2000) tulemustele, kus vaadeldi jaotuste lähendamist sfääridega, samuti on nad üldisema iseloomuga võrreldes teiste varasemate töödega selles vallas (vrdl. [12], [1], [2], [15]).

Väitekirjaga seotud teemadel on tehtud ettekanded Vilniuse Ülikooli matemaatika-informaatikateaduskonna tõenäosusteooria seminaris (detsembris 2004) ja Leedu Teaduste Akadeemia Matemaatika ja Informaatika Instituudi tõenäosusteooria seminaris (detsembris 2004), samuti konverentsil *9th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics* (juunis 2006). Lisaks väitekirjale on sel teemal avaldatud ka kolm artiklit: [5], [6], [7].

Kirjandus

1. E.F. Abaya, G.L. Wise, *Convergence of vector quantizers with applications to optimal quantization*, SIAM J. Appl. Math. **44** (1984), 183–189.

2. J. Averous, M. Meste, *Median balls: an extension of the interquantile intervals to multivariate distributions*, J. Multivariate Anal. **63** (1997), 222–241.

3. J.A. Cuesta, C. Matrán, *The strong law of large numbers for k-means and best possible nets of Banach valued random*

variables, Probab. Theory Related Fields, **78** (1988), 523–534.

4. J.A Cuesta, C. Matrán, *Uniform consistency of r-means*, Statist. Probab. Lett. **6** (1989), 65–71.

5. M. Käärik, *Approximation of distributions by sphere*, Multivariate Statistics. New Trends in Probability and Statistics, Vol. 5, VSP/TEV, Vilnius-Utrecht-Tokyo 2000, 61–66.

6. M. Käärik, K. Pärna, *Approximation of distributions by parametric sets*, Acta Appl. Math. **78** (2003), 175–183.

7. M. Käärik, K. Pärna, *Fitting parametric sets to probability distributions*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math. **8** (2004), 101–112.

8. J. Lember, *Consistency of empirical k-centres*, Doctoral Dissertation. Tartu Ülikooli Kirjastus, Tartu 1999.

9. J. Lember, *Consistency of k-centres via metric projection*, Limit Theorems in Probability and Statistics II, Budapest 2002, 335–350.

10. J. Lember, K. Pärna, *Strong consistency of k-centres in reflexive spaces*, Probability Theory and Mathematical Statistics, VSP/TEV, Vilnius-Utrecht-Tokyo 1999, 441–452

11. Y. Nievergelt, *A tutorial history of least squares with applications to astronomy and geodesy*, J. Comput. Appl. Math., **121** (2000), 37–72.

12. D. Pollard, *Strong consistency of k-means clustering*, Ann. Statist. **9** (1981), 135–140.

13. K. Pärna, *Strong consistency of k-means clustering criterion in separable metric spaces*, Tartu Riikl. Ülik. Toimetised **733** (1986), 86–96.

14. K. Pärna, *On the stability of k-means clustering criterion in separable metric spaces*, Tartu Riikl. Ülik. Toimetised **798** (1988), 19–36.

15. K. Pärna, J. Lember, A. Viiart, *Approximating of distributions by sets*, Classification in the Information Age, Springer-Verlag 1999, Heidelberg 215–224.

16. C. Rorres, D.G. Romano, *Finding the center of a circular starting line in an ancient Greek stadium*, SIAM Review **39**, (1997), 745–754

17. H. Späth, *Least-squares fitting by circles*, Computing **57** (1996), 179–185.

18. V. Vapnik, *Statistical Learning Theory*, Wiley, New York, 1998.

Black-Scholes-Mertoni järgne finantsmatemaatika

Artur Sepp
Tartu Ülikool

Käesolevas artiklis käsitletakse mõningaid tähtsaid arenguid finantsmatemaatikas pärast Black-Scholes-Mertoni ([1], [4], 1973) poolt tuletisinstrumentide, s.t. teiste finantsinstrumentide nagu näiteks aktsiad, võlakirjad, valuutad jne. turuhindadest sõltuvate väärtustega finantsinstrumentide, hindade arvutamise ja nendega kauplemisega seondavate riskide taandamise metodoloogia väljatöötamist. Käesolev artikkel kajastab ainult autori akadeemilise ja professionaalse tegevusega seonduvat, seega ei saa järgnevat mingil juhul vaadelda kui ammendavat ülevaadet vägagi laia ja mitmekesise finantsmatemaatika valdkonna tähtsamatest arengutest ja lahendamata probleemidest.

1. Sissejuhatus

Kõige lihtsamateks tuletisinstrumentideks on Euroopa tüüpi ostu- ja müügioptsioonid, mille aluseks oleva finantsvara hinda ajal t tähistame kujul $S(t)$. Vaatleme Euroopa tüüpi ostuoptsiooni, mille väärtus olgu antud funktsiooniga $C(t, S)$. See optsioon annab omanikule õiguse (ilma igasuguste kohustusteta) osta üks alusvara aktsia täitmisajal T lepingus määratud täitmishinnaga K. Teiste sõnadega, selle optsiooni rahalist väärtust täitmisajal kirjeldab nn. maksefunktsioon kujul

$$C(T, S) = \max(S - K, 0), \tag{1}$$

kus maksimumi võtmine vastab sellele, et optsioon on õigus ja mitte kohustus, mistõttu omanikul on mõistlik seda kasutada ainult siis, kui täitmishind (s.t. optsiooni realiseerimisel makstav hind) on väiksem kui momendi turuhind, millega oleks võimalik vastavat alusvara osta.

Vaatleme nüüd ostuoptsiooniga kauplemist müüja seisukohalt. Oletame, et meid huvitab ajamoment t, $0 \leq t < T$. Optsiooni müüja peab leidma vastuse järgmistele olulistele küsimustele: 1) kui palju oleks õige küsida sellise optsioonilepingu müümise eest, ning 2) kuidas elimineerida või kahandada lepinguga seotud riski, arvestades, et müüja seisukohalt on võimalik ainult piiratud suurusega positiivne lõpptulemus ning alusvara hinna plahvatuslikul kasvamisel potentsiaalselt kuitahes suur negatiivne tulemus.

Selleks, et nende küsimustega tegeleda matemaatilisest vaatenurgast lähtuvalt, on esimeseks vaadeldavaks ideeks kirjeldada kõigepealt alusvara hinna jaotus ajal T, seejärel leida seda jaotust kasutades vaadeldava ostuoptsiooni maksefunktsiooni keskväärtus ajal T ning lõpuks rakendada sobivat diskonteerimist selleks, et leida ajamomendile t vastav optsiooni hind. On selge, et alusvara hinna jaotuse valimisel on oluline küsimus vastava keskväärtuse ja dispersiooni leidmine. Keskväärtus peaks olema seotud vaadeldava alusvara keskmise tulususega, standardhälve aga iseloomustaks alusvara tulususe muutlikkust ehk riski.

On ilmne, et ülalmainitud tõenäosusjaotuse kuju muutub ajas sõltuvalt alusvara momendihinnast ning (võib-olla ka) alusvara tulususe muutlikkusest, seetõttu optsioonide dünaamiliseks hindamiseks ja riskide maandamiseks tuleb kirjeldada alusvara hinna ajas arenemist kajastav mudel. Selleks sobivad stohhastilised diferentsiaalvõrrandid. Kuna Feynman-Kac'i teoreem võimaldab esitada keskväärtusi stohhastiliste diferentsiaalvõrrandite poolt kirjeldatud juhuslike suuruste suhtes osatuletistega diferentsiaalvõrrandite (ODV) lahenditena, siis võib optsioonide hindade arvutamise taandada teadud ODV-de lahendamisele.

2. Black-Scholes-Mertoni mudel

Finantsoptsioonide hidamises ja riskide maandamises tõi murrangu Black-Scholes-Mertoni poolt 1973. aastal väljatöötatud lähenemine, mille kohaselt võib aktsiahindade ajas arenemist kirjeldada log-

normaalse difusiooni mudeliga:

$$dS(t) = \mu S(t) + \sigma S(t) dW(t), \;\; S(0) \text{ on antud}, \tag{2}$$

kus μ on alusvara trend (iseloomustab keskmist protsentuaalset alusvara hinnatõusu), σ on alusvara volatiilsus (mõõdab alusvara hinna $S(t)$ suhteliste muutuste varieeruvust) ja $W(t)$ on standardne Browni liikumine, mida kasutatakse hinnamuutuste juhuslikkuse modelleerimiseks.

Black-Scholes-Mertoni lähenemise põhiliseks uuenduseks oli optsiooni müügiga seotud riskide maandamise strateegia väljatöötamine, mis võimaldas tuletisväärtpaberi müügiga seotud riskid elimineerida alusvaraga dünaamilise kauplemise ja selleks vajamineva raha riskivaba protsendiga r laenamise (või ülejääva raha sama protsendiga hoiustamise) abil. Kuna see strateegia on sama kõigi müüjate jaoks sõltumata nende riskitundlikkusest, siis järelikult on võimalik optsioonide hinna leidmisel kasutada nn. riskineutraalset martingaalimõõtu $\mathbb{Q}$, mille korral iga tuletisinstrumendi (sh. alusvara enda) diskonteeritud hind on martingaal ning alusvara trend on riskivaba protsent r. Viimasest võib mõelda kui lühiajaliste riigivõlakirjade tulususprotsendist.

Eelneva põhjal võib ostuoptsiooni hinda arvutada kui keskväärtust tema diskonteeritud väärtusest ajal T:

$$C(t,S) = e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(S' - K, 0) \Xi(t, S; T, S') dS', \tag{3}$$

kus $\Xi(t, S; T, S')$ on võrrandiga (2) kirjeldatud log-normaalse juhusliku suuruse üleminekutõenäosuse tihedusfunktsioon, milleks on

$$\Xi(t, S; T, S') = \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}S'} \exp\left\{ -\frac{\left(\ln\left(\frac{S}{S'}\right) + rT - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)} \right\}. \tag{4}$$

Feynman-Kac'i teoreemi kohaselt rahuldab ostuoptsiooni hind

$C(t,S)$ ka tuntud Black-Scholes-Mertoni ODV-d:

$$\begin{aligned} &C_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + rSC_S - rC = 0, \\ &C(T,S) = \max(S-K,0), \end{aligned} \tag{5}$$

kus me eeldame, et $C(t,S)$ on piisavalt sile, s.t. et osatuletised C_t, C_S ja C_{SS} eksisteerivad.

Võrrandi (5) lahendamisel saame kuulsa Black-Scholes-Mertoni ostuoptsiooni hinna valemi

$$\begin{aligned} &C(t,S) = S\mathcal{N}(d_+) + e^{-r(T-t)}K\mathcal{N}(d_-), \\ &d_{+,-} = \frac{\ln(S/K) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \end{aligned} \tag{6}$$

kus $\mathcal{N}(x)$ on standardse normaaljaotuse jaotusfunktsioon.

Valemis (6) $S(t)$ ja r on määratud olemasoleva turuinfoga, T ja K on toodud optsioonilepingus, seega alusvara volatiilsus σ on ainus "vaba" parameeter, mida on vaja kuidagi leida või järeldada olemasolevate andmete põhjal.

Lõpetuseks märgime, et kuna ostuoptsiooni hind esitub nii keskväärtusena (3) kui ka ODV (5) lahendina, võime me leida selle (ja teiste sarnaste lepingute) hindasid kahte moodi: 1) leides integraali (3) väärtuse analüütiliselt või Monte-Carlo meetodil, või 2) lahendades ODV (5) kas ilmutatud kujul analüütiliste meetoditega (sh. Laplace'i ja Fourier' teisendusi kasutades) või numbriliselt näiteks võrgumeetodeid kasutades. Praktikas tuleb valida sobiv meetod vastavalt lahendatava ülesande keerukusele: lihtsamate ülesannete korral on eelistatumaks täpsete lahendite olemasolu, kuid keerulisemate ülesannete korral tuleb kasutada kas võrgumeetodit või Monte-Carlo simulatsioone.

3. Volatiilsuse naeratus

Kuigi Black-Scholes-Mertoni lähenemine on finantsiliselt robustne ning matemaatiliselt mugav kasutada, on tema suureks puuduseks

eeldus, et alusvara volatiilsus σ on konstantne kõigi täitmishindade ja täitmisaegade suhtes. Praktikas on investorid aga tüüpiliselt mures finantsvara suure negatiivse muudatuse võimaluse pärast ning kaitsevad ennast selle riski vastu madala täitmishinnaga müügioptsioonide ostmise abil (müügioptsioon annab omanikule õiguse müüa alusvara täitmisajal T lepingus määratud täitmishinnaga K). Lisaks sellele on investoritel, kes plaanivad alusvara hinna kasvamisel oma osaluse kasumi väljavõtmise eesmärgil teatud hinnatasemel realiseerida, kasulikum hoopis müüa vastava täitmishinnaga ostuoptsioon.

Nõudlus madala hinnatasemega müügioptsioonide järele ning huvi kõrgema hinnatasemega ostuoptsioonide müümise vastu toob kaasa nn. volatiilsuse naeratuse. Seda efekti on võimalik näha, kui kasutada valemit (6) selleks, et leida volatiilsusväärtus $\sigma_{imp}(K)$, kasutades teadaolevaid turuhindu täitmishinnaga K_p müügioptsiooni, täitmishinnaga K_c ostuoptsiooni ning täitmishinnaga K_0 ostuoptsiooni korral juhul $K_p < K_0 < K_c$. Tulemusena näeme enamasti, et

$$\sigma_{imp}(K_p) > \sigma_{imp}(K_0) > \sigma_{imp}(K_c), \tag{7}$$

mis on vastuolus Black-Scholes-Mertoni konstantse volatiilsuse eeldusega.

Lisaks eelnevale on finantsturgudel täheldatav ka nn. täitmisajast sõltuvuse efekt, mille kohaselt volatiilsused ja võrratuste (7) täidetuse rangus sõltuvad ka täitmisajast T.

Selleks, et võtta arvesse ülalmainitud efekte, tuleb modifitseerida Black-Scholes-Mertoni eeldust alusvara log-normaalse dünaamika (5) kohta. Kasutada tuleks sellist alusvara dünaamikat, mille korral alusvara tulevikuhindade jaotus oleks sobivalt asümmeetriline, s.t. keskväärtusest madalamate hindade tõenäosused peaks olema kõrgemad ning keskmisest kõrgemate väärtustega hindade tõenäosused madalamad, kui vastaval log-normaalsel jaotusel. Need efektid muudavad madalate (kõrgete) täitmishindadega müügioptsioonid (ostuoptsioonid) rohkem (vähem) väärtuslikumaks võrreldes Black-Scholes-Mertoni mudelil põhineva hinnaga, mis au-

tomaatselt tooks kaasa reaalsetel turgudel täheldatava naeratuse efekti.

4. Hüpetega difusiooniprotsessid

Esimeseks katseks asümmeetriliste jaotuste sissetoomiseks tegi Merton [5], kes täiendas Black-Scholes-Mertoni mudelit (2). Hüppeid lubava matemaatilise mudeli kasutamine alusvara hinna modelleerimisel on täiesti realistlik, kuna reaalsetel turgudel toimuvad aegajalt järsud hinnahüpped.

Modelleerimisel tavaliselt eeldatakse, et hüpped toimuvad vastavalt konstantse intensiivsusega λ Poissoni protsessile $N_\lambda(t)$, seega aktsiahinna muutumise võrrandiks on

$$dS(t) = rS(t) + \sigma S(t)dW(t) + S(t)(e^J - 1)dN_\lambda(t),\ S(0) \text{ on antud.} \tag{8}$$

Kui hüpe toimub, siis tema suurus J on juhuslik suurus tõenäosustihedusfunktsiooniga $\varpi(J)$. Selleks, et alusvara hind oleks martingaal mõõdu $\mathbb{Q}$ suhtes, tuleb keskmine hüppe suurus m lisada alusvara trendile, $m = \int_{-\infty}^{\infty}[e^{J'} - 1]\varpi(J')dJ'$.

Merton soovitas kasutada normaaljaotusega hüppe suurust J. Teiseks arvestatavaks alternatiiviks on kasutada asümmeetrilist topelt-eksponentjaotust, mida soovitas Kou [3]; selle jaotuse tihedusfunktsioon on kujul

$$\varpi(J) = q^+\frac{1}{\eta^+}e^{-\frac{1}{\eta^+}J}\mathbf{1}_{\{J\geqslant 0\}} + q^-\frac{1}{\eta^-}e^{\frac{1}{\eta^-}J}\mathbf{1}_{\{J<0\}}, \tag{9}$$

kus $1 > \eta^+ > 0$, $\eta^- > 0$ on positiivsete ja negatiivsete hüpete keskväärtused; q^+ ja q^- kirjeldavad vastavalt positiivsete ja negatiivsete hüpete tõenäosusi, kusjuures $q^+, q^- \geqslant 0,\ q^+ + q^- = 1$.

Sel juhul optsiooni hind on lahendiks nn. osatuletistega integro-

diferentsiaalvõrrandile (PIDE):

$$\begin{aligned} &C_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + (r - \lambda m) S C_S - rC \\ &+ \lambda \int_{-\infty}^{\infty} (C(t, Se^{J'}) - C(t, S))\varpi(J')dJ' = 0, \\ &C(T, S) = \max(S - K, 0), \end{aligned} \tag{10}$$

Seda tüüpi võrrandeid on mugav lahendada, kasutades Fourier' teisendust normaliseeritud alusvara hinna logaritmi $x = \ln \frac{S}{K}$ suhtes. On selge, et Fourier' teisenduse kasutamisel eeldatakse tõkestamata piirkonda muutuja x jaoks: $-\infty < x < \infty$. Seega, kuigi Fourier' teisendus on võimas vahend tõkestamata ülesannete puhul, on seda küllaltki raske rakendada juhul, kui hindamisülesanne (10) on defineeritud tõkestatud piirkonnas.

Vaatleme näitena nn. üles-ja-välja tõkkega ostuoptsiooni, mille väärtus muutub nulliks, kui alusvara hind saavutab optsiooni eluea jooksul ülemise tõkke U. Sel juhul vastava ostuoptsiooni hind rahuldab võrrandit (10) koos rajatingimusega

$$C(t, U) = 0. \tag{11}$$

Vaadeldava optsiooni väärtus on ilmselt väiksem kui vastava tavalise ostuoptsiooni väärtus, kuna juhul, kui alusvara hind optsiooni eluea jooksul puudutab (või ületab) mingil ajahetkel tõket U, siis optsioon muutub väärtusetuks. Seda tüüpi optsioonid on aga teatud aktsepteeritava riskitasemega või võimalike hinnamuutuste osas kindlate ootustega investorite jaoks atraktiivsed, kuna nende hind on madalam kui standardse ostuoptsiooni hind, nõudes seega investeerimiseks vähem vahendeid.

Tõketega optsioonide hindade arvutamist alusvara evolutsiooni kirjeldavate topelt-eksponentsiaalsete hüpetega difusiooniprotsesside korral uuris Sepp [7], kes kasutas Laplace'i teisenduse meetodit selleks, et tuletada analüütilised avaldised ostu- ja müügioptsioonide hindade jaoks nii ühe- kui ka kahepoolsete tõkete korral. Selleks, et anda lugejale ettekujutust leitud lahendite kuju kohta, toome siinkohal ostuoptsiooni hinna Laplace'i teisenduse,

tähistatud kujul $U(p,x)$, kus x on logaritm normaliseeritud hinnast ning p on järelejäänud eluea $\tau = T - t$ suhtes võetud Laplace'i teisenduse muutuja,

$$U(p,x) := \frac{1}{K}\mathcal{L}[C(\tau,x)] = \frac{1}{K}\int_0^\infty C(\tau,x)e^{-p\tau}d\tau, \tag{12}$$

valemi:

$$U(p,x) = \begin{cases} C_0 e^{\psi_0 x} + C_1 e^{\psi_1 x}, x < 0 \\ C_2 e^{\psi_2 x} + C_3 e^{\psi_3 x}\left[\frac{e^x}{p} - \frac{1}{r+p}\right], x \geqslant 0, \end{cases} \tag{13}$$

kus konstandid C_0, C_1, C_2, C_3 on lahendiks süsteemile

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \psi_0 & \psi_1 & -\psi_2 & -\psi_3 \\ \frac{1}{\psi_0\eta^- + 1} & \frac{1}{\psi_1\eta^- + 1} & -\frac{1}{\psi_2\eta^- + 1} & -\frac{1}{\psi_3\eta^- + 1} \\ \frac{1}{\psi_0\eta^+ - 1} & \frac{1}{\psi_1\eta^+ - 1} & -\frac{1}{\psi_2\eta^+ - 1} & -\frac{1}{\psi_3\eta^+ - 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} - \frac{1}{r+p} \\ \frac{1}{p} \\ \frac{1}{p(\eta^- + 1)} - \frac{1}{r+p} \\ \frac{1}{p(\eta^+ - 1)} + \frac{1}{r+p} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

kus $\mu = r - \lambda m - \frac{1}{2}\sigma^2$ ning $\psi_i, i = 0,1,2,3$ on polünoomi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sigma^2\eta^-\eta^+\psi^4 + \left(\mu\eta^-\eta^+ - \frac{1}{2}\sigma^2(\eta^- - \eta^+)\right)\psi^3 \\ &- \left(\frac{1}{2}\sigma^2 + \mu(\eta^- - \eta^+) + (r+p+\lambda)\eta^-\eta^+\right)\psi^2 \\ &+ \left(-\mu + (r+p+\lambda)(\eta^- - \eta^+) - \lambda(q^+\eta^- - q^-\eta^+)\right)\psi + (r+p) \end{aligned} \tag{15}$$

reaalsed juured. Ostuoptsiooni hinna $C(t,S)$ leidmiseks on võimalik kasutada vastava Laplace'i teisenduse $U(p,x)$ numbrilist pööramist, mida on võimalik teha kiirelt ning suure täpsusega. Tõketega ostuoptsiooni hind avaldub sarnaselt, omades ainult mõningaid lisaliikmeid valemis (13).

Lõpuks märgime, et tõketega optsioonide hindamisele sarnased probleemid tekivad Mertoni poolt ([5]) kasutusele võetud nn. laostumise struktuursete mudelite kasutamise korral, kus eeldatakse, et firma väärtuse muutumine on stohhastiline protsess ning laostumine leiab aset siis, kui väärtus kukub ettemääratud tasemeni. Seda tüüpi mudelid on vajalikud selleks, et hinnata võlakirju või teisi väärtpabereid, mille väärtus sõltub väljaandja võimalikust laostumisest. Struktuurimudelite kasutamine toob automaatselt kaasa volatiilsuse naeratuse, kuna nende kohaselt on müügioptsioonid kõrgemalt hinnatud, mida võib vaadelda kui kaitset laostumise vastu juhul, kui aktsiate turuhind langeb peaaegu nullini. Empiirilised andmed toetavad hüpete olemasolu firmaväärtuse protsessi ajalises arengus. Struktuurimudeleid, kus eeldatakse, et firma väärtus on topelt-eksponentsiaaljaotusega hüpetega difusiooniprotsess, on uurinud Sepp ([9]), kes demonstreeris ka seose olemasolu eelmainitud firmaväärtuse protsessi ja selle firma aktsiate Euroopa tüüpi optsioonide hindade vahel.

5. Stohhastiline volatiilsus

Järgmisena vaatleme teist tähtsat Black-Scholes-Mertoni mudeli alternatiivina kasutatavat mudelite klassi, kus eeldatakse, et alusvara volatiilsus on samuti juhuslik. Stohhastilise volatiilsusega mudelid üritavad toime tulla volatiilsuse naeratuse efektiga sel teel, et eeldavad, et alusvara muutlikkus $V(t) = \sigma^2$ on stohhastiline protsess, mis on korreleeritud alusvara hinnaga. Laialdaselt aktsepteeritud mudeliks on nn. ruutjuure protsess (*square root process*), mis võeti kasutusele Hestoni [6] poolt. Selle kohaselt kehtivad võrrandid

$$\begin{cases} dS(t) &= rS(t) + S(t)\sqrt{V(t)}dW(t), \\ dV(t) &= \kappa(\theta - V(t))dt + \varepsilon\sqrt{V(t)}dW^v(t), \end{cases} \tag{16}$$

kus θ on muutlikkuse $V(t)$ keskväärtus, κ on keskmisele lähenemise kiirus (*reversion speed*), ε on muutlikkuse volatiilsus ning ρ on Browni liikumiste $W(t)$ ja $W^v(t)$ vaheline korrelatsioon. Selle

mudeli kehtivuse korral rahuldab ostuoptsiooni hind järgnevat osatuletistega diferentsiaalvõrrandit:

$$\begin{aligned} &C_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + rSC_S + \kappa(\theta - V)C_V + \\ &\frac{1}{2}\varepsilon^2 V C_{VV} + \rho\varepsilon V S C_{SV} - rC = 0, \\ &C(T,S) = \max(S-K,0). \end{aligned} \tag{17}$$

Eeltoodud diferentsiaalvõrrandi lahendamise efektiivseks meetodiks on Fourier' teisenduse kasutamine normaliseeritud hinna $x = \ln \frac{S}{K}$ suhtes. Täpsemalt võib mainitud lahendamise meetodi kohta lugeda artiklist [2]. Käesolevas artiklis toome ainult ära ostuoptsiooni hinna valemi turumudeli (16) kehtimise korral:

$$C(t,S) = S - \frac{Ke^{-\tau r}}{\pi}\int_0^\infty \Re\left[\frac{e^{(-ik+\frac{1}{2})(x+r\tau)+A(\tau,k)+B(\tau,k)V}}{k^2+\frac{1}{4}}\right]dk, \tag{18}$$

kus

$$\begin{aligned} &A(\tau,k) = -\frac{\kappa\theta}{\varepsilon^2}\left[\psi_+\tau + 2\ln\left(\frac{\psi_- + \psi_+ e^{-\zeta\tau}}{2\zeta}\right)\right], \\ &B(\tau,k) = -(k^2+1/4)\frac{1-e^{-\zeta\tau}}{\psi_- + \psi_+ e^{-\zeta\tau}}, \\ &\psi_\pm = \mp(u + ik\rho\varepsilon) + \zeta, \\ &\zeta = \sqrt{(k^2\varepsilon^2(1-\rho^2) + 2ik\rho\varepsilon u + u^2 + \varepsilon^2/4}, \\ &\tau = T - t,\ u = \kappa - \rho\varepsilon/2. \end{aligned}$$

Lõpetuseks märgime, et stohhastilise volatiilsusega mudelid on muutunud äärmiselt tähtsaks seoses realiseerunud alusvara muutlikkusest sõltuvate optsioonide ilmumisega. Hestoni mudeli (16) korral avaldub realiseerunud muutlikus üle perioodi T, tähistatuna kujul $I(T)$, järgnevalt:

$$I(T) = \frac{1}{T}\int_0^T V(t')dt'. \tag{19}$$

On selge, et $I(T)$-st sõltuvate optsioonide hindamiseks on vaja teada tema jaotust. Ka seda probleemi võib rünnata Fourier' teisenduste tehnikat kasutades. Mainitud lähenemist on rakendanud artiklites [8] ja [10].

6. Finantsmatemaatika rakendustest

Kaasajal mängib finantsmatemaatika tähtsat rolli finantsmaailmas, mis nähtub sellest, et suured pangad ja investeerimisfondid palkavad tosinate kaupa PhD kraadiga teadusliku taustaga töötajaid tuletisväärtpaberite hidamise, riski haldamise, erakauplemistehingute (*proprietary trading*) jms. igapäevaste tegevuste teostamiseks. Selliseid töötajaid kutsutakse kõnekeeles kvantideks (*quants*), keda on valdavalt nelja liiki:

1) Kontorikvandid (*desk quants*), kes töötavad otseselt kauplejatega, aidates neil analüüsida spetsiifiliste tehingute hindamise küsimusi ning riskide haldamise võimalusi. Nende töö hõlmab tavaliselt Exceli tabelite ning finantsvarade hindamise tarkvarade ulatuslikku kasutamist.

2) Arenduskvandid, kelle ülesandeks on välja töötada ja rakendada uusi hindamise mudeleid, mida saaksid kasutada kauplejad ja kontorikvandid. See töö eeldab laialdast programmide kirjutamist selleks, et luua kasutamiskõlblikku tarkvara.

3) Riskide haldamise kvandid, kelle ülesandeks on olemasolevate mudelite hindamine ja testimine, samuti broneeritud tehingutega seotud riskide ning ülefirmaliste riskide arvutamine. Selle töö puhul peab oskama kasutada Excelit, andmebaase ning hindade leidmise tarkvara.

4) Erakauplemistehingute kvandid kavandavad ja viivad ellu kauplemisstrateegiaid, mis põhinevad valdavalt aegridade analüüsimisel selleks, et leida turul eksisteerivaid arbitraaživõimalusi.

Sageli võib kvant olla hõlvatud mitmes ülalmainitud valdkonnas.

Järgnevalt kirjeldame lühidalt arenduskvantide põhitegevusi, mida võib jagada kolme laia kategooriasse.

1) Andmetöötlusprobleemid (*data-fitting*), mis sisaldab olemasolevate turuandmete interpoleerimist ja ekstrapoleerimist selleks, et arvutada volatiilsuse maatrikseid, siledaid hoiustamise protsendi kõveraid (*interest yield curves*) jne. Tüüpiline kasutatav matemaatiline aparatuur sisaldab splaine, polünomiaalset interpolatsiooni, vähimruutude meetodit.

2) Hindamismudelite kalibreerimine, mis sisaldab väga likviidsete tuletisväärtpaberite hindamise mudelite väljatöötamist ja realiseerimist ning kasutatavate mudelite parameetrite turuandmete põhjal arvutamise protseduuride loomist. Matemaatilised vahendid sisaldavad analüütiliste hinnavalemite leidmiseks kasutatavaid otseseid ja teisendustel põhinevaid meetodeid. Analüütiliste hinnavalemite olemasolu on sellel etapil väga tähtis, kuna neid tuleb ulatuslikult kasutada mudelite kalibreerimisel (s.t. hindade arvutamise kiirus on äärmiselt oluline). Kalibreerimine hõlmab aga töökindlate optimiseerimismeetodite kasutamist.

3) Eksootiliste finantsinstrumentide hindamine, mis sisaldab töökindlate numbriliste või, harvemini, analüütiliste meetodite väljatöötamist keerulisemate finantsinstrumentide hindade ja hinna tuletiste arvutamiseks. Matemaatilisteks vahenditeks on tüüpiliselt osatuletistega diferentsiaalvõrrandite lahendamine võrgumeetodite või Monte-Carlo meetodi abiga.

Tüüpiline ajajaotus nende erinevate tegevuste vahel on umbes 40% – 40% – 20%. Autori hinnangul on matemaatiliselt kõige suuremat väljakutset pakkuvaks teine kategooria, kuna see nõuab paljude kõrgetasemeliste matemaatiliste meetodite kasutamist keeruliste ülesannete efektiivseks lahendamiseks.

7. Kokkuvõte

Eelnevas on toodud lühike ülevaade finantsmatemaatika arengust pärast Black-Scholes-Mertoni fundamentaalseid artikleid ([1],[4]), pöörates põhitähelepanu hüpetega difusiooniprotsesside ning stohhastilise volatiilsusega mudelite kasutamisele alusvara hinna käitumise modelleerimisel. Samuti on antud põgus kirjeldus matemaati-

liste vahendite spektrist, mida kasutatakse praktikas finantsmatemaatikaga seotud ülesannete lahendamisel.

Kirjandus

1. F. Black, M. Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy **81** (1973), 637-659.

2. R. Kangro, K. Pärna, A. Sepp, *Pricing European-style options under jump diffusion processes with stochastic volatility: applications of Fourier transform*, Acta Comment. Univ. Tartuensis Math. **8** (2004), 123-133.

3. S. Kou, *A jump diffusion model for option pricing*, Management Science **48** (2002), 1086–1101.

4. R. Merton, *Theory of rational option pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science **4** (1) (1973), 141-183.

5. R. Merton, *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*, Journal of Financial Economics **3** (1976), 125-144.

6. S. Heston, *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*, Review of Financial Studies **6** (1993), 327-343.

7. A. Sepp, *Analytical pricing of double-barrier options under a double-exponential jump diffusion process: applications of Laplace transform*, International Journal of Theoretical and Applied Finance **2** (2004), 151-175.

8. A. Sepp, *Pricing options on realized volatility in Heston model with volatility jumps*, trükki suunatud.

9. A. Sepp, *Extended credit grades model with stochastic volatility and jumps*, Wilmott Magazine, trükki vastu võetud.

10. A. Sepp, *Var swaps under no conditions*, Risk, trükki vastu võetud.

GPS ja meteoroloogia ning natuke matemaatikast selles [2]

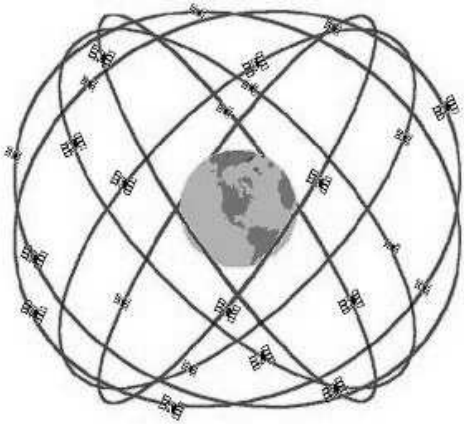
Peep Uba
Kaitseväe Ühendatud Õppeasutused

Globaalne positsioneerimine

GPS (globaalse positsioneerimise süsteem, *Global Positioning System*) on ülemaailmne ööpäevaringselt toimiv kohamäärangu süsteem, mis võimaldab asukoha koordinaate määrata kuni millimeetri täpsusega. GPS on loodud USA Kaitseministeeriumi poolt täitmaks USA Kaitsejõudude vajadusi navigatsiooniks, asukoha määramiseks ja täpse aja fikseerimiseks. GPS satelliitide konstellatsiooni kuulub vähemalt 24 pidevalt raadiosignaale väljastavat tehiskaaslast ja süsteem funktsioneerib alates 1978. aastast [14]. Satelliitide keskmine kõrgus maapinnast on 20200 kilomeetrit, need tiirlevad ümber Maa kuuel orbitaaltasandil, vähemalt neli satelliiti igal ja kõikide orbitaaltasandite kalle ekvatoriaaltasandi suhtes on 55° (vt. joonis 1[3]). Satelliitide tiirlemisperiood on 11 tundi 58 minutit.

[2] Eesti Matemaatika Seltsi päevadel 26. juunil 2006 peetud ettekande põhjal

[3] Joonise 1 juures on kasutatud P.H. Dana internetiõpikust (`http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps_f.html`, 20. jaan. 2007) võetud illustratsiooni.



Joonis 1. GPS-satelliidid

Niisugune satelliitide paiknemine võimaldab üle maailma igal ajal vähemalt nelja satelliidi nähtavuse alates elevatsiooninurgast 15°. Iga satelliit lähetab signaale kandevsagedusel L1 (1575,42 MHz) lainepikkusega 19 cm ja L2 (1227,6 MHz) lainepikkusega 24 cm. Kandevlainele on moduleeritud kaks pseudojuhuslikku signaali, nn C/A (*Coarse/Acquisition*) ja P (*Precise*) koodid ning satelliitide trajektoori andmed. Signaalide stabiilsus kindlustatakse satelliitidel asuvate tseesium- ja rubiidiumkellade abil.

GPS-süsteem koosneb kolmest osast – satelliidid, tugijaamade võrk ja kasutajad [8]. Kogu süsteemi hoiavad töökorras 5 tugijaama, mis asuvad Colorado Springsis, Havail, Ascensioni saarel, Diego Carcias ja Kwajaleinis. Need jaamad on sisuliselt GPS-vastuvõtjad, mis koguvad informatsiooni kõikidelt nähtaval olevatelt satelliitidelt ja seejärel saadavad need andmed keskjaama, mis asub Falconi Õhujõudude baasis Colorado Springsis. Saadud informatsiooni põhjal arvutatakse parandused satelliitide efemeriididele ja kelladele. Selle info abil uuendatakse satelliitide trajektooride ja aja parameetreid paar korda päevas.

Vastuvõtjate geograafilise asendi määramise aluseks on satelliidilt vastuvõtjani jõudnud signaali kulgemisaja, geodeetilise täpsuse saavutamiseks ka kandesageduse faasinihke võimalikult

täpne mõõtmine.

GPS-vasutuvõtja võtab vastu satelliitide signaale ja määrab nende abil oma asukoha 2D või 3D koordinaatide süsteemis. Põhimõtteliselt on iga hetk võimalik selleks kasutada vähemalt kuut satelliiti. 3D kohamääranguks on vaja vähemalt nelja satelliidi nähtavus. Maksimaalselt on nähtaval 12 satelliiti ja paremad vastuvõtjad suudavad neid kõiki ka jälgida.

Vastuvõtjad jagunevad ühe- ja kahesageduslikeks. Ühesageduslikud kasutavad L1 ja harilikult ainult C/A koodi. Kahesageduslikud vaatlevad nii L1 kui L2 faaside vahesid, C/A ja P koodi ning signaalide Doppleri nihet.

GPS-positsioneerimine

GPS-positsioneerimisel on esmalt vaja kokku leppida koordinaatsüsteem. Selleks on valitud nn. WGS 84 (*World Geodetic System 84*) ja see baseerub ECEF (*earth-centered, earth-fixed*) ristkoordinaadistikul, kus algpunktiks on maakera masskese, z-telg kulgeb läbi põhjapooluse (CTP – *Conventional Terrestial Pole*) ning ekvatoriaaltasapinnal olev x-telg läbib keskpunkti ja nullmeridiaani. y-telje suund valitakse parema käe reegli alusel (vt. [1], [14], [15], aga samuti [17]). Koordinaatsüsteem WGS 84 määrab lisaks ristkoordinaatidele tähtsamate parameetritena veel maakera kui ideaalse ellipsoidi poolteljed, pöörlemise nurkkiiruse, külgetõmbejõu (gravitatsiooni) konstandi ning näidatakse arvutustes kasutatava valguse kiiruse väärtus vaakumis. Viimati täpsustati WGS 84 parameetreid 2004. aastal [18].

Nendes koordinaatides on vastuvõtja asukoht määratud kolme parameetriga (x, y, z), kuid nende leidmiseks on vajalik vähemalt nelja satelliidi samaaegne nähtavus. Probleemiks on, et vastuvõtjas olev kell pole tõenäoselt piisavalt täpne võrreldes satelliitide ülitäpsete kelladega ning sellest tulenevalt tekib täiendav tundmatu ehk kellaaja erinevus Δt, mis samuti arvatakse otsitavaks parameetriks.

Lihtsustatud käsitlus GPS-vastuvõtja asukoha määramiseks on

seega vähemalt nelja mittelineaarset võrrandit sisaldava süsteemi

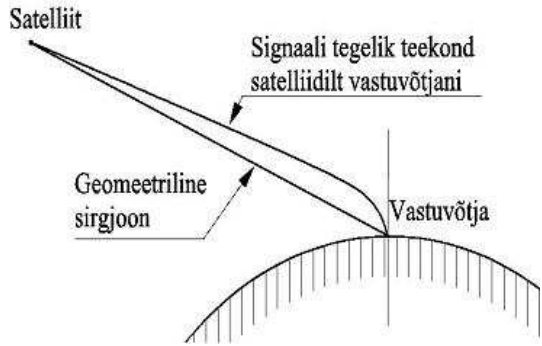
$$\left(x - X^k\right)^2 + \left(y - Y^k\right)^2 + \left(z - Z^k\right)^2 = \left(\rho^k - c \cdot \Delta t\right)^2 \qquad (20)$$

lahendamine, kus $k = 1, \ldots, m$, ja m on korraga nähtavate satelliitide arv ($m \geqslant 4$). Suurused X^k, Y^k, Z^k tähistavad konkreetse satelliidi asukoha koordinaate, c on valguse kiirus, Δt vastuvõtja otsitav parandus kellaajale ning ρ^k – nn. pseudokaugus konkreetsest saatjast vastuvõtjani. Pseudokauguse ρ^k leidmiseks on igas konkreetses vastuvõtjas realiseeritud meetod, mis põhineb raadiolainete leviku teoorial ja mille kirjeldusi võib leida töödes [1], [12] ning neis toodud viidetes.

Selle mittelineaarse võrrandissüsteemi (20) lahendamiseks on võimalusi palju ja reeglina GPS-vastuvõtjate tootjad konkreetses seadmes kasutatavat ei afišeeri, märgitakse vaid võimalike nähtavate satelliitide arvu (kuni 12), mida positsioneerimiseks on võimalik kasutada. GPS-alases kirjanduses on siiski mainitud ka arvutusmatemaatikas tuntud meetodeid, mida on mõttekas kasutada. Näiteks vähimruutude meetod või Newton-Raphsoni meetod [12]. Samuti on mainitud, et Kálmán'i filtrit kasutades on võimalik asukoha määramist oluliselt täpsustada [1].

Ionosfääri ja troposfääri häired

Oma teekonnal satelliidist vastuvõtjani läbib raadiokiir maakera ümbritsevat troposfääri (atmosfääri osa, mis ulatub merepinnast kõrguseni 9–17 kilomeetrit vastavalt kas poolustel või ekvatoriaalaladel) ja ionosfääri (atmosfääri osa troposfääri kohal kuni tuhande kilomeetri kõrguseni) ning need mõlemad avaldavad oma mõju nn. hilistumise näol. Sisuliselt tähendab see, et raadiokiir läbib mitmesuguste murdumiste (refraktsiooni) tõttu otseteest erineva teekonna (vt. joonis 2).



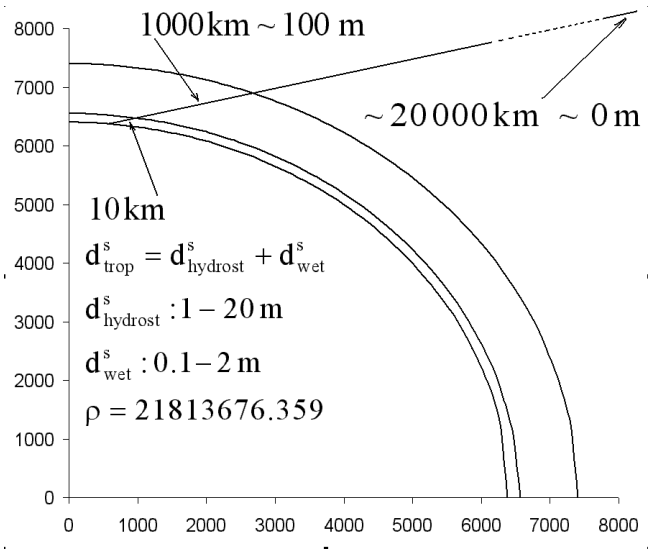
Joonis 2. Raadiosignaali tee atmosfääris.

Hilistumist troposfääris nimetatakse GPS-alases kirjanduses sageli troposfääriliseks hilistumiseks [1]. Päikesekiirgusest tingitud ionisatsioon ionosfääris tingib nn. ionosfäärilise refraktsiooni, millega samuti kaasneb vastav signaali hilistumine. Troposfääris avaldavad signaali levikule mõju peamiselt temperatuur, õhurõhk ja atmosfääris sisalduv vesi.

Ionosfäärist tingitud häirituse praktiliselt täielikuks kõrvaldamiseks on teada meetodid, mis tuginevad kahesageduslike vastuvõtjate kasutamisele ja asjaolule, et GPS-navigatsiooni sagedustel erinevate sagedustega kiired läbivad ionosfääri erinevate kiirustega. Sellest tuleneb, et satelliidist samaaegselt lähtuvatele L1 ja L2 sagedustega raadiosignaalidele on ionosfääri mõju erinev. Sõltuvalt satelliidi asendist horisondi suhtes (kaldenurgast) võib ionosfäärist tingitud raadiokiire teekonna pikkus osutuda ca 100 meetrit pikemaks võrreldes geomeetrilise sirgjoonega. Kahesageduslikes GPS-vastuvõtjates on realiseeritud L1 ja L2 signaalide kombinatsioon selliselt, et minimeerida ionosfääri poolt tekitatud taoline häire. Murdumisnäitaja ionosfääris võib avaldada mitmel erineval viisil (vt. näiteks [9]), üks võimalikke viise on paranduse $d\rho_{ion} \approx \frac{f_2^2}{f_2^2-f_1^2}(\rho_{L_1} - \rho_{l_2})$ kasutamine ionosfääris tekkiva häire elimineerimiseks pseudokauguse ρ_{L_1} leidmisel. Siin f_1 ja f_2 on vastavalt L1 ja L2 sagedused. Märgime, et antud sageduste korral $\frac{f_2^2}{f_2^2-f_1^2} \approx -1,54572778$.

Troposfäär seevastu on mittedispersiivne – siin signaali faasikiirus keskkonnast ei sõltu ja sellest tulenevalt erinevate sageduste mõõtmistulemusi kombineerides pole võimalik troposfäärist põhjustatud hilinemist elimineerida.

Troposfäärihilistumine jagatakse kaheks komponendiks: hüdrostaatiliseks ehk "kuivaks" (*dry*) ja "märjaks" (*wet*). Hüdrostaatiline osa põhjustab umbes 90% kogu troposfääris tekkivast hilistumisest ja märg osa ca 10%, kokku umbes 1–20m ([1], [4], [15]). Neid hilistumisi tähistatakse vastavalt d^s_{hydro} ja d^s_{wet} ning kogu hilistumine troposfääris avaldub kujul $d^s_{trop} = d^s_{hydro} + d^s_{wet}$. Ülaindeks s (sõnast *slant* – kaldu) märgib siin, et hilistumist vaadeldakse piki kiirt.



Joonis 3. Hilistumised atmosfääris.

Kõrvaloleval joonisel 3 on kujutatud hilistumise tekkekohad ionosfääris ja troposfääris. Näitena on esitatud üks võimalik satelliidi ja vastuvõtja vaheline pseudokaugus ρ meetrites.

Niiskuse mudelid

Nagu eespool märgitud, GPS-vastuvõtjani jõudnud raadiosignaali teekonna pikenemine on põhjustatud nii ionosfääri kui troposfääri poolt ja ionosfääri osa kogu selles hilistumises on võimalik täpselt fikseerida ning seega ka elimineerida. Troposfääri poolt tekitatud hilistumise raskestimääratavaks komponendiks osutub märg komponent, kuna kuiva osa saab rahuldavalt modelleerida ja elimineerida[4] Siit on tekkinud idee, et kui vastuvõtjate asukohad on fikseeritud, siis peaks olema võimalik peaaegu reaalajas (*near-real time*) määrata lisaks pseudokaugusele ka otsekaugus vastuvõtjast iga satelliidini ning nende kauguste vahe. Viimasest omakorda arvutada välja sellel teekonnal läbitud niiskuse hulk (vt. [1], [2], [11], [13], [15] ja kirjandus nendes).

Valem troposfäärilise hilistumise arvutamiseks on üldkujul järgmine [8]:

$$d^{trop} = \int n \cdot ds - \int ds = \int (n-1) ds\,, \tag{1}$$

kus $n(s)$ tähistab atmosfääri refraktsiooniindeksit kiire teel. Integreeritakse üle teepikkuse vastuvõtjast ionosfäärini ning murdumisnäitaja n asemel kasutatakse suurust[5] $N^{trop} = 10^6(n-1)$, mida sageli nimetatakse lihtsalt refraktsiooniks.

Valem (1) avaldub nüüd kujul

$$d^{trop} = 10^{-6} \int N^{trop} ds. \tag{2}$$

Jaotades refraktsioonist tingitud hilistumise kaheks komponendiks, kuivaks (hüdrostaatiliseks, *dry*) ja märjaks (*wet*), saab troposfäärist tingitud hilistumise avaldada kujul

$$d^{trop} = 10^{-6} \int N^{trop}_{hydro} ds + 10^{-6} \int N^{trop}_{wet} ds. \tag{3}$$

[4]Märgime, et raadiosignaali teekonna pikkuse määramist häirivad lisaks mainitule veel mitmesugused võimalikud peegeldused, ebatäpsused ajaarvestuses jms., mis siiski on suurusjärgu võrra väiksemad kui troposfääri poolt põhjustatu.

[5]Kuna atmosfääris on $(n-1)$ arvväärtus ligikaudu 10^{-6}, siis on see otstarbekas 10^6-ga läbi korrutada. N varieerub vahemikus $0, \ldots, 300$.

Siin on kasutatud asjaolu, et refraktsiooni konstandi N^{trop} saab avaldada hüdrostaatilise ja märja osa summana, milles sisalduvad konstandid määratakse katseliselt (ülevaate leiab artiklist [15]) ja mille väärtused sõltuvad konkreetsest geograafilisest asukohast. Näiteks on üks selline valem

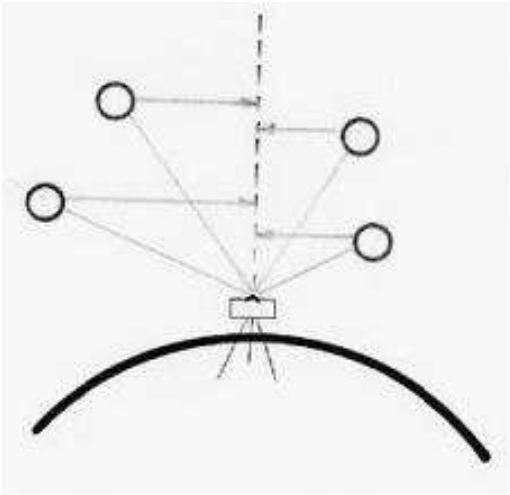
$$N^{trop} = \underbrace{77{,}6\frac{P}{T}}_{hüdrostaatiline} + \underbrace{3{,}73 \cdot 10^5 \frac{e}{T^2}}_{märg},$$

kus P tähistab õhurõhku maapinnal, T temperatuuri ja e veeauru osarõhku. On ka teisi arvutuseeskirju (vt. [8], [13]). Kokkuvõtvalt saab öelda, et kuivast atmosfäärist tingitud hilistumisele on võimalik saada hinnang täpsusega kuni 1 mm, kui rõhk maapinnal on mõõdetud täpsusega 0,3 mb (vt. [2]). Märjast komponendist tingitud hilistumist nii täpselt hinnata ei suudeta, see varieerub tugevalt, ulatudes mõnest millimeetrist polaaraladel kuni 40 sentimeetrini troopikas.

Taoline jagamine kuivaks ja märjaks hilistumiseks tuleneb peamiselt sellest, et troposfäärilise hilistumise kuiv osa on võrdlemisi täpselt kirjeldatav mitmesuguste matemaatiliste mudelitega (Hopfield, Saastamoinen, Niell, jt. mudelid, ülevaade on toodud nt. [15]) ja see moodustab kogu troposfäärilisest hilistumisest ligikaudu 90%. Märja komponendi hindamine mudeli abil on aga komplitseeritud. Probleemiks on mõõteandmete puudus ja troposfääri ebastabiilsus (troposfääri turbulents, millega kaasneb erineva niiskuse ja temperatuuriga õhumasside kiire segunemine või vahetumine).

Kirjanduses (nt. [1], [15]) kohtame sageli mõisteid ZTD (*Zenith Total Delay*) ja STD (*Slant Total Delay*), mille eestikeelsed seletused oleksid vastavalt vaatluspunktis seniiti projitseeritud summaarne hilistumine ja signaali hilistumine reaalsel (kald)teel vastuvõtja antennist konkreetse GPS-satelliidini (vt. joonis 4). Ilmaennustuse ja monitooringu seisukohalt on seni enam kasutatud esimest varianti, mis võimaldab avaldada integraalse karakteristiku – sadestatava vee hulga konkreetse vaatluspunkti kohal, eeldades seejuures homogeenset atmosfääri. Selline eeldus ei anna ettekujutust veeauru sisalduse ruumilise jaotuse kohta, kuid omab suurt

tähtsust lühiajalise ilmaprognoosi koostamisel ja on ka teatud määral traditsiooniline mõõtmisviis, mille analoogiks võib pidada meteosondide kasutamist.



Joonis 4. Hilistumiste projitseerimine.

Nagu troposfääri kogu niiskus on käsitletav kahest komponendist koosnevana, nii jaguneb ka seniiti projitseeritud hilistumine kaheks osaks, hüdrostaatilise (kuiva) ja märja niiskuse poolt põhjustatuks: $ZTD = d^z_{hydro} + d^z_{wet}$. Ilmaennustustes on eriti oluline teada nn. sadestatava vee (PWV – *Precipitable Water Vapour*) hulka, mille saamiseks on tuletatud valem $PWV = \Pi \cdot d^z_{wet}$, kus Π on nn. konversatsiooni kordaja, mis on suurusjärku 0,15 ja mille täpsem väärtus sõltub geograafilisest asukohast ja tuleb määrata katseliselt [1]. See konstant tähendab sisuliselt, et 1 mm sadestatavat vett atmosfääris põhjustab raadiokiire hilistumist ca 6,5 mm.

Kokkuvõtvalt saame öelda: selleks, et modelleerida (hinnata) atmosfääri kuiva osa mõju troposfäärilisele hilistumisele, tuleb mõõta maapinnal rõhk ja temperatuur. Märja komponendi leidmiseks on lisaks temperatuurile ja õhurõhule vaja mõõta suhtelist õhuniiskust vaatluspunktis.

Signaali hilistumine sõltub tugevalt raadiokiire kaldenurgast

ja kasvab märkimisväärselt nurga muutudes seniidist horisondile. Navigatsiooni ja geodeetiliste mõõtmiste seisukohalt on siinjuures tegemist ebamugava asjaoluga, sest horisondile lähemal paistvate satelliitide signaal on atmosfäärist oluliselt tugevamini häiritud. GPS-meteoroloogia seisukohast on efekt aga vastupidine – horisondi suhtes madalamate satelliitide signaal läbib oma teel märkimisväärselt suuremat osa atmosfäärist, sisaldades ühtlasi rohkem detekteeritavat meteoinfot. Soovituslikult ei kasutata navigatsioonis vaatluste tegemiseks vähem kui 15 nurgakraadi võrra horisondi suhtes madalamal paistvaid satelliite. Praktilist laadi piirangud tekivad ka GPS-meteoroloogias. Kirjandusest leiab aga ka viiteid vaatlusnurkade kohta alates kahest tõusukraadist horisondi suhtes [6]. Hilistumine troposfääris kasvab sõltuvalt nurgast ε seniidi suhtes võrdeliselt funktsiooniga $\frac{1}{\cos\varepsilon}$.

Seniidisuunale projitseeritud hilistumise ja raadiokiire otseteel (kaldteel) kujuneva hilistumise kohta on leitud järgmine seos

$$d_{trop}^{slant} = m_{hydro}(\varepsilon) \cdot d_{hydro}^{z} + m_{wet}(\varepsilon) \cdot d_{wet}^{z},$$

milles osalevaid tegureid on erinevate autorite poolt otsitud ja tuletatud erinevalt, ülevaate erinevatest mudelitest võib saada nt. töös [13]. Selles on ühena paljudest kirjeldatud nn. Saastamoineni mudelit, milles

$$d_{hydro}^{z} = \frac{0{,}002277 \cdot P}{1 - 0{,}0026 \cdot \cos 2\varphi - 0{,}00000028 \cdot H}$$

ja

$$d_{wet}^{z} = 0{,}002277 \left(\frac{1255}{T} + 0{,}05 \right) \cdot e,$$

kus H tähendab kõrgust merepinnalt ja φ vaatluspunkti laiuskraadi. P ja T on vastavalt õhurõhk (mB) ja absoluutne temperatuur ning e veeauru osarõhk. Mudelite koostamisel ja kontrollimisel on olulised ka funktsioonid $m_{hydro}(\varepsilon)$ ja $m_{wet}(\varepsilon)$. Illustreerimaks nende võimalikku kuju, toome siinkohal ühe teise mudeli, nn. Neilli mudeli

näite, kus $m_{hydro}(\varepsilon)$ avaldub kujul

$$m_{hydro} = \frac{\frac{1}{1+\frac{a_{hydro}}{1+\frac{b_{hydro}}{1+c_{hydro}}}}}{\frac{1}{\sin\varepsilon+\frac{a_{hydro}}{\sin\varepsilon+\frac{b_{hydro}}{\sin\varepsilon+c_{hydro}}}}} + \left(\frac{1}{\sin\varepsilon} - \frac{\frac{1}{1+\frac{a_{ht}}{1+\frac{b_{ht}}{1+c_{ht}}}}}{\frac{1}{\sin\varepsilon+\frac{a_{ht}}{\sin\varepsilon+\frac{b_{ht}}{\sin\varepsilon+c_{ht}}}}}\right) \times \frac{H}{1000}$$

ja $m_{wet}(\varepsilon)$ on leitav valemiga

$$m_{wet} = \frac{\frac{1}{1+\frac{a_{wet}}{1+\frac{b_{wet}}{1+c_{wet}}}}}{\frac{1}{\sin\varepsilon+\frac{a_{wet}}{\sin\varepsilon+\frac{b_{wet}}{\sin\varepsilon+c_{wet}}}}}.$$

Siin ε on raadiokiire elevatsiooninurk, erinevate alaindeksitega koefitsiendid a, b, c sõltuvad laiuskraadist, mõõtmispunkti kõrgusest merepinnast, samuti päevast aastas. Väidetavalt olevat see mudel täpseim laiuskraadidel 43°N – 75°N. (Eesti asub vahemikus 57,5°N – 59,7°N.)

Veeauru ruumiline detekteerimine

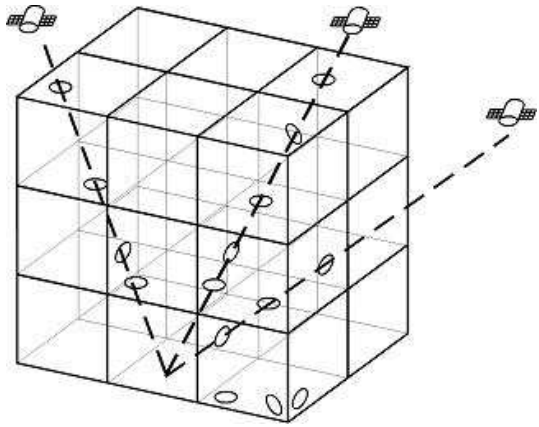
Nagu juba märgitud, on sadestatava vee hulga (PWV) määramisel GPS seadmetega võimalik saavutada täpsus 2mm [1]. Teadlasi on aga hakanud huvitama, kuidas kasutada GPS-seadmeid, et saada niiskuse ruumilist jaotust teatud troposfääri osas. Viitame siinjuures artiklitele [7],[10], [11], millest leiab ka viiteid varemilmunu kohta.

Kokkuvõtvalt on põhiidee siinjuures selles, et ühtsesse süsteemi ühendatakse palju vastuvõtjaid, mille täpsed asukohad leitakse. Need vastuvõtjad võivad hõlmata mitmesaja ruutkilomeetrise piirkonna. Selle kohal olev atmosfäär jaotatakse kuni nõutava kõrguseni virtuaalseteks risttahukateks ehk vokseliteks (vt. joonis 5), s.t. diskretiseeritakse.

Kirjanduse põhjal on teada (vt. eespool toodud viiteid), et vastuvõtjate omavaheliseks kauguseks sellise võrgustiku puhul on

soovitav võtta 10–40 kilomeetrit ja et oluline osa troposfääri niiskusest paikneb maapinnast 7–10 km kõrguseni. Veeauru detekteerimiseks võetakse vaatluse alla kõik signaalikiired (need kiired, mis konkreetsel ajahetkel on vaatlusteks/navigatsiooniks piisava kvaliteediga), mis kulgevad igast võrgustikus nähtavast satelliidist igasse vastuvõtjasse. Nende kiirte koguarvuks on $n \cdot m$, kus n tähistab nõutud ajahetkel nähtavate satelliitide arvu ja m vastuvõtjate arvu.

Iga raadiokiir satelliidist vastuvõtjani läbib oma teel teatud hulga vokseleid ja igas vokselis sisalduv niiskus annab oma osa raadiokiire teekonna pikenemiseks. Nõnda tekkinud teekonna osalõikudest moodustub raadiokiire summaarne teekond.



Joonis 5. Kiirte kulgemine ja vokseliteks jaotus.

Otsetee ja niiskusest tingitud pikema teekonna erinevus sisuliselt iseloomustab raadiokiire teel olevat niiskuse koguhulka ja on suurus, mis tuleb jagada nende vokselite vahel, mida vastav kiir läbib. Sisuliselt tekib matemaatiline ülesanne, mis on oma olemuselt lineaarne võrrandisüsteem $\sum_{i=1}^{v} x_i \cdot s_{i,j} = f_j$ ja mille lahendit interpreteeritakse kui sadestuva niiskuse hulka vokselites.

Võrrandisüsteemis $j = 1, \ldots, K$, kus K on nähtavatest satelliitidest vastuvõtjaisse suunduvate raadiokiirte koguarv fikseeritud ajahetkel, v – vokselite koguarv, $s_{i,j}$ – j-nda kiire teepikkus vokselis

i. Selle võrrandisüsteemi lahend $x_i, i = 1, \ldots, v$, iseloomustab seda, kui suur on raadiokiire hilistumine igas vokselis. Iga hilistumine on aluseks sadestatava vee hulga arvutamisel, milleks võib kasutada erinevaid mudeleid.

Meteoalaseid arendustegevusi

Mitmel pool maailmas on hakatud GPS-püsijaamu süstemaatiliselt kasutama meteoandmete hankimiseks ja vastavasisuliste uuringute läbiviimiseks. Toome vaid mõned näited.

NOAA (National Oceanic and Atmospheric Agency) USA-s kasutab neid lühiajaliste ilmaprognooside täpsustamiseks. Sisuliselt 200 jaama üle kogu riigi koguvad ja töötlevad andmeid. USA ülikoolide algatusel on loodud eri riikide ülikoolides üle maailma tugijaamade võrk, ca 100 jaama, mille nimeks on SUOMINET ja mille esmaülesanne on uurimistöö [16].

Jaapanis käivitati 1997. aastal projekt GPS/MET-Japan, et kasutada ära eksisteerivaid geodeetide poolt paigaldatud GPS-püsijaamu. Kogu riik on kaetud enam-vähem ühtlaselt jaamadega, mille kaugused üksteisest on ligikaudu 30 km ja meteoroloogid kasutavad saadud andmeid sadestatava veehulga määramiseks [5].

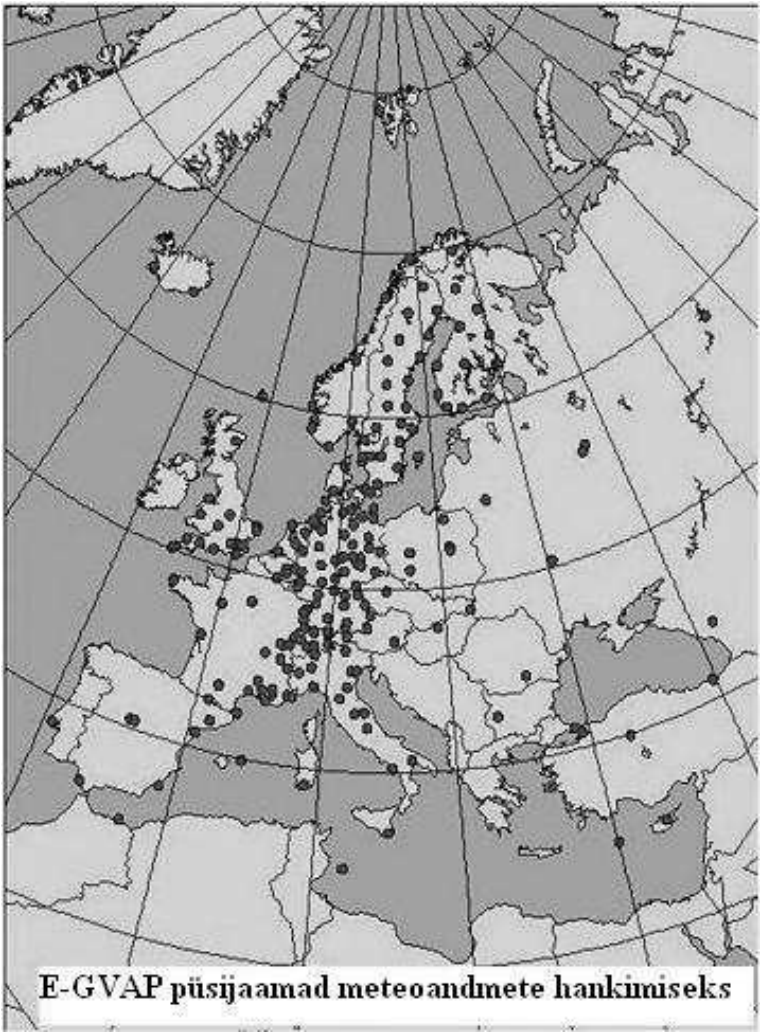
Ka Saksamaal on vastav üleriigiline süsteem loodud, märgitakse umbes 200 jaama olemasolu 50 kilomeetriste intervallidega.

Euroopa 21 riigi meteoroloogid (EUMETNET) on käivitanud 2005. aasta aprillis nelja-aastase uurimis- ja arendusprojekti koodnimetusega E-GVAP, et koos geodeetidega töötada välja ja luua süsteem atmosfääri veeauru mõõtmisteks GPS-seadmeid kasutades [3]. Mainitud on, et juba üle 400 GPS-püsijaama saadavad regulaarselt tunniajase intervalliga mõõdetud andmeid Suurbritannia meteoroloogiateenistusse (UK Met Office), kus neid seejärel töödeldakse, esialgu küll veel teaduslikel eesmärkidel.

Klimatoloogide ja meteoroloogide poolt on pikaajaliselt välja arendatud andmete kogumise ja töötlemise süsteemid, mis eeldavad teatud kvaliteeti, andmete homogeensust ja stabiilsust, aga samuti protseduure probleemsetest olukordadest väljatulekuks. E-GVAP on seadnud endale ülesandeks viia GPS-signaalide hilistumistest

saadav info vastavusse mainitud tingimustega.

Kuna aga nii kuiv õhk kui ka atmosfääris leiduv veeaur mõjutavad geodeetiliste mõõtmiste täpsust, on geodeetidel oluline teada hetkeolukorra niiskuse jaotust ja/või ilmastiku mõju. E-GVAP projekt on ka sellealase arendustegevuse ja koostöövõimaluse oma plaanidesse lülitanud.



Nagu ülaltoodud kaardilt (mille puhul on kasutatud kodulehel [3] leiduvat skeemi) näha, pole Eesti E-GVAP projektiga veel ühinenud. GPS-navigeerimissüsteemi võimalustega meteoalasteks teadusuuringuteks on alles asutud tutvuma. Üheks esimeseks katseks GPS-alases meteoroloogias võib pidada tööd [11], mis kujutab endast eelkõige valdkonna probleemidesse sisseelamist. Sellega on Eesti teadlased alustanud tööd, et saada E-GVAP projekti võrdväärseks partneriks ja jõuda järele teiste uurijate poolt paarikümne aasta jooksul tehtule.

Kirjandus

1. M. Bevis, S. Businger, S. Chiswell, T.A. Herring, R.A. Anthes, C. Rocken, R.H. Ware, *GPS Meteorology: Remote sensing of atmospheric water vapor using the Global Positioning System*, J. Geophys. Res. **97** (1992), 787–801.

2. J.P. Duan, M. Bevis, P. Fang, Y. Bock, S. Chiswill, S. Businger, C. Rocken, F. Solheim, T. van Hove, R. Ware, S. McClusky, T.A. Herring, R.W. King, *GPS Meteorology: Direct estimation of the absolute value of precipitable water*, Journal of Applied Meteorology **35** (1996), 830-838.

3. E-GVAP project. `http://egvap.dmi.dk/` (15.02.2007)

4. R. Eresmaa, H. Järvinen, *An observation operator for ground based GPS slant delays*, Tellus A **58** (2006), 131–140.

5. GPS/MET-Japan. `http://dbx.cr.chiba-u.jp/gps_met/gpsmet/index.html` (15.02.2007)

6. J. Guo, R.B. Langley, *A new tropospheric propagation delay mapping function for elevation angles down to 2 deg*, Proceedings of ION GPS/GNSS 2003, 16th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation, Portland, OR, 9-12 September 2003, 386–396.

7. K. Hirahara. *Local GPS tropospheric tomografy*, Earth Planets Space **52** (2000), 935-939.

8. B. Hofmann-Wellenhof, L. Lichtenegger, J. Collins, *GPS: Theory and Practice*, Wien – New York: Springer, 2001.

9. J. Klobuchar, *Ionospheric effects in GPS*, Global Positioning System: Theory and applications, Vol. I, Chapter 12. 1996.

10. A. MacDonald, Y. Xie, R. Ware, *Diagnosis of three dimensional water vapor using slant observations from a GPS network*, Monthly Weather Review **130** (2002), 386–397.

11. P. Miidla, K. Rannat, P. Uba, *Simulation of the tropospheric water vapor distribution monitoring*, Proceedings of the I3M International Mediterranean Modelling Multiconference, Marseilles, France, October 20-22, 2005, EMSS 2005, 223–228.

12. P. Misra, P. Enge, *Global Positioning System. Signals, Measurements, and Performance*, Ganga-Jamuna Press, 2001.

13. T. Nilsson, *Assessment of tomographic methods for estimation of atmospheric water vapor using ground-based GPS*, Thesis for the degree of Licentiate of Engineering. Chalmers University of Technology, 2005.

14. B.W. Parkinson, J.J. Spilker, *Global Positioning System: Theory and Applications* Vol 1, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996.

15. S.M Shrestha, *Investigations into the Estimation of Tropospheric Delay and Wet Refractivity Using GPS Measurements*, A Thesis in partial fulfilment of the requirements for the degree of master of science. Calgary, Alberta, 2003.

16. SUOMINET. `http://www.unidata.ucar.edu /data/suominet` (15.02.2007).

17. WGS84. `http://www.geo.ut.ee/~raivo/bursa.html` (15.022007).

18. World Geodetic System. `http://en.wikipedia.org /wiki/World_Geodetic_System` (15.02.2007).

MATEMAATIKUD

Jüri Afanasjev 60

8. märtsil 2006. aastal jõudis soliidse tähiseni TÜ matemaatika didaktika dotsent Jüri Afanasjev.

Omandanud keskhariduse 1964. aastal Kohila Keskkoolis, töötas ta 2 aastat matemaatikaõpetajana Härglas ja Kohilas õppides samal ajal ka kaugõppes Tartu Riiklikus Ülikoolis. Pea kaks kolmandikku juubilari elust ongi olnud seotud Tartu (Riikliku) Ülikooliga kas õppurina või õppejõuna. Lõpetanud Tartu Riikliku Ülikooli 1970. aastal matemaatiku-matemaatikaõpetaja kvalifikatsiooniga, alustas J. Afanasjev samal aastal oma teadustegevust õpilaste teadmiste taseme, matemaatikakursuse omandatuse ja selle ühe olulisema mõjuteguri – ülesannete raskuse – uurimisega juba aspirandina dotsent Olaf Prinitsa juhendamisel. Pingsa töö tulemusena valmis neli aastat hiljem kandidaadidissertatsioon "Koolimatemaatika kursuse omandatuse uurimine", mille eduka kaitsmise tulemusena sai temast pedagoogikakandidaat 1975. aastal.

Kuigi dotsent Jüri Afanasjevi huvide spekter on olnud lai, on teadustegevuse pealiiniks senini jäänud matemaaatika didaktikaga seotud küsimused. Ta oli üks esimesi didaktikuid Eestis, kes asus otsima võimalusi matemaatika õpetamiseks nii tasku- kui ka personaalarvutite toel. Sellealase töö loogilise tulemina valmisid teadusartiklid, matemaatikaõpikute peatükid ja töövihikud ning vajalikud metoodilised juhendid õpetajatele. Samas vallas valmis tema juhendamisel ka Eno Tõnissoni magistritöö. Eesti kooli ja majandushariduse jaoks on olnud olulised Jüri Afanasjevi ja Aita Raudsepa poolt koostatud õppevahendid majandusmatemaatika elementide õpetamiseks üldhariduskoolis arvutitoetusel.

Koostöös kolleegidega Soome ja Inglismaa ülikoolidest on Jüri Afanasjevil just viimastel aastatel valminud mitmed rahvusvahelised võrdlevad uurimused nn. Exeter-Kasseli projekti raames koolimatemaatika kursuse jõukohasuse ja omandatuse kohta erinevates maades. Praegu on käimas pikaajaline rahvusvaheline projekt (IPMA) esimese kooliastme õpilaste matemaatika-alase edenemise uurimiseks.

Säilitamaks sidet teooria ja praktika vahel, on Jüri Afanasjev aeg-ajalt ka ise klassi ette astunud ja õpetaja leiba maitsenud. Saadud kogemused on andnud ideid teadustööks ja leidnud rakendust koolimatemaatika õppekavade arendamisel ning tulevaste matemaatikaõpetajate koolitamisel. Juubilari publikatsioonide üldarv on ületanud 90 piiri.

Töökaaslased ja lähemad sõbrad tunnevad teda tasakaaluka ja sihikindla inimesena, kes ikka ja jälle suudab üllatada oskusega leida see ratsionaalne iva ka kõige utoopilisematena tunduvatest uuendusideedest meie hariduspoliitikas.

Loodame, et jääd endiselt kahe jalaga maa peale ja tunned ka elust siirast rõõmu.

Kolleegide nimel
Elts Abel

Helki Haavasalu 60

Helki Haavasalu sündis 27. novembril 1946. a. Koorastes Põlvamaal. Pärast TRÜ lõpetamist 1970. aastal töötas ta 17 aastat Viljandi Kaugõppe Keskkoolis. Alates 1987. aastast töötab Helki Haavasalu Viljandi Paalalinna Gümnaasiumi matemaatikaõpetajana. Seega on õpetaja töökogemust 37 aastat. Teda iseloomustab töökus, korrektsus, kindlalt väljakujunenud tööstiil, süstemaatiline õpilaste teadmiste kontroll ja hindamine. Ta on eriliselt nõudlik distsipliini ja korra suhtes. Üleastumiste korral püüab ta õpilast mõista ja andestada, arutades rahulikult koos õpilasega tema käitumist. Tundides valitseb tõsine töömeeleolu. Õpetaja arendab oskuslikult valitud ülesannete ja erinevate metoodiliste võtete kaudu õpilastes analüüsi- ja mõtlemisvõimet ning loovust. Kuigi ta on range, nõudlik ja otsekohene, ei karda õpilased temalt lisaselgitusi küsida. Tehes koostööd klassijuhataja ja vanematega,

näeb ta niikaua vaeva, kuni saab ka kõige laisema õpilase endaga koostööle. Ta püüab märgata iga lapse edusamme ja teda ergutada. Õpetaja ise ütleb, et talle satuvad ainult head lapsed.

Helki Haavasalu õpilased on saavutanud häid tulemusi lõpueksamitel ja maakondlikel ning vabariiklikel olümpiaadidel. Ta püüab õpilase anded varakult avastada ja neid mitmekülgselt arendada. Tavaliselt on andekad lapsed hõivatud veel muude tegevustega ning harjutamiseks aega leida pole sugugi lihtne. Õpetajal on aga hulgaliselt ülesandeid, mida õpilased saavad iseseisvaks lahendamiseks. Õpilase arengu huvides suunab ta neid osalema konkurssidel ning õppima TÜ Teaduskoolis.

2002. aastal omistati talle pedagoog-metoodiku ametijärk. Viimaste aastate jooksul on õpetaja just arvuti kasutamise osas end arendanud. Ta on koostanud hulgaliselt õppematerjale, mida ka kolleegid saavad kasutada.

Suurt huvi pakuvad talle matemaatikute elulood, matemaatika ajalugu ja matemaatika inimkonna ajaloos. Neid materjale on ta kasutanud õppetunni vaheldusrikkamaks muutmisel, esinenud ettekandega kolleegidele koolis ja väljaspool. Ta on vaimustunud uutest avastustest ja püüab seda teistega jagada.

Helki Haavasalu on aktiivselt osalenud erinevatel koolitustel. Riigieksamitööde hindamine, analüüs ja kokkuvõtete tegemine on rikastanud oskuste praktilist poolt. Ta juhendab oma nooremaid kolleege, kes sageli oma probleemidega tema poole pöörduvad.

Esinemised talle eriti ei meeldi, kuid kui teda on palutud oma kogemustest rääkima, on ta teinud seda kohusetundlikult. Oma teadmisi ja oskusi on ta rakendanud võistlusülesannete koostamisel maakonna piires ja ka väljaspool. Ta osales III kooliastme matemaatika riikliku ainekava ja näidistöökavade koostamisel ning on mitme trükis ilmunud töö autor või kaasautor.

Helki Haavasalu on valitud Eesti Matemaatika Seltsi Koolimatemaatika Ühenduse juhatusse ning osaleb REKK-i noore õpetaja kutsekomisjoni töös.

Õpetaja Helki Haavasalu teeb oma tööd suure armastuse ja kohusetundega, on õpilaste ja lastevanemate poolt hinnatud õpetaja,

asjalik ja abivalmis kolleeg. Koolielu arendamises on ta osalenud mitmetes töögruppides, tema arvamust arvestatakse ja hinnatakse. Kool on õnnega koos, kui tal on selline pedagoog.

VIIVE TAMM
Viljandi Paalalinna Gümnaasiumi õppealajuhataja

Helgi Uudelepp 70

10. juunil täitus 70 eluaastat seltsi asutajaliikmel Helgi Uudelepal. H. Uudelepp sündis Järvamaal, lõpetas Tapa Keskkooli 1955. a. ja Tartu Riikliku Ülikooli matemaatikaosakonna 1960. a. Alates 1963. aastast õpetab ta matemaatikat Gustav Adolfi Gümnaasiumis (Tallinna 1. Keskkool 1963–1991), viimased paarkümmend aastat küll osalise koormusega. Õpetajana on ta teinud palju matemaatika süvaõppeklasside kujundamisel ja edendamisel. Ta oli ka Riia, Vilniuse ja Tallinna esimeste keskkoolide vahelise reaalainete võistluse algataja. H. Uudelepa õpilased on olnud edukad matemaatikaolümpiaadidel ja mitte ainult Eestisisestel. Aastal 1985 pääses Nõukogude Liidu võistkonnas Rahvusvahelisele Matemaatikaolümpiaadile (IMO) tema õpilane Mati Pentus, aastatel 1993 ja 1994 aga võitis IMO pronksmedali Peeter Laud. 1980-ndatel oli korduvalt H. Uudelepa kanda üleliidulisele olümpiaadile mineva Eesti võistkonna esindaja roll.

Ülalnimetatud Mati Pentuse ja Peeter Laua kõrval on mitmed teisedki H. Uudelepa õpilased saanud tunnustatud matemaatikuteks-teadlasteks. Olgu siinkohal nimetatud Ülle Kotta, Peeter Normak, Eve Oja, Ebu Tamm ja Toomas Täht.

Aastatel 1987–1996 oli H. Uudelepp tegev matemaatikaõpetajate täienduskoolituse korraldamisel ja Eesti koolimatemaatika sisu kujundamisel. Ta juhatas Tallinna Õpetajate Täiendusinstituudi matemaatika kabinetti (1987–1988) ning oli matemaatika peametoodikuks Eesti Hariduse Arenduskeskuses (1989-1992) ja Riigi Kooliametis (1993–1996). Ta korraldas täienduskursuseid matemaatikaõpetajatele ning oli mitmete õppematerjalide ja ainekavade koostajaks või retsensendiks. Real aastatel tuli tal tegelda ka vabariikliku matemaatikaolümpiaadi korraldamisega.

Alates 1997. aastast vastutab H. Uudelepp Riikliku Eksami- ja Kvalifikatsioonikeskuse peaspetsialistina põhikooli matemaatika lõpueksami ja matemaatika riigieksami ettevalmistamise ja läbiviimise eest. Tema teeneks on matemaatika riigieksamite süsteemi ülesehitamine Eestis nullist alates, sealjuures koostöövõime-

lise meeskonna komplekteerimine. Ta on seda tööd teinud suure pühendumuse ja vastutustundega hoides end pidevalt kursis, kuidas toimuvad sarnased eksamid teistes riikides. Ta on hoolt kandnud selle eest, et riigieksam ei kontrolliks ainult faktiteadmisi vaid ka õpilase sisulist arusaamist õpitust.

Kõigil töökohtadel on Helgi Uudelepp seisnud matemaatikaõpetuse kõrge taseme eest Eestis. Meil on hea meel, et tema poolt tehtut tunnustati Vabariigi Presidendi Kultuurirahastu 2006. aasta hariduspreemiaga.

KALLE KAARLI
Tartu Ülikool

IN MEMORIAM

Jaak Lõhmus

28.09.1937 – 23.02.2006

Jaak Lõhmus lõpetas 1961. a. Tartu Ülikooli matemaatikaosakonna, kuid sai tuntuks füüsiku-teoreetikuna. Kogu tema töine elu möödus Füüsika Instituudis, kus ta alustas aspirandina ja jõudis juhtivteaduri ametikohani. Tema uurimisobjektiks olid teoreetilise alusfüüsika matemaatilised probleemid. Sel alal valmisid tema füüsika-matemaatikakandidaadi (1968) ja füüsika-matemaatikadoktori (1990) väitekirjad.

Jaak Lõhmuse esimesed teadustööd olid pühendatud elementaarosakeste süstemaatikale, põhihuviks kujunesid aga kvantteooria algebralised probleemid. Koostöös Eugen Paali ja Leo Sorgsepaga avaldas ta 1994. a. monograafia "Nonassociative algebras in Physics", mida tunnustati 1995. a. Eesti Vabariigi teaduspreemiaga.

Jaak Lõhmus oli Palm Harbouri Alusuuringute Instituudi (USA, Florida) auprofessor, ajakirjade "Algebras, Groups and Geometries" ja "Hadronic Journal" asetoimetaja 1993. aastast.

Jaak Lõhmus pühendas palju energiat teadustööde kogumike toimetamisele, kooliõpikute koostamisele, eriti aga aimeraamatute ja -artiklite kaudu teaduse propageerimisele. Viimastel aastatel ilmunutest mainigem tema toimetatud ja suuresti ka kirjutatud aimeraamatut "Universumi mikromaailm" ning ajakirjas "Akadeemia" järjejutuna avaldatud unikaalset ülevaadet "Matemaatika suurprobleemidest".

Olaf Prinits

03.09.1924 – 14.04.2006

14. aprillil lahkus meie hulgast pärast pikka rasket haigust Eesti koolimatemaatika suurkuju emeriitprofessor Olaf Prinits. Olaf Prinits on pärit Türilt metsapraakeri ja kooliõpetaja perekonnast. 1947. aastal asus Olaf Prinits õppima Tartu Riikliku Ülikooli Matemaatika-loodusteaduskonda matemaatika erialal, mille lõpetas 1952. aastal. Ülikooli lõpetamise järel kutsuti O. Prinits tööle ülikooli teoreetilise mehaanika kateedrisse, kus ta töötas kuni matemaatika õpetamise metoodika kateedri moodustamiseni 1965. aastal, jõudnud selleks ajaks dotsendi kutseni. Olaf Prinits kui kateedri looja oli selle juhatajaks esimesed kümme aastat. Pärast seda töötas ta kuni 1987. aastani sama kateedri dotsendina ja alates professori kutse omistamisest samal aastal oli ta kateedri (hiljem matemaatika didaktika õppetooli) professor kuni 1994. aastani. Aastast 1994 oli Olaf Prinits sama õppetooli emeriitprofessor.

Üle viiekümne aasta kestnud viljakas teadus- ja arendustegevus sai alguse kõrgema matemaatika elementide koolikursusesse viimisest. Sellest välja kasvanud kooliõpikute koostamine viis O. Prinitsa tihedasse kontakti Eesti matemaatikaõpetajatega. Regulaarselt toimunud õpetajate täienduskursuste kaudu tihenenud kontaktid õpetajatega lubasid Olaf Prinitsal 1974. aastal alustada Eesti matemaatikaõpetajate päevade korraldamist. Need päevad on jätkunud igaaastaste üritustena praeguseni ning on saanud Eesti matemaatikaõpetajaid ühendavaks ning nende tegevust oluliselt kujundavaks teguriks. Tänu oma eruditsioonile ja headele organisaatorivõimetele oli O. Prinits aastakümneid Eesti matemaatikaõpetajate vaieldamatu liider. Ta oli Eesti Matemaatika Seltsi Koolimatemaatika Ühenduse rajaja ning Eesti Matemaatika Seltsi auliige.

Eesti koolimatemaatikute poolt kolmekümnendatel aastatel koolimatemaatika kursuse moderniseerimiseks alustatud töö edukas jätkamine O. Prinitsa poolt viis tulemuseni, kus ainsa üksusena kogu endises Nõukogude Liidus õpetati Eesti koolides matemaati-

kat euroopalikele traditsioonidele tugineva integreeritud kursusena eesti originaalõpikute järgi.

O. Prinits oli üks alusepanijaid eesti kooliõpilaste matemaatika olümpiaadidele ning oli aastaid nende korraldamise eestvedaja. Ta oli ka praeguse Hugo Treffneri Gümnaasiumi matemaatika-füüsika eriklasside loomise initsiaator ja esimesi õpetajaid.

O. Prinitsa tegevuse suureks ja tundub, et talle enesele kõige südamelähedasemaks valdkonnaks, on olnud Eesti koolimatemaatika ajaloo uurimine. Tema sellekohane töö on olnud nii laiaulatuslik ja põhjalik, et vaevalt leidub siin veel midagi oluliselt uurimisväärset. Koolimatemaatika ajaloo uurimistulemused on esitatud arvukates artiklites ja neljaosalisena ilmunud monograafias "Eesti koolimatemaatika ajalugu". Tema eestvedamisel on jäädvustatud Eesti koolimatemaatika suurkujudega seotud paigad ja korraldatud neile pühendatud üritusi. Kokku on O. Prinitsal trükis avaldatud üle 350 kirjutise. Tunnustamaks tema tegevust koolimatemaatika valdkonnas valiti ta Tallinna Pedagoogikaülikooli audoktoriks.

Kogu oma tegevuse kestel Tartu Ülikoolis on prof. O. Prinits olnud tunnustatud lektor, mitmete uute põhi- ja valikkursuste looja. Professor on olnud juhendajaks õige mitmele dissertandile ning kümnetele Tartu Ülikoolist matemaatikaõpetaja pädevuse saanud üliõpilastele. Kolleegidele ja õpilastele on O. Prinits jäävaks eeskujuks oma akadeemilise tasakaalukusega ja alati korrektse ning härrasmeheliku käitumisega.

Ei saa meenutamata jätta ka asjaolu, et nii akadeemilistes ringkondades kui ka laiema publiku seas oli Olaf Prinits tuntud ja tunnustatud kui Tartu Akadeemilise Meeskoori kauaaegne solist, kes on esinenud ka mitme soolokontserdiga.

Kolleegid Tartu Ülikoolist

Paul Moritz Cohn

08.01.1924 – 20.04.2006

Paul Cohn sündis 1924. a. Hamburgis. Natsivõimud kiusasid juudiperekonnast pärit poisi vanemaid taga ning Pauli koolitee jäi mitmel korral katki. Kui Suurbritannia teatas, et lubab juudi lastel immigreeruda, kasutas Pauli ema 1939. a. seda võimalust ning saatis poisi Inglismaale, kus too pidi hakkama tööl käima ja töö kõrvalt iseseisvalt oma haridust täiendama. 1944. aastal õnnestus tal sooritada vajalikud eksamid ja saada stipendium õppimiseks Cambridge'i Trinity Kolledžis, mille ta lõpetas 1948. a. bakalaureusekraadiga. Ta jätkas õpinguid ning omandas 1951. a. Cambridge'is doktorikraadi Philip Halli juhendamisel.

1952. a., pärast aastat Nancy Ülikoolis Prantsusmaal, sai Paul Cohnist kümneks aastaks Manchesteri Ülikooli lektor. 1962. a. asus ta tööle Londoni Ülikoolis Kuninganna Mary Kolledžis ning seejärel 1967. a. professorina ja matemaatikaosakonna juhatajana Bedfordi Kolledžis. Kui Londoni kolledžid 1984. a. reorganiseeriti, sai tema töökohaks kuni emeriteerumiseni 1989. a. *University College London* (UCL). Pärast seda sai tast UCL-i auteadur ning ta jätkas artiklite ja raamatute kirjutamist kuni surmani.

Cohn oli külalisprofessoriks paljudes ülikoolides, muuhulgas Yale'is, Berkeley's, Chicagos, Rutgersis, Pariisis, Haifas, Jeruusalemmas, Delhis, Heidelbergis ja Hamburgis.

Paul Cohn oli algebraist, kes andis silmapaistva panuse mittekommutativsete ringide teooriasse. Ta on kirjutanud artikleid Jordani algebrate, jagamisega Lie ringide, kaldkorpuste, vabade ringide ja mittekommutatiivsete faktoriaalsete ringide kohta. Tema sulest on ilmunud raamatud Lie rühmadest, lineaarvõrranditest, ruumigeomeetriast, universaalalgebrast, kaldkorpustest, algebralistest arvudest jne. Tema tuntuim monograafia on 1971. a. ilmunud "Free Rings and their Relations", mis sisaldab vabade assotsiatiivsete algebrate ja nendega seotud ringide klasside süstemaatilist käsitlust.

Paul Cohn oli oma elu jooksul mitmetes tähtsates ametites Londoni Matemaatikaseltsis, muuhulgas selle president aastatel 1982–84. Mitmete tunnustuste hulgas on nt. 1974. a. saadud Londoni Matemaatikaseltsi *Senior Berwick Prize*.

Paul Halmos

03.03.1916 — 02.10.2006

Paul Halmos sündis Budapestis, kuid 13-aastasena asus elama USA-sse. 1938. a. kaitses ta Illinoisi Ülikoolis filosoofiadoktori väitekirja "Mõningate stohhastiliste teisenduste invariantidest: hasartmängusüsteemide matemaatiline teooria". P. Halmos oli mitmekülgne matemaatik. Tema huvide ringi kuulusid tõenäosusteooria, matemaatiline statistika, operaatoriteooria, ergoodiline teooria, funktsionaalanalüüs (eriti Hilbert ruumide teooria) ja matemaatiline loogika. Ta oli üks algebralise loogika rajajaid, kuid üldise tunnustuse pälvis oma suurepäraste monograafiatega, mis on tõlgitud paljudesse keeltesse. Esimene neist oli 1942. a. ilmunud "Lõplikumõõtmelised vektorruumid", mille P. Halmos kirjutas olles Princetonis J. von Neumanni assistent. Raamat on suuresti inspireeritud J. von Neumanni loengutest. Nimetagem veel P. Halmosi sulest ilmunud "Mõõduteooriat" (1950), "Loenguid ergoodilisest teooriast" (1956) ja "Naiivset hulgateooriat" (1960). P. Halmos on tuntud kui hea matemaatika esitamise propageerija. Tema jaoks oli väga tähtis, et igas matemaatilises kirjutises oleks selgelt välja toodud, mida tahetakse öelda, ja et öeldu jõuaks ka lugejani. Oma vaateid jagas ta aktiivselt matemaatikaüldsusega. Igal matemaatikul on kasulik lugeda tema artiklit "Kuidas kirjutada matemaatikat".

Lõpetuseks märgime, et P. Halmosit peetakse praegu üldtuntud tõestuse lõpu märgi kasutusele võtmise algatajaks.

Donald G. Higman

20.09.1928 – 13.02.2006

Donald Higman sündis 1928. a. Vancouveris. Doktorikraadi sai ta 1952. a. Illinoisi Ülikoolist Reinhold Baeri juhendamisel. Pärast seda töötas ta kaks aastat McGilli Ülikoolis ja kaks aastat Montana Ülikoolis. 1956–98 oli ta Michigani Ülikoolis, kusjuures professoriks sai 1960. a.

Higman on andnud panuse mitmete algebra valdkondade uurimisse. Ta alustas lõplike rühmade teooriaga ning suundus rühmadega seotud geomeetriate kaudu abstraktsesse kombinatoorikasse. Viimase kolme aastakümne jooksul peeti teda viimatinimetatud valdkonna üheks tipptegijaks.

Oma töödes rühmade esituste homoloogiliste aspektide kohta tõi ta sisse suhteliselt projektiivse mooduli mõiste ning selgitas selle rolli moodulite dekompositsiooni teoorias. Tema töö astakuga 3 permutatsioonirühmade alal aitas kaasa mitmete sporaadiliste lõplike lihtsate rühmade avastamisele, muuhulgas 44 352 000-elemendilise Higman-Simsi rühma konstrueerimisele.

Higmani juhendamisel on kaitstud 15 doktoritööd.

Irving Kaplansky

22.03.1917 – 25.06.2006

Irving Kaplansky sündis Torontos Poola emigrantide peres. Ta lõpetas Toronto Ülikooli 1938. a. bakalaureuse- ja 1939. a. magistrikraadiga. Doktoritöö korpuste kohta kaitses ta 1941. a. Harvardi Ülikoolis Saunders Mac Lane'i juhendamisel. Pärast lühemaajalisi õppejõukohti Harvardi ja Columbia Ülikoolis läks ta 1945. a. tööle Chicago Ülikooli, kuhu jäi suuremaks osaks oma karjäärist (1984. aastani) ning kus temast sai professor 1956. a. Aastail 1962–67 oli ta Chicago Ülikooli matemaatikaosakonna juhataja. Pärast lahkumist Chicago Ülikoolist kolis ta Berkeleysse (Kalifornia), kus oli aastail 1984–92 Matemaatiliste Teaduste Uurimisinstituudi juhataja.

Kaplansky tööd kuuluvad põhiliselt algebra valdkonda. Ta on andnud olulise panuse ringi-, rühma- ja korpuseteooria arengusse. Ajavahemikus 1939–2003 avaldas ta peaaegu 150 artiklit ning kirjutas raamatud lõpmatutest Abeli rühmadest, ringidest ja korpustest, diferentsiaalalgebrast, Lie algebratest. Lisaks sellele oli Kaplansky hinnatud õppejõud. Tema juhendatud doktoritööde arv küünib 55-ni.

Kaplansky oli mitmetel kõrgetel kohtadel Ameerika Matemaatikaseltsis, muuhulgas president aastail 1985–86. Samuti osales ta AMS ajakirjade toimetuskolleegiumides. Talle sai osaks mitmeid tunnustusi, nt. 1989. a. antud Steele'i auhind.

Lisaks matemaatikale tegeles Kaplansky pea kogu elu muusikaga ning oli osav pianist.

Karl Zeller

28.12.1924 – 20.07.2006

20. juulil 2006. a. suri Tübingeni Ülikooli emeriitprofessor Karl Zeller. K. Zeller (sünd. 28.12.1924 Leedus) oli mitmekülgsete huvidega matemaatik. Tema eestvedamisel rajati Tübingeni Ülikoolis 60-ndate aastate algul arvutuskeskus, tema hilisem uurimistöö oli seotud lähendusteooria ning numbriliste meetoditega. Kõige enam tuntust tõid K. Zellerile tema doktoriväitekiri (1950) ja sellele järgnenud tööd summeeruvusteooria valdkonnast. Koos Poola matemaatikute S. Mazuri ja W. Orliczi ning USA matemaatiku A. Wilanskyga loetakse teda õigustatult kaasaegse summeeruvusteooria rajajaks, nende teadlaste töödes pandi alus funktsionaalanalüüsi meetodite süstemaatilisele rakendamisele summeeruvusteooria probleemide uurimisel. K. Zelleri summeeruvusteooriaalased tööd on olnud aluseks ja lähtekohaks sellealases uurimistöös mitmetele Eesti matemaatikutele, sealhulgas G. Kangrole.

KOOLIMATEMAATIKA

Kokkuvõte õpilaste matemaatikavõistlustest aastal 2006

Härmel Nestra
Tartu Ülikool

Käesolev artikkel püüab anda ülevaate olümpiaadiareenil toimunust. Käsitletud on nii kohalikke võistlusi, mille korraldamisega tegeles üleriigiline matemaatikaolümpiaadi žürii, kui ka neid rahvusvahelisi ning muid välisvõistlusi, millest Eesti võistlejad osa võtsid.

Kohalikest võistlustest on peale traditsioonilise matemaatikaolümpiaadi oma piirkonna- ja lõppvooruga juttu lahtistest võistlustest, mis on toimunud iga-aastaselt, kaks võistlust õppeaastas, alates aastast 1993. Rahvusvahelistest võistlustest pakub muidugi huvi suvine IMO ning hilissügisene Põhjamaid ja Balti merd ümbritsevaid maid koondav võistkondlik võistlus "Balti Tee". Lisaks on puudutatud Soome olümpiaadi lõppvooru, kus, nagu tavaks, osaleb külalisena kaks Eesti 9. klassi õpilast.

Läbime kõik võistlused aga kronoloogilises järjekorras. On toodud ka mõned näiteülesanded – kõiki komplekte ei hakanud esitama. Lahendusi, samuti täielikke tulemuste tabeleid ja muid materjale, võib lugeda olümpiaadide veebist `http://www.math.olympiaadid.ut.ee/`.

Olümpiaadi piirkonnavoor

Piirkonnavoor on olümpiaadi žürii murelaps ja nõuab žüriilt umbes niisama palju tööd kui kõik ülejäänud võistlused aasta jooksul kokku. Lisaks ülesannete komplektide koostamisele 7.–12. klasside jaoks on juba enne võistluse toimumist vaja valmistada ette hindamisjuhised, mille järgi piirkondade parandajad saaksid orienteeruda. Seejuures on žürii jaoks ülesannete koostamine kõige keerulisem just piirkonnavooru jaoks, kuna raskus peab osavõtjate

keskmise madala taseme tõttu olema väga täpselt paigas. Pärast on vaja paremates piirkonnavooru töödes (keskmiselt sadakond klassi kohta) hindamine ühtlustada.

Korduvalt on juhtunud ja juhtub kardetavasti ka edaspidi, et piirkonnavooru mõne klassi komplekt satub olema liiga ränk. Selle aasta komplektide kohta aga seda öelda ei saa. Kõigi klasside tulemuste tabeli ülemised otsad langevad võrdlemisi ühtlaselt.

Sel aastal toimus piirkonnavoor 28. jaanuaril. Toome siin ära vaid 7. ja 8. klassi tulemuste tabeli tipu, kuna kõrgemate klasside õpilaste jaoks on piirkonnavoor vaid vaheaste ja lõplik pingerida selgub lõppvoorus. 7. ja 8. klassi kohta esitame parajasti need õpilased, kes kutsuti Tartusse matemaatika huvipäevale. Maksimaalselt oli kummaski klassis võimalik saada 41 punkti.

7. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte
1.	Artur Pata	Miina Härma Gümnaasium	41
1.	Kersti Perandi	Tartu Kesklinna Kool	41
1.	Iiris Lüsi	Kärdla Ühisgümnaasium	41
1.	Kadi Liis Saar	Tallinna Inglise Kolledž	41
1.	Ivan Zubarev	Tallinna Tõnismäe Reaalkool	41
6.	Kati Raudpuu	Tartu Kesklinna Kool	40
6.	Riho Markna	Gustav Adolfi Gümnaasium	40
8.	Karl Konsap	Tartu Kommertsgümnaasium	39
8.	Eero Vaher	Pärnu Vanalinna Põhikool	39
8.	Aleksandr Šved	Tallinna Tõnismäe Reaalkool	39
8.	Marti Reek	Tallinna Inglise Kolledž	39
8.	Juri Holvason	Tallinna Tõnismäe Reaalkool	39
8.	Ago Allikmaa	Saku Gümnaasium	39
14.	Ants Remm	Miina Härma Gümnaasium	38
14.	Hanno Soo	Tartu Kommertsgümnaasium	38
14.	Mari Palm	Tartu Kivilinna Gümnaasium	38
14.	Ando Haldna	Tartu Kommertsgümnaasium	38
14.	Uku Jaan Leppik	Tartu Descartes'i Lütseum	38
14.	Mariliis Õun	Tartu Kommertsgümnaasium	38
14.	Mark Laane	Tallinna Reaalkool	38
14.	Silver Abel	Tõrva Gümnaasium	38

8. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte
1.	Gaik Pepojan	Narva Pähklimäe Gümnaasium	38
1.	Rauno Padari	Ilmatsalu Põhikool	38
3.	Tuule Mall Kull	Miina Härma Gümnaasium	37
3.	Rauno Siinmaa	Pärnu Koidula Gümnaasium	37
5.	Siiri Mägi	Viljandi Maagümnaasium	36
5.	Gerli Viikmaa	Pärnu Koidula Gümnaasium	36
5.	Sandra Lääne	Vaimastvere Lasteaed-Põhikool	36
8.	Paul-Gunnar Loorand	Miina Härma Gümnaasium	35
8.	Artur Žuravljov	Narva Pähklimäe Gümnaasium	35
8.	Aleksander Mjakonkihh	Pärnu Kuninga Tänava Põhikool	35
8.	Raimo Armus	Kärla Põhikool	35
8.	Andre Tamm	Tallinna Inglise Kolledž	35
13.	Mariann Grencštein	Viljandi Paalalinna Gümnaasium	34
13.	Stella Ruus	Tornimäe Põhikool	34
13.	Fanny-Dhelia Lõhmus	Tallinna Prantsuse Lütseum	34
13.	Liisi Mõtshärg	Võru Kesklinna Gümnaasium	34
17.	Jevgeni Erdman	Kohtla-Järve 3. Keskkool	33
17.	Erik Nisu	Pärnu Kuninga Tänava Põhikool	33
17.	Meelis Reinumägi	Tornimäe Põhikool	33
17.	Erik Paemurru	Tallinna Reaalkool	33
17.	Laurits Puust	Audru Keskkool	33
17.	Kati Hensen	Aruküla Põhikool	33

Lisaks jäi korraldajatele silma ja kutsuti huvipäevale 5. klassi õpilane Kaur Aare Saar, kes osales 7. klassi arvestuses ja saavutas 35 punkti 42-st.

Soome põhikooli matemaatikavõistlus

3. veebruaril esindasid Eesti koolimatemaatikat Soome olümpiaadil 9. klassi õpilased Kairi Kangro Ülenurme Gümnaasiumist ja Tarmo Pilt Tartu Kesklinna Koolist. Tulemuste tabelis hõivasid nad vastavalt 2. ja 6. koha. Tegemist on päris hea tulemusega. Selgelt jäädi alla vaid 4 aasta tagusele Eesti võistlejapaarile, kes mõlemad jätsid kõik kohalikud võistlejad seljataha. Samas 2. kohta on eestlased saavutanud juba palju kordi, lisaks on kaks korda võidetud ka esikoht.

Kevadine lahtine võistlus

Järgmisena toimus 19. veebruaril kevadine lahtine võistlus. See viidi läbi seitsmes Eesti linnas: Tallinnas, Tartus, Narvas, Ahtmes, Viljandis, Pärnus ja Kuressaares.

Nagu ikka, oli kaks rühma – nooremas rühmas võisid osa võtta kuni 10. klassi õpilased. Tulemuste põhjal anti nooremas rühmas välja 10 ja vanemas 8 auhinda. Toome siin ära kummagi rühma tulemuste tabeli tipu auhinnatutega. Maksimaalselt oli kummaski rühmas võimalik saada 35 punkti.

Alljärgnevates tabelites on koolide nimede jaoks tarvitatud järgmisi lühendeid:

AG	– Ahtme Gümnaasium,
CRJG	– C. R. Jakobsoni nim. Gümnaasium,
GAG	– Gustav Adolfi Gümnaasium,
HWG	– Haapsalu Wiedemanni Gümnaasium,
HTG	– Hugo Treffneri Gümnaasium,
IPK	– Ilmatsalu Põhikool,
MHG	– Miina Härma Gümnaasium,
NHG	– Narva Humanitaargümnaasium,
NPG	– Narva Pähklimäe Gümnaasium,
NRG	– Nõo Reaalgümnaasium,
PKG	– Pärnu Koidula Gümnaasium,
T37KK	– Tallinna 37. Keskkool,
THG	– Tallinna Humanitaargümnaasium,
TIK	– Tallinna Inglise Kolledž,
TKVG	– Tallinna Kesklinna Vene Gümnaasium,
TMHG	– Tallinna Mustamäe Humanitaargümnaasium,
TPL	– Tallinna Prantsuse Lütseum,
TRK	– Tallinna Reaalkool,
TTRK	– Tallinna Tõnismäe Reaalkool,
TKLG	– Tartu Kivilinna Gümnaasium,
TKG	– Tartu Kommertsgümnaasium,
ÜG	– Ülenurme Gümnaasium.

Noorem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Auhind
1.	Fjodor Gainullin	TTRK	10.	35	I
1.	Heiki Niglas	T37KK	10.	35	I
3.	Tanel Teinemaa	TRK	10.	28	II
4.	Kristiina Oll	HTG	10.	26	II
5.	Karen Atabekjan	TTRK	10.	25	III
5.	Olga Bulgakova	NPG	10.	25	III
7.	Melissa Saviste	TIK	10.	24	III
7.	Karina Kisselite	TTRK	10.	24	III
7.	Ivo Kubjas	HTG	10.	24	III
10.	Stanislav Zavjalov	NHG	9.	23	III

Vanem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Auhind
1.	Laur Tooming	HTG	12.	35	I
1.	Aleksei Vlassov	TTRK	12.	35	I
1.	Andrei Rõbinski	TTRK	12.	35	I
4.	Igor Petšonkin	TTRK	12.	29	II
4.	Mihkel Heidelberg	GAG	12.	29	II
6.	Jevgeni Martjušev	TTRK	11.	24	III
6.	Ivan Avanessov	AG	11.	24	III
8.	Vassili Novikov	NHG	12.	23	III

Toome ära kaks näidet selle võistluse ülesannetest.
Vanema rühma ülesanne 2 oli püstitatud järgmiselt.

Reaalarvuliste väärtustega funktsioon f rahuldab suvaliste reaalarvude x ja y korral võrdust

$$f(xy) = f(x)y + xf(y).$$

Tõesta, et see funktsioon rahuldab suvaliste reaalarvude x ja $y \neq 0$ korral võrdust

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)y - xf(y)}{y^2}.$$

Kuna koolis õpitakse hoolega tuletist ning tuubitakse muuhulgas teisendusvalemeid, tekkis võistlejail kohe assotsiatsioon tuletisega: et f on justkui tuletise võtmise operaatori rollis, siis eeldus vastab korrutise tuletise valemile ja väide jagatise tuletise valemile. Paraku on tegu alttõmbamisega: tuletisega pole selle ülesande juures midagi teha. Erinevalt õpitud valemitest, kus korrutataksejagatakse funktsioone, on siin teguriteks reaalarvud. Ootamatult paljud võistlejad läksid ülesseatud lõksu ja seletasid töös, et väide järeldub ühel või teisel põhjusel tuletise omadustest.

Vanema rühma ülesanne 4 oli ühelauseline.

> Kas jadas (a_n) üldliikmega $a_n = n^3 - (2n+1)^2$ leidub liige, mis jagub 2006-ga?

Vastus on "jah" ja see ülesanne on tore näide Hiina jäägiteoreemi rakendusest olümpiaadiülesannetes. Tegemist on suhteliselt lihtsa rakendusega, kus võrrandite arv 2, nii et Hiina jäägiteoreemi mittetundvatel lahendajatel oli võimalus ka sobitamise teel süsteemi lahendini jõuda.

Sobiva indeksi leidmine kongruentside süsteemi kaudu oli sisuliselt sunnitud, kuna vähim indeks, millele vastav jada liige 2006-ga jagub, on 87 – muidugi ei suuda keegi sinnani kõiki liikmeid välja arvutada ja kontrollida käsitsi 2006-ga jaguvust.

Olümpiaadi lõppvoor

1. aprillil saabus olümpiaadi lõppvoor, kus parimad 9.–12. klasside õpilased üle Eesti Tartus üksteiselt mõõtu võtsid. Jällegi toome ära vaid tabelite tipu auhinnatutega. Iga klassi arvestuses oli maksimaalne võimalik punktisumma 35.

9. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte	Auhind
1.	Kairi Kangro	ÜG	29	I
2.	Viktor Karabut	AG	28	I
3.	Jaanus Gilden	HWG	25	II
3.	Teele Palumaa	TIK	25	II
3.	Mark Gimbutas	TKG	25	II
6.	Sergei Ponomarjov	NHG	24	II
7.	Arseni Timofejev	THG	22	III
7.	Siim-Ilmar Nopri	CRJG	22	III
9.	Siim Rinken	TKLG	21	III

10. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte	Auhind
1.	Fjodor Gainullin	TTRK	35	I
1.	Heiki Niglas	T37KK	35	I
3.	Svetlana Tšupova	NPG	24	II
3.	Jana Tšerkašina	NHG	24	II
3.	Karen Atabekjan	TTRK	24	II
6.	Marina Borovkova	TKVG	23	III
7.	Olga Bulgakova	NPG	22	III
7.	Jekaterina Ivanova	NHG	22	III
7.	Tanel Teinemaa	TRK	22	III

11. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte	Auhind
1.	Vlada Schotter	HTG	19	I
1.	Kaarel Nummert	HTG	19	I
3.	Nikolai Voitsehhovski	NPG	18	II
4.	Sander Pajusalu	HTG	17	II
5.	Aleksandr Vovnjuk	TTRK	16	III
5.	Stemo Ojavee	CRJG	16	III
7.	Jevgeni Martjušev	TTRK	15	III

12. klass

Koht	Nimi	Kool	Punkte	Auhind
1.	Aleksei Vlassov	TTRK	34	I
1.	Andrei Rõbinski	TTRK	34	I
3.	Igor Petšonkin	TTRK	33	I
4.	Laur Tooming	HTG	30	II
5.	Jakob Jõgi	HTG	18	III
6.	Vassili Novikov	NHG	17	III
6.	Andrei Korsunski	TMHG	17	III
8.	Mihkel Heidelberg	GAG	15	III

Meie lõppvooru 9. klassi arvestuses tegid kaasa ka kaks Soome külalisvõistlejat, kes olid Soome põhikooli matemaatikavõistluse kaks parimat kohalike seas. Seekord soomlased meil auhinnalistele kohtadele ei pääsenud. Varem on seda mõned korrad juhtunud, kuid meie olümpiaad on alati raskem kui Soome oma ja tüüpiliselt ongi Eesti võistlejad Soomes edukamad kui Soome võistlejad Eesti olümpiaadil.

Näitena lõppvoorul esinenud ülesandest pakume 12. klassi 5. ülesande.

> Aafrikas kõneldava ababi keele tähestik koosneb tähtedest A ja B ning selle keele sõnad on parajasti need, mida saab moodustada järgmise kahe reegliga.
>
> 1) A on sõna.
> 2) Kui s on sõna, siis $s \oplus s$ ja $s \oplus \bar{s}$ on sõnad, kus $\bar{s}$ tähistab sõna, mis saadakse sõnast s, asendades seal kõik tähed A tähtedega B ja vastupidi, ning $x \oplus y$ tähistab sõnade x ja y järjestkirjutamist.
>
> Austraalias kõneldava ululu keele tähestik koosneb samuti tähtedest A ja B ning keele sõnad on parajasti need, mida saab moodustada järgmise kahe reegli abil.
>
> 1) A on sõna.

2) Kui s on sõna, siis $s \otimes s$ ja $s \otimes \bar{s}$ on sõnad, kus $\bar{s}$ tähistab sama nagu eelnevas ning $x \otimes y$ tähistab ühepikkuste sõnade x ja y korral sõna, mille saame, kui kirjutame sõnade x ja y tähed vaheldumisi üksteise järele, alustades sõna x esimesest tähest.

Tõesta, et ababi ja ululu keel koosnevad samadest sõnadest.

Need keeled on muidugi puhas fantaasia. Tegemist on teoreetilise informaatika ülesandega, kus formaalsed keeled defineeritakse induktiivselt. Kuna informaatikaolümpiaadil pakutakse vaid programmeerimisülesandeid, jäävad teoreetilised informaatikaülesanded matemaatikaolümpiaadile. Meie žüriil pole sellega mingeid probleeme, kuna kaaluka osa temast moodustavad mitte puhtad matemaatikud, vaid arvutiteadlased. Mõned tugevad olümpiaadilapsed ongi nurisenud, et meie olümpiaadil on diskreetne matemaatika liiga olulisel kohal.

Kõnealusele informaatikaülesandele oli aga saatusest määratud täita väga olulist rolli. Nimelt just see ülesanne sai saatuslikuks ühele petisele, kes ebaseadusliku tegevuse tulemusel oli hankinud ligipääsu arvutis hoitud žürii materjalidele, kust ta leidis nii eelseisvate võistluste ülesanded kui lahendused. Nagu politsei uurimine hiljem kinnitas, tegutses Pavel Plotnikov Tallinna Tõnismäe Reaalkoolist just niiviisi. Lõppvooru 12. klassi 5. ülesande parandaja Reimo Palm, kes oli ühtlasi žürii ametlike lahenduste vormistaja, tundis Plotnikovi töös ära oma kirjutatud teksti kohatise sõnasõnalise tõlke vene keelde ning tõstis žüriis kisa. Uuriti ka sama töö teiste ülesannete lahendusi ja avastati veel kahtlasi sarnasusi žürii ametlike lahendustega.

Kuna pettus polnud tol hetkel päris kindlalt tuvastatav, määras žürii auhinnad vastavalt tööde põhjal saadud tulemustele. Tänaseks on kõik Plotnikovi tulemused meie võistlustelt aastatel 2005 ja 2006 kuni lõppvooruni žürii otsusega tühistatud. Ülaltoodud lahtise võistluse vanema rühma ning lõppvooru 12. klassi tabelid on juba tühistusotsuse järgi kohandatud.

Valikvõistlus

Valikvõistluse toimumisajaks oli juba varem määratud 5.–6. aprill. Lõppvooru ajal üles kerkinud tõsised kahtlused, et žürii materjalid lekivad mõnede õpilasteni, sundisid kiiruga astuma otsustavaid samme. Juba kokku pandud ülesannete komplekt otsustati täielikult välja vahetada ning uus komplekt koostati vaid kolme inimese teadmisel. Neist üks – tekstide vene keelde tõlkija – ei teadnud, mis komplektiga on tegu. Kiire uute ülesannete otsimine nõudis hilisõhtuni kestvaid tööpäevi. Komplekt sisestati ja trükiti välja arvutiga, millel polnud ega polnud kunagi olnud internetiühendust.

Valikvõistlusel osales ka Pavel Plotnikov ning saavutas keskpärase tulemuse: üle kolme korra võitjast vähem punkte. Olgu valikvõistluse tulemuste tabel siin täielikuna ära toodud.

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte
1.	Heiki Niglas	T37KK	10.	23
2.	Aleksei Vlassov	TTRK	12.	19
3.	Kaarel Nummert	HTG	11.	18
4.	Laur Tooming	HTG	12.	16
5.	Nikolai Voitsehhovski	NPG	11.	14
5.	Igor Petšonkin	TTRK	12.	14
7.	Olga Bulgakova	NPG	10.	10
7.	Jevgeni Martjušev	TTRK	11.	10
9.	Karen Atabekjan	TTRK	10.	9
9.	Sander Pajusalu	HTG	11.	9
11.	Pavel Plotnikov	TTRK	12.	7
11.	Kairi Kangro	ÜG	9.	7
13.	Tanel Teinemaa	TRK	10.	6
13.	Vlada Schotter	HTG	11.	6
13.	Jekaterina Ivanova	NHG	10.	6
13.	Fjodor Gainullin	TTRK	10.	6
17.	Ivan Avanessov	AG	11.	5
18.	Viktor Karabut	AG	9.	4
19.	Svetlana Tšupova	NPG	10.	2
20.	Stemo Ojavee	CRJG	11.	1

IMO

Valikvõistluse, aga ka eelnevate võistluste tulemuste põhjal moodustati Eesti võistkond suviseks rahvusvaheliseks matemaatikaolümpiaadiks koosseisus Heiki Niglas Tallinna 37. Keskkooli 10. klassist, Laur Tooming Hugo Treffneri Gümnaasiumi 12. klassist, Kaarel Nummert Hugo Treffneri Gümnaasiumi 11. klassist, Nikolai Voitsehhovski Narva Pähklimäe Gümnaasiumi 11. klassist, Jevgeni Martjušev Tallinna Tõnismäe Reaalkooli 11. klassist, Olga Bulgakova Narva Pähklimäe Gümnaasiumi 10. klassist. Võistkonna esindajateks olid juba varem määratud Härmel Nestra ja Indrek Zolk.

Üritus toimus 10.–18. juulil Ljubljanas Sloveenias, neist võistluspäevad olid 13.–14. juuli.

IMOl antakse lahendada 6 ülesannet. Igal võistlejal on võimalik saada igast ülesandest maksimaalselt 7 ehk kokku kuni 42 punkti. Tulemuste tabeli umbkaudu esimesse poolde tulnud saavad auhinnaks ka medali. Medal võib olla kuldne, hõbedane või pronksine; iga medalikarva jaoks otsustab IMO žürii täpsed punktipiirid, millega määratud vahemikesse tulnud seda karva medali teenivad. Lisaks antakse diplom kõigile medalist ilmajäänutele, kes lahendavad vähemalt ühe ülesande täispunktidele.

Eesti võistlejate tulemused olid järgmised.

Nimi	Punkte	Auhind
Heiki Niglas	16	pronks
Laur Tooming	18	pronks
Kaarel Nummert	13	
Nikolai Voitsehhovski	14	diplom
Jevgeni Martjušev	13	diplom
Olga Bulgakova	6	

Kokku saadi 80 punkti, mis pole küll Eesti võistkondade rekord, kuid siiski suhteliselt suur summa. Suurt rolli mängib selles ka viimase aja IMO poliitika, mille järgi valitakse kummalgi päeval üks ülesanne üsna lihtne. See on tingitud paljude nõrga tasemega riikide lisandumisest, kelle võistlejad tahaksid ka punkte saada.

Seekord oli IMOl kolm võistlejat, kes lahendasid maksimumpunktidele kõik ülesanded: üks Hiinast, üks Venemaalt ja üks Moldovast. Kõik kuus Hiina võistlejat said kuldmedali ja Hiina oli sellega mitteametlikus riikide arvestuses esimesel kohal. Kõige viimaseks riigiks oli Mosambiik, kelle kolm võistlejat said vaatamata lihtsate ülesannete kaasamisele kokku 0 punkti.

Laur Toomingule oli see IMO juba neljas. Varem on Eesti võistkonnas neljale IMOle pääsenud vaid Leopold Parts (1998–2001) ja Hendrik Nigul (1999–2002). Kuid Laur Tooming sai oma igal IMOl ka auhinna. See saavutus on kahele eelmisele jäänud kättesaamatuks.

Näitena IMO ülesandest pakume kõige lihtsama, mis komplektis oli – ülesande 1. Sellest said Eesti õpilased kokku 38 punkti 42 võimalikust, mis on ühe IMO ülesande eest võistkonna peale kokku saadud punktide arvu rekord üle kõigi aastate.

> Olgu ABC kolmnurk ja I tema siseringjoone keskpunkt. Punkt P selle kolmnurga sees rahuldab tingimust
>
> $$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$
>
> Näita, et $|AP| \geq |AI|$, kus võrdus kehtib parajasti siis, kui $P = I$.

Sügisene lahtine võistlus

Uus õppeaasta algas uue hooga ja 7. oktoobril toimus esimene võistlus – sügisene lahtine. Võistlus viidi läbi kaheksas paigas üle Eesti: Tallinnas, Tartus, Narvas, Ahtmes, Viljandis, Pärnus, Kuressaares ja Võrus. Nii suur võistluskohtade arv oli esmakordne, uustulnukana figureeris kohtade nimekirjas Võru.

Muus osas järgis lahtine võistlus tavasid. Oli kaks rühma – noorem ja vanem –, kusjuures nooremas rühmas võisid osa võtta kuni 10. klassi õpilased. Mõlemas rühmas võis saada kuni 35 punkti.

Ülesanded said seekord vägagi krõbedad, suhteliselt eriti nooremas rühmas. Esitame jällegi kummagi rühma tulemuste tabeli tipu auhinnatutega, kummaski rühmas oli neid 8.

Noorem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Auhind
1.	Stanislav Zavjalov	NHG	10.	19	I
2.	Jonatan Jõks	TRK	10.	18	I
3.	Kairi Kangro	HTG	10.	16	II
4.	Lauri Taaleš	NRG	10.	14	II
4.	Rauno Siinmaa	PKG	9.	14	II
6.	Andres Aas	TPL	10.	12	III
6.	Kadi Liis Saar	TIK	8.	12	III
6.	Eveli Verev	TKG	9.	12	III

Vanem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Auhind
1.	Ivan Avanessov	AG	12.	24	I
1.	Nikolai Voitsehhovski	NPG	12.	24	I
3.	Rauni Lillemets	TRK	12.	23	II
4.	Jevgeni Martjušev	TTRK	12.	22	II
4.	Hiie Soeorg	HTG	12.	22	II
6.	Fjodor Gainullin	TTRK	11.	20	III
7.	Heiki Niglas	T37KK	11.	19	III
7.	Taavi Mandel	HTG	12.	19	III

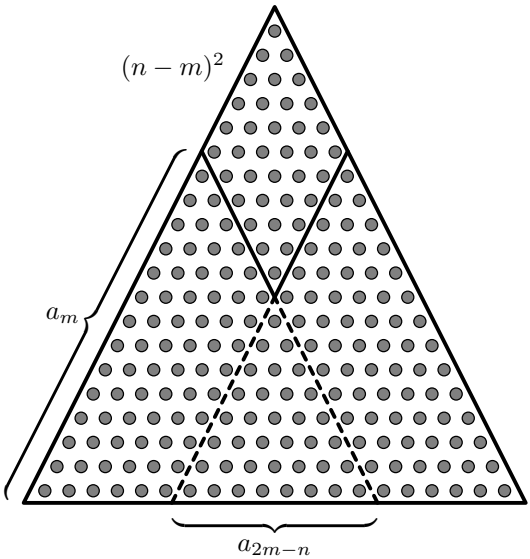
Selle võistluse pärlina toome vanema rühma 1. ülesande.

Kolmnurkarvudeks nimetatakse arve kujul

$$a_n = 1 + 2 + \ldots + n\,,$$

kus $n \geqslant 1$. Tõesta, et kui $2a_m = a_n$, siis a_{2m-n} on täisarvu ruut.

Sellel ülesandel on lihtne algebraline lahendus, milleni rõhuv enamus edukalt lahendanutest jõudsid. Samas saab vajalikus väites veenduda ka visuaalse pildiga, mis on toodud joonisel.



"Balti Tee"

Sügisese lahtise võistluse, aga ka varasemate võistluse tulemuste põhjal moodustati Eesti võistkond võistkondlikuks matemaatikavõistluseks "Balti Tee" koosseisus Nikolai Voitsehhovski Narva Pähklimäe Gümnaasiumi 12. klassist, Jevgeni Martjušev Tallinna Tõnismäe Reaalkooli 12. klassist, Heiki Niglas Tallinna 37. Keskkooli 11. klassist, Kaarel Nummert Hugo Treffneri Gümnaasiumi 12. klassist ja Ivan Avanessov Ahtme Gümnaasiumi 12. klassist. Võistkonna esindajateks said Härmel Nestra ja Oleg Košik.

Üritus toimus 1.–5. novembrini Turus Soomes. Võistluspäev oli 3. november. Sel võistlusel antakse igale võistkonnale lahendada 20 ülesannet, selleks on aega 4,5 tundi. Võistlus on meeskondlik: võistkonna liikmed võivad võistluse ajal omavahel suhelda ning igal võistkonnal läheb iga ülesande eest arvesse ainult üks lahendus.

Võrreldes IMOga on ülesanded keskeltläbi lihtsamad, olles ligikaudu Eesti olümpiaadi lõppvooru tasemega, kuid raskuse laiast diapasoonist tulenevalt võib mõni ülesanne ka päris kõva pähkel olla.

"Balti Teele" sõit 1. novembril oli seikluslik. Merel tõusis torm ja kiirlaev, millele piletid olid ostetud, ei väljunud. Piletid vahetati tasuta aeglase laeva omade vastu. Lisaks selgus, et meeskonna ühel tugevamal liikmel Heiki Niglasel on pass kadunud ja ta ei saagi meiega kaasa sõita. Heiki leidis oma passi siiski mõne tunni jooksul üles ja ta tuli teistele järgmise laevaga üksi järele. Kuna oli torm, vahetati tal laevapilet tasuta välja. Nii piirdus tema materiaalne kahju kulutustega Helsingi linnatranspordile ja rongipiletile Turusse.

Nagu tihtipeale varemgi, võitis ka seekord võistluse Peterburi meeskond. Peterburi sai 93 punkti 100 võimalikust. Eesti võistkond esines kehvalt, tulles koos Soomega 50 punktiga 7. kohale.

Näitena ühest huvitavamast ülesandest pakume 14. ülesande.

> Sfäärpinnal märgitakse 2006 punkti. Tõesta, et selle pinna saab lõigata 2006 võrdseks tükiks nii, et iga tüki sisepiirkonnas on täpselt üks märgitud punkt.

Kuna võistlusel osaleb 11 riiki ja ülesandeid on 20, siis keskmiselt on komplektis umbes 2 ülesannet igalt maalt. Võistluse žürii valib ülesanded kõigi maade kõigi pakutud ülesannete hulgast. Eestil ei läinud ka siin kuigi hästi: komplekti mahtus vaid 1 meie pakutud ülesanne. Eriti populaarsed olid aga Läti ülesanded, neid sai vist lausa 8 tükki sisse. Kasu lätlastel sellest polnud, Läti võistkond sai 42 punktiga 9. koha.

Eesti pakutu oli komplekti 19. ülesanne.

> Kas leidub selline positiivsete täisarvude jada $a_1, a_2, a_3, \ldots$, et iga positiivse täisarvu n korral jagub jada mistahes n järjestikuse elemendi summa arvuga n^2?

Talvine lahtine võistlus

Sügisel žürii kokku tulles tõusis tõsiselt üles alaline probleem töö kuhjumisest aasta esimestel kuudel, kus lühikeste ajavahemike järel

on alati korraldatud olümpiaadi piirkonnavoor, kevadine lahtine võistlus ja olümpiaadi lõppvoor.

Võeti vastu otsus tuua kevadine lahtine võistlus varasemaks, viies ta läbi Tartus koos igaaastase talvise õppesessiooniga, kuhu kutsutakse umbes poolsada paremat olümpiaadilast, kuid kus omal kulul võivad osaleda ka teised asjast huvitatud kooliõpilased. Nii pandi alus talvisele lahtisele võistlusele. Esimene kord uutmoodi korda oligi tänavu. Aasta 2006 on seetõttu unikaalne – selle aastanumbri sisse mahtus kokku kolm lahtist võistlust.

10. detsembri lahtine võistlus toimus, nagu lahtised võistlused ikka, nooremas ja vanemas rühmas tavapäraste osavõtukriteeriumidega. Kummaski rühmas oli võimalik saada kuni 35 punkti. Auhinnatute tulemused olid järgmised.

Noorem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Auhind
1.	Kairi Kangro	HTG	10.	31	I
2.	Viktor Karabut	AG	10.	30	I
3.	Siim-Ilmar Nopri	CRJG	10.	28	II
4.	Heino Soo	HTG	10.	21	III
5.	Tarmo Pilt	HTG	10.	20	III
6.	Aleksandr Šved	TTRK	8.	19	III
6.	Sander Tammesoo	IPK	9.	19	III
6.	Andres Aas	TPL	10.	19	III
6.	Jonatan Jõks	TRK	10.	19	III
6.	Lauri Taaleš	NRG	10.	19	III

Vanem rühm

Koht	Nimi	Kool	Klass	Punkte	Auhind
1.	Heiki Niglas	T37KK	11.	24	I
2.	Jevgeni Martjušev	TTRK	12.	19	II
3.	Toomas Krips	HTG	12.	17	II
4.	Ivan Avanessov	AG	12.	16	II
5.	Tanel Teinemaa	TRK	11.	14	III
6.	Fjodor Gainullin	TTRK	11.	13	III

Võistluse huvitavamaid ülesandeid oli vanema rühma 2. ülesanne.

> Kas leidub naturaalarv $n > 2$, mille korral mingi n järjestikuse täisarvu ruutude summa on omakorda täisarvu ruut?

See ülesanne niitis võistlejate punktiarveid tublisti. Ühtki täislahendust polnud, maksimaalselt saadi 3 punkti 7-st. Lugeja võib proovida, kui kaua lahenduse leidmine temal aega võtab.

Kokkuvõte

Aasta 2006 jättis matemaatikaolümpiaadide ajalukku ebameeldiva jälje ilmnenud pettuse näol, mida juba mainisime. Kuigi ametlikult on räägitud vaid ühest petisest, on tegelik olukord vastikum.

Lõppvooru tööde parandamise ajal juhtis Reimo Palm žürii tähelepanu mitte ühele, vaid neljale tööle, mis kõik paistsid žürii lahendust kahtlaselt kopeerivat. Tööde koodid olid veel avamata, nii et kahtlaste tööde autorid polnud teada. Koodide avamisel selgus, et need neli olid parajasti Tallinna Tõnismäe Reaalkooli 12. klassi õpilased. Žürii liikmete vestluses tuli välja, et sarnaseid kahtlusi sama seltskonna suhtes oli tekkinud ka varem. Paistis nii, et žürii materjalid jõuavad mõne õpilaseni enne võistlusi. Politsei uurimine tuvastaski, et üks mainitud neljast õpilasest, Pavel Plotnikov, oli ebaseaduslikult sisenenud ühe žürii liikme kodukataloogi. Lisaks olümpiaaditulemuste tühistamisele sai ta karistuseks rahatrahvi. Plotnikov väitis, et ta tegutses üksi; tema kolm koolivenda end süüdi ei tunnistanud ja jäid karistuseta. Siiski jääb tõsine kahtlus, et ka nemad said osa oma kõrgetest tulemustest ebaausalt.

Igatahes 2006 valikvõistluse ajaks oli žürii materjalide leke peatatud ja selle võistluse ülalgi ära toodud tulemused peaksid kajastama kõigi osavõtjate tegelikku matemaatikataset nii hästi kui võimalik. Kuna võistkondade komplekteerimisel on žürii võrdlemisi vaba, jäeti IMO võistkonnast kõik kahtlusalused välja.

Tõsised pettusekahtlused kerkivad aeg-ajalt üles ka kõige kõrgemal tasemel – rahvusvahelisel matemaatikaolümpiaadil. Viimati juhtus see aastal 2003, kui Bulgaaria võistkond sai täies koosseisus kuldmedalid, lüües riikide arvestuses isegi Hiinat. Kuna leket kindlalt tuvastada ei õnnestunud, jäeti tulemused ametlikult jõusse.

Rahvusvahelise matemaatikaolümpiaadi žürii istungitel on seoses võimalike pettustega võrdlusena näiteks toodud bridživõistluste reegleid, kus kohtunikud võivad paari ka palja pettusekahtluse põhjal midagi selgitamata diskvalifitseerida. Kõik osavõtjad teavad ja aktsepteerivad seda, kui lähevad bridži mängima. Seni on olümpiaadil pettusekahtlusi siiski sedavõrd harva ette tulnud, et sellised meetodid pole veel heakskiitu leidnud.

Selline on olümpiaadi paheline külg.

Meenutame lõpetuseks ka inimesi, kes vaatamata selle külje olemasolule ja teravale esilekerkimisele kõigi nende võistlustega tegelevad.

Olümpiaadi žürii ametlik koosseis määratakse üldiselt igal sügisel kogu õppeaastaks. Käesolevas kirjatükis puudutatakse võistlusi õppeaastatest 2005/2006 ja 2006/2007. Nende õppeaastate koosseisudes on vaid üksikud erinevused, mis tingitud sellest, et üks või teine inimene on tööasjus Tartust eemale kolinud ning saab seetõttu vähem asja juures olla. Vähemalt ühel neist kahest õppeaastast kuulusid žüriisse Härmel Nestra (esimees), Elts Abel, Mati Abel, Kalle Kaarli, Oleg Košik, Kaie Kubjas, Emilia Käsper, Hendrik Nigul, Uve Nummert, Reimo Palm, Indrek Zolk, Jan Willemson ja Raili Vilt.

Üldiselt pole ametlikul koosseisul suuremat tähtsust. Suuremamahuliste tööde puhul kutsume alati abiväge väljastpoolt ametlikku žüriid ning samas hoiame ametlikult žürii liikmena vanemaid tegijaid, kelle õlul olümpiaadiliikumine aastaid tagasi oli, kuid kes praegu enam asjaga peaaegu ei tegele.

Aastal 2006 aitasid žüriid ülesannete pakkumise ja/või tööde parandamisega ühel või teisel võistlusel Mart Abel, Juhan Aru, Hannes Jukk, Meelis Kull, Aleksei Lissitsin, Kati Metsalu-Smotrova, Oleg Petšonkin, Martin Pettai, Jekaterina Prostakova, Ago-Erik

Riet, Anton Stalnuhhin, Laur Tooming, Konstantin Tretjakov ja Eno Tõnisson.

Ülesloetud inimestest enamik on õpilasena Eesti võistkonnas IMOl käinud endised olümpiaadilapsed. Tänu nende rohkusele on meil juba aastaid võimalik olnud kõige pingelisematel perioodidel jagada töö nii laiali, et igaühe töömaht on täiesti inimlik.

Kõige suuremat tööintensiivsust vajab lõppvoor oma tööde parandamise ja apellatsiooniga kahe päeva jooksul. Viimastel aastatel on lõppvoorus olnud isegi 21 või 22 parandajat 20 ülesande kohta – mõni on varus või uurib üht ülesannet kaks parandajat. Lõppvoor kujuneb pingelise töö kõrval alati omamoodi pidupäevaks, kus üle aegade olümpiaadide kaudu tuttavaks saanud inimesed jälle kohtuvad. Tänapäeval ei kujuta ettegi, kuidas saadi hakkama kümme ja enam aastat tagasi, kui see pikk pink puudus.

Soovime Eesti olümpiaadiliikumisele pikka iga ja vapraid toetajaid!

KONVERENTSID JA SEMINARID

Rahvusvaheline matemaatikute kongress ICM 2006 Madridis

Peeter Puusemp
Tallinna Tehnikaülikool

Palacio Municipal de Congresos de Madrid

22.-30. augustini 2006 toimus Hispaania pealinnas Madridis rahvusvaheline matemaatikute kongress (lühendatult ICM 2006[6]). Käesolev kongress oli järjekorras juba kahekümne viies. Esimene rahvusvaheline matemaatikute kongress toimus 1897. a. Zürichis, teine 1900. a. Pariisis[7]. Edasi on rahvusvahelised matemaatikute kongressid toimunud iga nelja aasta tagant (v.a. maailmasõdade perioodid). Seni on ainult Zürich korduvalt olnud mainitud kongresside kohaks ja nimelt kolmel korral: 1897. a., 1932. a. ja 1994. a. Eelmine kongress ICM 2002 korraldati Beijingis (Hiina) 20.-28. augustini 2002. a. Eesti matemaatikutest osalesid käesoleval kongressil Urve Kangro, Mati Kilp ja Kalle Kaarli Tartu Ülikoolist ning Jaan Janno, Enno Pais ja Peeter Puusemp Tallinna Tehnikaülikoolist. Madridi kongressile registreerus 3441 osavõtjat 125 riigist.

[6]Kongressi kodulehekülg: `http://www.icm2006.org/`
[7]Seal esitas David Hilbert oma 23 kuulsat probleemi.

Avatseremoonia

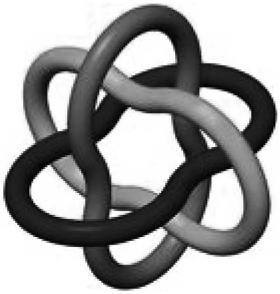
Kongress toimus avaras spetsiaalselt kongresside läbiviimiseks ehitatud moodsas Madridi Kongresside Palees – Palacio Municipal de Congresos de Madrid. Olime juba kongressile registreerudes eelmisel päeval lunastanud pääsmed avatseremooniale peasaali. Läksime avatseremooniale aegsasti. Osutus, et toimisime õigesti: kongressihoonet ümbritses politseinike armaada ja sissepääsuks oli moodustunud nii umbes 200-meetrine järjekord. Sisenedes palee fuajeesse, ootas osavõtjaid turvakontroll, mis oli sarnane lennujaamades toimuva turvakontrolliga. Sellise tõhusa kontrolli põhjus selgus kongressi avamisel – kohale oli saabunud Tema Majesteet Hispaania kuningas Juan Carlos I. Kongressi avatseremooniat juhtiski kuningas isiklikult.

Kongressi avasõnad ütles praegune Rahusvahelise Matemaatika Liidu (IMU – International Mathematical Union) president Sir John Ball. Seejärel tervitas osavõtjaid ICM 2006 organiseermiskomitee president Manuel de León. Järgnesid kohalike võimuorganite esindajate sõnavõtud: esinesid Madridi linnapea Alberto Ruiz Gallardón, Hispaania haridus- ja teadusminister Mercedes Cabrera Calvo-Sotelo ja Madridi regionaalomavalitsuse president Esperanza Aguirre Gil de Biedma.

Muusikalise vahepala[8] järel andis kuningas sõna IMU sekretärile Phillip Griffithsile, kes tutvustas IMU logot. Seni puudus Rahvusvahelisel Matemaatika Liidul oma logo. Vastava konkursi tulemusena valis IMU oma vahetult enne Madridi kongressi 19.-20. augustil Santiago de Compostelas (Hispaania) toimunud peaassambleel saabunud tööde hulgast välja ja kinnitas IMU logo. Logo autoriks on Berliini Tehnikaülikooli matemaatilise visualiseerimise professor John M. Sullivan. Logo valiti välja umbes 80 pakutud variandi hulgast. Kongressist osavõtjatele demonstreeriti videot, kus kirjeldati logo tekkeprotsessi, mis on kättesaadav ka

[8] Muusikat esitas ansambel Ara Malikiani juhatusel. Ansambel sai 2006. a. Hispaania Kunstide ja Teaduste Akadeemia muusikapreemia nn. moodsa muusika alal.

internetist[9].



IMU logo

Järgnevalt kuulutati välja Rahvusvahelise Matemaatika Liidu Fieldsi, Nevanlinna ja Gaussi preemiate laureaadid. Laureaadid olid välja valinud vastavad komisjonid ning need kinnitati Santiago de Compostelas toimunud peaassamblee poolt. Samuti avalikustati mainitud komisjonide koosseisud. Preemiad andis üle Tema Majesteet kuningas Juan Carlos I.

Fieldsi preemia laureaate esitles Sir John Ball. Fieldsi preemia 2006. a. laureaadid on:

Andrei Okunkov – tööde eest, mis rajavad silla tõenäosusteooria, esituste teooria ja algebralise geomeetria vahel
Grigori Perelman – panuse eest geomeetrias ja revolutsiooniliste visioonide eest Ricci voo analüütilise geomeetrilise struktuuri osas;
Terence Tao – panuse eest osatuletistega diferentsiaalvõrrandite teoorias, kombinatoorikas, harmoonilises analüüsis ja aditiives arvuteoorias;
Wendelin Werner – panuse eest stohhastilise Loewneri evolutsiooniteooria arendamisel, kahemõõtmelise Browni liikumise geomeetrias ja konformses väljateoorias

Nimetatud laureaatidest võtsid preemia ja vastava medali kuningas Juan Carloselt vastu ainult A. Okunkov, T. Tao ja W. Werner. Grigori Perelman loobus preemiast. Loobumise põhjus on jäänud avalikkusele segaseks, kuna Perelman ise seda pole avalikustanud.

[9] `http://torus.math.uiuc.edu/jms/Images/IMU-logo/`

Kongresside palee fuajee

Nevanlinna preemia komitee esimees Margaret Wright esitles Nevanlinna preemia laureaati Jon Kleinbergi.

Gaussi preemia komisjoni esimees Martin Grötschel tegi teatavaks esmakordselt omistatava Gaussi preemia laureaadi. Selleks on jaapani matemaatik Kiyoshi Ito. Kuna Ito on juba 91-aastane ja tema tervis ei võimaldanud osa võtta kongressist, siis tänusõnad preemia omistamise eest ütles tema noorim tütar Junko Ito, kes on lingvistikaprofessor Kalifornia Ülikoolis (Santa Cruz).

Preemiate laureaate tutvustame lähemalt järgnevates alajaotustes.

Avatseremoonia lõpetas kuninga Juan Carlos I sõnavõtt. Kogu tseremoonia kestis umbes poolteist tundi. Järgnevalt olid kõik osavõtjad kutsutud fuajeesse banketile.

Fieldsi preemia laureaadid

Fieldsi preemia koos vastava medaliga antakse iga nelja aasta tagant kuni neljale kuni 40-aastasele silmapaistvaid tulemusi saavutanud matemaatikule. Esimesed Fieldsi preemiad said 1936. aastal soome matemaatik Lars Valerian Ahlfors (1907–1996) ja ameerika matemaatik Jesse Douglas (1897–1965). 2006. aastal valis Fieldsi preemia laureaadid välja komisjon järgmises koosseisus:

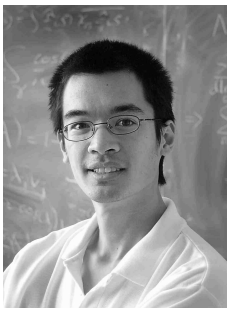
John M. Ball – esimees
Enrico Arbarello
Jeff Cheeger

Donald Dawson
Gerhard Huisken
Curtis McMullen
Alexey Parshin
Tom Spencer
Michèle Vergne

Nagu juba eelpool mainiti, omistas komisjon 2006. a. Fieldsi preemiad järgmisele neljale matemaatikule: Andrei Okunkov[10], Terence Tao, Wendelin Werner ja Grigori Perelman. Järgnevalt esitame laureaatide lühikesed elulood ning kirjeldame lühidalt probleeme, mille eest neid premeeriti.

Grigori Perelman sündis Leningradis (nüüd Sankt Peterburg) 13. juunil 1966. a. Ta lõpetas Leningradi keskkooli nr. 239 matemaatika- ja füüsika eriklassi ning astus Leningradi Riikliku Ülikooli matemaatika- ja mehaanikateaduskonna matemaatikaosakonda. Selle lõpetamise järel oli ta samas aspirantuuris ja kaitses füüsika-matemaatikakandidaadi kraadi teemal "Sadulpinnad eukleidilistes ruumides". Samal ajal oli Perelman talendikas viiuldaja ja hea lauatennisist.

Grigori Perelman



Terence Tao

Aspirantuuri järel siirdus Perelman tööle NSVLiidu Teaduste Akadeemia Steklovi nimelise matemaatikainstituudi Leningradi osakonda, kus tema juhendajateks olid Aleksandr Danilovitš

[10] Võõrkeeltes tavatseb A. Okunkov kirjutada oma nime kujul "Okounkov".

Aleksandrov ja Juri Dmitrijevitš Burago. 1992. a. kutsuti ta üheks semestriks uurimistööle New Yorki Ülikooli ja Stony Brooki Ülikooli. Seejärel võttis ta 1993. a. vastu pakkumise kaheaastaseks uurimistööks Kalifornia Ülikoolis (Berkeley). Perelman pöördus tagasi Steklovi instituuti 1995. a. suvel.

Grigori Perelman sai Fieldsi preemia põhiliselt kolme interneti matemaatikaarhiivi üles pandud töö eest[11]. Nendes töödes on esitatud muude tulemuste seas ka juba 1904. a. prantsuse matemaatiku Henri Poincaré poolt püstitatud hüpoteesi lahendus (vt. V. Abramovi artiklit selles aastaraamatus). Poincaré hüpotees kõlab järgmiselt: iga lihtsalt sidus kolmemõõtmeline kinnine muutkond on homöomorfne (topoloogiliselt samaväärne) kolmemõõtmelise sfääriga. Nagu ülal juba märgiti, loobus Perelman talle omistatud preemiast.

TERENCE TAO sündis 17. juulil 1975. a. Lõuna-Austraalias Adelaide's. Rahvuselt on ta hiinlane. Tema vanemad on esimese põlvkonna immigrandid Hongkongist. Käesoleval ajal elab Tao koos oma abikaasa ja pojaga Los Angelesis (USA). Terence Tao ilmutas erakordseid matemaatilisi andeid väga noorelt. Ta oli aastail 1986, 1987 ja 1988 noorim osavõtja rahvusvahelistel koolinoorte matemaatikaolümpiaadidel ja võitis neilt vastavalt pronks-, hõbe- ja kuldmedali. Neljateistaastaselt alustas Tao teaduslikku uurimustööd ja 17-aastaselt sai ta juba magistrikraadi Flindersi Ülikoolist (Adelaide, Austraalia). Aastail 1992–1996 oli Tao kraadiõppes Princetoni Ülikoolis Elias Steini juhendamisel. Doktorikraadi sai ta 20-aastaselt ja alates sellest ajast töötab Kalifornia Ülikoolis Los Angelesis, kus ta promoveeriti professoriks 24-aastaselt. Lisaks Madridis saadud Fieldsi preemiale on Taol ka teisi preemiaid: Salemi preemia (2000), Bocheri preemia (2002), Clay uurimisauhind (2003) ja Ameerika Matemaatikaühingu Levi L. Conanti preemia

[11] Perelman, Grisha (11. nov. 2002) *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications.* arXiv:math.DG/0211159.

Perelman, Grisha (10. märts 2003) *Ricci flow with surgery on three-manifolds.* arXiv:math.DG/0303109.

Perelman, Grisha (17. juuli 2003). *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds.* arXiv:math.DG/0307245.

(2005).

Terence Tao uurimisvaldkondadeks on harmooniline analüüs, osatuletistega diferentsiaalvõrrandid, kombinatoorika, analüütiline arvuteooria ja esituste teooria. Nendes valdkondades tehtud fundamentaalsete uurimistööde eest omistatigi talle Fieldsi preemia.

Andrei Okunkov sündis 1969. a. Moskvas. Kõrghariduse ja doktorikraadi sai ta Moskva Riiklikust Ülikoolist. Okunkovi doktoritöö teemaks oli *"Admissible Representation of Gelfand Pairs Associated with the Infinite Symmetric Group"*, juhendajaks aga professor Aleksandr Kirillov. Alates 2002. aastast on ta professor Princetoni Ülikoolis. On saanud Euroopa Matemaatikaühingu auhinna (2004).

A. Okunkovi uurimisvaldkondadeks on juhuslikkus ja selle seosed esituste teooriaga ja algebralise geomeetriaga. Need seosed on võimaldanud lahendada mitmeid algebralises geomeetrias ja statistilises mehaanikas esile kerkinud probleeme. Neid saavutusi ongi hinnatud Fieldsi preemiaga.

Wendelin Werner sündis 1968. a. Saksamaal, ehkki rahvuselt on ta prantslane. Prantsuse kodakondsuse sai ta 1977. a. W. Werner õppis aastail 1987–1991 École Normale Supérieure'is. Doktorikraadi sai ta Pierre ja Marie Curie Ülikoolis 1993. a., tema juhendajaks oli Jean-Francois Le Gall. Alates 1997. aastast on W. Werner professor Lõuna-Pariisi Ülikoolis Orsays ja osalise koormusega ka École Normale Supérieure'is. Ta on saanud ridamisi mitmesuguseid preemiaid: Rollo Davidsoni preemia (1998), Euroopa Matemaatikaühingu preemia (2000), Fermat preemia (2003), Jacques Herbrandi preemia (2003), Lòeve preemia (2005) ja Pólya preemia (2006).

Andrei Okunkov

Wendelin Werner

W. Werneri uurimisvaldkondadeks on Browni liikumise geomeetrilised probleemid ja konformne väljateooria. Tema tulemused on avaldanud märkimisväärset mõju nii matemaatika kui ka füüsika mitmete rakenduslike pobleemide lahendamisele.

Nevanlinna preemia laureaat

Nevanlinna preemia omistatakse iga nelja aasta tagant IMU poolt silmapaistva panuse eest arvutiteaduste kõigi aspektide arengusse. Laureaat valitakse välja vastava komisjoni poolt ja tehakse teatavaks rahvusvahelisel matemaatikute kongressil. Komisjoni koosseis avalikustatakse samuti alles kongressil. Laureaadi vanus ei tohi ületada 40 aastat kongressi aasta 1. jaanuaril nagu Fieldsi preemiagi puhul. Preemia loodi 1981. a. IMU täitevkomitee otsusega ning nimetati soome matemaatiku Rolf Nevanlinna (1895–1980) järgi. R. Nevanlinna oli Helsingi Ülikooli rektor ja on olnud ka IMU president. Preemiat finantseerib Helsingi Ülikool. Esimene Nevanlinna preemia väljastati 1982. a.

2006. aastal valis Nevanlina preemia laureaadi komisjon järgmises koosseisus:

Margaret H. Wright – esimees
Samson Abramsky
Franco Brezzi
Gert-Martin Greuel
Johan Hàstad

Jon Kleinberg

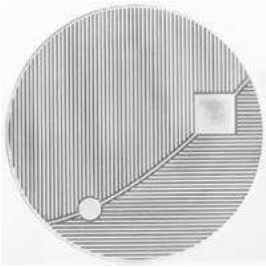
Nagu juba mainisime, osutus 2006. a. Nevanlinna preemia laureaadiks Jon Kleinberg. Varem on saanud Nevanlinna preemia Robert Tarjan (1982), Leslie Valiant (1986), Alexander Razborov (1990), Avi Wigderson (1994), Peter Shor (1998) ja Madhu Sudan (2002).

Jon Kleinberg sündis 1971. a. Bostonis (Massachusetts, USA). Doktorikaadi sai ta Massachusettsi Tehnoloogiainstituudist. Käesoleval ajal on ta Cornelli Ülikooli arvutiteaduste professor. J. Kleinbergi teaduslike tööde nimekiri on aukartustäratav (vt.: `http://www.cs.cornell.edu/home/kleinber/`).

Gaussi preemia laureaat

Gaussi preemia on uus preemia. Gaussi preemia anti välja esmakordselt Madridi kongressil. See antakse matemaatikule, kelle matemaatikaalased uuringud on leidnud laialdast rakendust väljaspool matemaatikat, kas tehnikas, äris või lihtsalt igapäevases elus. See preemia asutati ühiselt Saksa Matemaatikaühingu (DMV) ja Rahvusvahelise Matemaatikaühingu (IMU) poolt. Preemiat administreerib DMV. Preemia koosneb rahalisest summast (käesoleval ajal 10000 eurot) ja medalist. Medali kujundas Jan Arnold. Medali

esiküljel on C.F. Gaussi portree, tagaküljel on aga kujutatud väikeplaneet Ceres ja ruut, mis illustreerib asjaolu, et Gauss kasutas tema poolt leiutatud vähimruutude meetodit Ceresi trajektoori arvutamiseks.



2006. a. Gaussi preemia laureaadi valis välja komisjon koosseisus:

Martin Grötschel – esimees

Robert E. Bixby

Frank den Hollander

Stephane Mallat

Ian Sloan

Esimeseks Gaussi preemia laureaadiks kuulutati jaapani matemaatik Kiyoshi Ito. K. Ito uurimisvaldkonnaks oli stohhastiline analüüs. Tema teooriat on hakatud nimetama *Ito arvutuseks (Ito calculus)*. Selle arvutuse põhimõisteks on nn. *Ito integraal* ja üheks põhilauseks *Ito lemma*. Ito arvutust rakendatakse laialdaselt juhuslike protsesside teoorias ja ka finantsmatemaatikas. Gaussi preemia andis Itole üle IMU president John Ball 14. septembril 2006. a. Kyotos.

John Ball ja Kiyoshi Ito (14.09.2006, Kyoto)

Kiyoshi Ito sündis 7. septembril 1915. a. Jaapanis. Ta lõpetas 1938. a. Tokyo Ülikooli matemaatika erialal ning töötas seejärel aastail 1939-1943 riiklikus statistikabüroos. 1943. a. asus ta tööle dotsendina Nagoya Ülikoolis. 1945. a. kaitses Ito doktoritöö Tokyo Ülikoolis. 1952. aastast oli ta Kyoto Ülikooli professor. Sealt ta ka emeriteerus 1979. a. Kiyoshi Ito on saanud mitmeid kõrgeid autasusid: Asahi preemia (1978), Jaapani Akadeemia preemia (1978), Fujiwara preemia (1987), Wolf'i preemia (1987) ja Kyoto preemia (1998). Ta on ka Jaapani Teaduste Akadeemia liige, Prantsuse Teaduste Akadeemia välisliige ja USA Riikliku Teaduste Akadeemia välisliige.

Kongressi programmist

Madridi kongressil esitati nelja liiki ettekandeid: 60-minutilised plenaarettekanded (kavandatud organisaatorite poolt), 45-minutilised tellitud ettekanded, 20-minutilised lühiettekanded ja 60-minutilised posterettekanded. Plenaarettekanded peeti enne lõunat ja need toimusid kongressihoone peasaalis. Sinna jätkus istekohti kõigile soovijaile (v.a. avatseremoonia ajal). Ülejäänud ettekanded toimusid pärast lõunavaheaega ja üheaaegselt erinevates sektsioonides. Temaatika järgi olid ettekanded jaotatud järgmistesse 20 sektsiooni:

01 Loogika ja matemaatika alused (5, 6, 4)
02 Algebra (7, 44, 30)
03 Arvuteooria (10, 37, 13)
04 Algebraline ja kompleksne geomeetria (9, 29, 11)
05 Geomeetria (13, 41, 29)
06 Topoloogia (8, 29, 9)
07 Lie rühmad ja Lie algebrad (12, 17, 7)
08 Analüüs (8, 52, 13)
09 Operaatoralgebrad ja funktsionaalanalüüs (6, 31, 13)
10 Harilikud diferentsiaalvõrrandid ja dünaamilised süsteemid (11, 48, 14)
11 Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid (11, 62, 21)
12 Matemaatiline füüsika (11, 28, 9)
13 Tõenäosusteooria ja statistika (13, 35, 15)
14 Kombinatoorika (9, 36, 9)
15 Arvutiteaduse matemaatilised aspektid (7, 18, 12)
16 Numbriline analüüs ja arvutusmeetodid (7, 39, 20)
17 Kontrolliteooria ja optimeerimine (7, 31, 24)
18 Matemaatika rakendused teistes teadustes (9, 45, 23)
19 Matemaatikaharidus ja matemaatika populariseerimine (3, 23, 17)
20 Matemaatika ajalugu (2, 18, 4)

Programmi kohaselt toimus 20 plenaarettekannet, 181 tellitud ettekannet, 669 lühiettekannet ja 297 posterettekannet[12]. Lisaks oli organiseeritud mitmeid paneeldiskussioone erinevatel teemadel. Ülal sektsiooni nimetuse järel sulgudes antud kolm arvu näitavad vastavalt sektsioonis esitatud tellitud ettekannete, lühiettekannete ja posterettekannete arvu.

Kuna plenaarettekanded kajastavad kõige rohkem kaasaegse matemaatika suundumusi ja populaarsemaid uurimisvaldkondi, siis esitame siinkohal nende loetelu, jättes ettekannete pealkirjad tõlkimata.

[12]Käesolevate ridade autor ei jõudnud kontrollida, kas need programmikohased ettekanded ka kõik toimusid.

Richard Hamilton, *Columbia University, New York, USA*
The Poincaré conjecture

Alfio Quarteroni, *École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Switzerland and Politecnico di Milano, Milan, Italy*
Cardiovascular mathematics

Terence Tao, *University of California, Los Angeles, USA*
Long arithmetic progressions in the primes

Avi Wigderson, *Institute for Advanced Study, Princeton, USA*
P, NP and mathematics: a computational complexity perspective

Percy Deift, *Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, USA*
Universality for mathematical and physical systems

Richard P. Stanley, *Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA*
Increasing and decreasing subsequences

Henryk Iwaniec, *Rutgers University, Piscataway, USA*
Prime numbers and L-functions

Étienne Ghys, *École Normale Supérieure de Lyon, Lyon, France*
Knots and dynamics

Ib Madsen, *Aarhus University, Aarhus, Denmark*
Moduli spaces from a topological viewpoint

Iain Johnstone, *Stanford University, Stanford, USA*
High dimensional statistical inference and random matrices

Robert V. Kohn, *Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, USA*
Energy-driven pattern formation

Sorin Popa, *University of California, Los Angeles, USA*
Deformation and rigidity for group actions and von Neumann algebras

Michèle Vergne, *École Polytechnique, Palaiseau, France and Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris, France*

Applications of equivariant cohomology

ARKADI NEMIROVSKI, *Technion - Israel Institute of Technology, Haifa, Israel*
Advances in convex optimization: conic programming

KAZUYA KATO, *Kyoto University, Kyoto, Japan*
Iwasawa theory and generalizations

JEAN-PIERRE DEMAILLY, *Université Joseph Fourier, Grenoble, France*
Compact Kähler manifolds and transcendental techniques in algebraic geometry

RONALD DEVORE, *University of South Carolina, Columbia, USA*
Optimal computation

JUAN LUIS VÁZQUEZ, *Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, Spain*
Nonlinear diffusion, from analysis to physics and geometry

YAKOV ELIASHBERG, *Stanford University, Stanford, USA*
Symplectic field theory and its applications

ODED SCHRAMM, *Microsoft Corporation, Redmond, USA*
Random, conformally invariant scaling limits in 2 dimensions

Eraldi oli kongressi programmi lülitatud Fieldsi ja Nevanlinna preemia laureaatide ettekanded. Kuna G. Perelman ei osalenud kongressil, siis kongressi esimese plenaarettekandena tutvustas Richard Hamilton Poincaré hüpoteesiga seotud probleeme. Olgu märgitud, et Hamilton on olnud üks teenekamaid Poincaré hüpoteesi uurijaid ja ta jõudis üsna lähedale selle lahendamisele. Lõpliku lahenduse andis Poincaré hüpoteesile Perelman oma uue lähenemisviisiga.

Terence Tao ülal mainitud plenaarettekanne reklaamiti kongressi käigus ümber nn. Fieldsi preemia loenguks. A. Okunkov pidas Fieldsi preemia loengu teemal *"Numerative geometry of courves in threefolds"* ja W. Werner teemal *"Random planar loops and conformal restriction"*. J. Kleinberg pidas Nevanlinna

preemia loengu teemal *"Complex networks and decentralized search algorithms"*. Gaussi preemia loengu teemal *"The work of Kiyoshi Ito and its impact"* pidas aga Hans Föllmer Berliini Humboldti Ülikoolist.

Kongressi kultuurilisi üritusi

Kongressi käiku kajastas iga päev ilmunud (v.a. avapäev) kongressi ajaleht "ICM 2006. Daily News". Selle tekst oli paralleelelt nii inglis- kui ka hispaaniakeelne. Palju tähelepanu pöörati seal Fieldsi, Nevanlinna ja Gaussi preemia laureaatidele. Ilmusid intervjuud nendelt või nende kohta. Eriti palju pühendati leheruumi Poincaré hüpoteesile ja Perelmani loobumisele Fieldsi preemiast. Ilmusid intervjuud mitme tuntud matemaatikuga: John Morgan[13] (Columbia Ülikool, New York, USA), László Lovász[14] (Ungari), Jim Carlson[15], Benoit Mandelbrot[16] (Yale'i Ülikooli emeriitprofesor, USA), Lennart Carleson[17]. Ajalehes tutvustati ka Madridi kongressi organisaatoreid.

Kongressipalee fuajees oli eraldi nurgake, kus stendidel paiknev näitus kajastas rahvusvaheliste kongresside ajalugu. Iga toimunud kongressi kohta oli plakateid, fotosid kuulsamatest osavõtjatest ja ka muid andmeid. Müüdi ka kongressi embleemiga särke ja muid meeneid (märkmikud, pastapliiatsid, postkaardid, postmargid jne.).

Eraldi korrusel oli erinevate kirjastuste näitused matemaatiliste

[13] J. Morgan avaldas koos Gang Tianiga (Princetoni Ülikool, USA) raamatu Poincaré hüpoteesist koos tõestustega, mis põhinesid Perelmani ideedele.

[14] L. Lovász valiti vahetult enne Madridi kongressi John Balli järglaseks IMU presidendi kohale.

[15] Jim Carlson on Clay Matemaatika Instituudi (CMI) president. CMI (Massachusetts, USA) loodi 1999. a. Bostoni ärimehe Landon T. Clay poolt. 2000. a. kuulutas CMI välja 7 preemiat, igaüks miljon dollarit, seitsme seni lahendamist vajava matemaatilise probleemi lahendajale. Neid probleeme hakati nimetama *Millenniumi probleemideks* ja need valis välja komisjon koosseisus Alain Connes, Arthur Jaffe, Andrew Wiles ja Edward Witten. Üks Milleeniumi probleemidest oli Poincaré hüpotees.

[16] B. Mandelbrot on fraktalite teooria looja.

[17] L. Carleson on rootsi matemaatik ja 2006. a. Abeli preemia laureaat.

raamatutega. Nendel oli alati palju külastajaid. Soovijatel oli võimalus raamatuid tellida soodsate hindadega.

Kongressist osavõtjatele organiseeriti osavõtjate endi kulul ekskursioone Toledosse, mis oli kunagi Hispaania pealinn, ja El Escoriali kloostrisse. El Escoriali klooster on tuntud kui Hispaania kuningate kunagine residents ja matmispaik.

Juba kongressi avapäeva teisest poolest algas kongresside palee sissekäigu esisel platsil mingi salapärane tegevus. Autokraanaga laaditi maha mingi suur täispuhutud autokummi (toori) kujuline kivi (ilmselt graniidist). Seejärel hakkas kivi juures elektridrelliga askeldama üks jaapanlase välimusega keskealine lühikest kasvu habemik. Ta muudkui puuris üksteise kõrvale auke, tahtes nagu kivi spiraalsel kujul poolitada. Peagi laekus ka informatsiooni habemiku tegevuse kohta. Selgus, et habemik on tuntud jaapani skulptor Keizo Ushio (sündinud 1951. a. Fukusaki linnas Jaapanis), kes on kuulsaks saanud oma skulptuuridega, mis kujutavad mitmesuguseid geomeetrilisi kujundeid, eriti Möbiuse lehte erinevates variatsioonides. Keizo Ushio töid on eksponeeritud näitustel, neid on erakogudes kui ka avalikes kohtades Jaapanis, Hispaanias, Norras, Saksamaal, Iisraelis, Indias, Austraalias, Uus-Meremaal, USA-s. Lugeja, kes soovib lähemalt tutvuda Keizo Ushio skulptuuridega, võib seda teha tema kodulehe kaudu[18].

Keizo Ushio ühe oma varasema skulptuuriga

[18] Vt.: `http://www2.memenet.or.jp/~keizo/0005.htm`

Kongressi viimaseks päevaks valmis tal ka skulptuur, mis kujutas kahte läbipõimunud Möbiuse lehte.

Keizo Ushio Madridis valminud skulptuur

Kõigi aegade parim matemaatik

Kongressi pressikeskuse poolt esitati 137-le kongressist osavõtjale (s.o. 4 protsenti osavõtjatest) küsimus, keda küsitletav peab kõigi aegade maailma parimaks matemaatikuks. Ühtlasi esitati valik võimalike kandidaatide nimesid. Lubatud olid ka omapoolsed ettepanekud. Küsitletavad reageerisid väga erinevalt, mõni väga emotsionaalselt, mõni üsna reserveeritult, kuid jäeti ka vastamata. Järgnevalt on esitatud küsitluse tulemusena tekkinud matemaatikute pingerida (protsenti küsitletavate arvust):

Gauss – 34
Euler – 14
Newton – 13
Riemann – 12
Archimedes – 11

Teised välja pakutud matemaatikud said juba alla 5 protsendi võimalikust 137-st häälest.

Lõputseremoonia

Kongressi lõputseremoonia toimus 30. augusti õhtul kell 18.00. Sõnavõttudega esinesid IMU praegune president John Ball ja uus president László Lovász. Nende sõnavõtud ei olnud pikad. J. Ball luges lõppenud kongressi edukaks ja avaldas tänu nii osavõtjatele kui ka korraldajatele. L. Lovász luges oma järgneva nelja aasta põhiülesandeks aidata igati kaasa järgmise, 26. rahvusvahelise matemaatikute kongressi organiseerimisele.

IMU otsuse kohaselt toimub järgmine rahvusvaheline matemaatikute kongress 19.-27. augustini 2010. a. India linnas Hyderabadis. India matemaatikute esindajad esitlesid järgmise kongressi asupaika ja kutsusid külalislahkelt osalema. Nad avaldasid arvamust, et India matemaatika on heal järjel ja nad saavad kongressi korraldamisega edukalt hakkama.

Seejärel esines ICM 2006 organiseerimiskomitee president Manuel de León ja kuulutas kongressi lõppenuks.

II Soome-Eesti Matemaatikakollokvium

Kalle Kaarli
Tartu Ülikool

2002. aasta mais toimus Eesti ja Soome matemaatika seltside korraldusel Tallinnas Soome-Eesti Kollokvium FinEst Math 2002. Ürituse eesmärgiks oli süvendada ja laiendada kontakte Soome ja Eesti matemaatikute vahel. Kollokviumil kuulati ära ligi 20 ettekannet, milles tutvustati Eesti ja Soome matemaatikute poolt viljeldavaid uurimissuundi. Et üritus läks korda, otsustati analoogilisi kogunemisi hakata korraldama regulaarselt.

Teine Soome-Eesti Matemaatikakollokvium sai teoks 4.-5. jaanuaril 2006 Tamperes. Erinevalt esimesest kollokviumist toimus see Soome Matemaatikapäevade raames. Päevade vahetud korraldajad olid Tampere Ülikooli matemaatika, statistika ja filosoofia osakond ning Tampere Tehnikaülikooli matemaatika instituut. Matemaatikapäevade kavas oli neli plenaarettekannet ning töötas kuus sektsiooni: analüüs, diskreetne matemaatika, statistika ja andmeanalüüs, rakendus- ja tööstusmatemaatika, matemaatiline süsteemiteooria, matemaatika didaktika. Lisaks loetletud n.ö. klassikalistele sektsioonidele töötas veel matemaatika tarkvara sektsioon.

Plenaarettekanded olid järgmised:

Lars-Erik Persson (Luleå Tehnikaülikool, Rootsi):
Hardy ja Carlemani tüüpi kaalutud võrratused.

Kalle Kaarli (Tartu Ülikool):
Polünomiaalse täielikkuse probleemid võrede jaoks.

Sašo Džeroski (Jožef Stefani Instituut, Sloveenia):
Relatsiooniline andmekaevandamine.

Matti Lassas (Helsinki Tehnikaülikool):
Geomeetrilised meetodid pöördülesannete korral.

Eestist osales üritusel 18 matemaatikut või 19, kui nende hulka arvata ka Helsinki Tehnikaülikooli doktorant Sven Laur. Lisaks

juba nimetatud plenaarettekandjale olid Tamperes Mart Abel, Jüri Afanasjev, Helle Hallik, Uno Hämarik, Marje Johanson, Vladimir Kutšmei, Evely Leetma, Joosep Lippus, Kristel Mikkor, Annemai Mölder, Märt Möls, Julia Polikarpus, Kalev Pärna, Natalia Saealle ja Darja Saveljeva Tartust ning Ülle Kotta ja Anne Tali Tallinnast. Enamik neist esines ka sektsiooniettekandega. Näeme, et domineeris noorem seltskond, kellest nii mõnigi sai oma esimese rahvusvahelise konverentsikogemuse. Samas võin kinnitada, et vaatamata sellele, et tegemist lähinaabritega, leidis midagi uut enda jaoks pea iga meie delegatsiooni liige. Usun ka, et midagi uut leidsid meie ettekannetest vastuvõtjad. Igal juhul rea ettekannete järel toimus asjalik diskussion.

Eelneva kokkuleppe kohaselt pakkusime omalt poolt korraldajatele 6 esinejat, kes pidid olema sektsioonide peaettekandjad. Loetleme need ettekanded:

M. ABEL: *Lõplikult moodustatud projektiivsete moodulite juurest Serre-Swan-Malliose teoreemi üldistuseni.*

J. AFANASJEV: *Eesti koolimatemaatika ainekava arengust 1990–2005 võrdluses Soomega.*

U. HÄMARIK: *Mittekorrektsete ülesannete regulariseerimine.*

Ü. KOTTA: *Universaalne meetod mitmete optimeerimisülesannete lahendamiseks.*

M. MÖLS: *Fikseeritud ja juhuslike faktorite vahel – lineaarsete segamudelite kontekst.*

K. PÄRNA: *Hulkade sobitamine jaotustega.*

Kohal olles ei paistnud küll eriti välja, et need ettekanded kuidagi eri staatuses olid, sest aega said kõik esinejad ühepalju. Tõsi küll, korraldajad katsid nimetatud isikute üritusel osalemise kulud. Peale selle olid kõik eestlastest osalejad vabastatud osavõtumaksust ja ka bankett oli meile tasuta.

Järgmine Soome-Eesti Matemaatikakollokvium otsustati korraldada Tartus 2009. a. teisel poolel. On selge, et see ei hakka sarnanema ei esimesele ega teisele kollokviumile. Ilmselt ei ole mõtet

korraldada midagi sarnast esimese kollokviumiga, kuhu oli kogunenud suhteliselt piiratud seltskond, peamiselt need, kellelt oli tellitud ettekanne. Samuti ei saa me ühitada Soome-Eesti kollokviumit meie traditsiooniliste matemaatikapäevadega, sest meil osalevad seal ka õpetajad ja me ei saa neid teha ingliskeelsetena. Minu nägemust mööda võiks FinEst Math 2009 sarnaneda meie kunagiste vabariiklike matemaatikakonverentsidega, kuid olema ingliskeelne ja mõnevõrra suurema rõhuga ülevaateettekannetele.

Seminar “Algebra ja tema rakendused”

Valdis Laan
Tartu Ülikool

Tartu Ülikooli algebraistid korraldasid 2006. aasta 5.–7. mail järjekordse seminari “Algebra ja tema rakendused”. Seminar toimus Koke külalistemajas, mis asub Kokõ külas Rõugõ ja Haanja vahel.

Osavõtjaid oli 23: Sándor Radeleczki Ungarist, Stefan Schmidt Saksamaalt, Peter Mayr Austriast, Aleksander Pinus Venemaalt, Jouni Järvinen, Ville Piirainen ja Erkko Lehtonen Soomest, Jānis Cīrulis, Sergejs Solovjovs, Irina Zvina ja Vadims Moldavskis Lätist ning Mart Abel, Mati Abel, Kalle Kaarli, Mati Kilp, Vladimir Kutšmei, Valdis Laan, Riivo Must, Peeter Puusemp, Ellen Redi, Nikita Salnikov, Lauri Tart ja Konstantin Tretjakov Eestist.

Ettekannetes puudutati topoloogilisi algebraid, universaalalgebrat, võre-, rühma-, poolrühma- ja kategooriateooriat. Ettekannete ja matemaatiliste mõttevahetuste vahel jäi aega ka kauni kevadilma ja Võromaa looduse nautimiseks. Sai matkatud Luhasuus, Kütiorus, Rõugõs ja Haanjas.

Matemaatikahariduse konverents Tartus

Jüri Afanasjev
Tartu Ülikool

Tartu Ülikooli puhta matemaatika instituudi matemaatika didaktikute korraldusel toimus 12.-13. mail 2006. a. Tartus seitsmes rahvusvaheline konverents *Matemaatika õpetamine ja selle perspektiivid*. Kõnealuste konverentside seeria emaürituseks oli 1984. a. Lätis, Liepaja Pedagoogilises Instituudis korraldatud kolme Balti vabariigi matemaatika didaktikute ühisseminar *Baltikumi koolimatemaatika ajaloo küsimusi*. Alates järgmisest, 1985. a. Tartus toimunud seminarist hõlmas ühisarutelude temaatika juba suuremat osa matemaatika didaktika valdkonnast. Edaspidi laienesid seminarid konverentsideks ning alates 1998. a. Leedus Šiauliai Ülikoolis peetud konverentsist *Teaching mathematics: retrospective and perspectives* on tegemist nüüdseks juba seitsmenda sellise konverentsiga. Kui konverentsiseeria algusaegadel oli osavõtjate ettekannete ja suhtluskeeleks peamiselt vene keel, siis viimastel konverentsidel on seda üha enam asendamas inglise keel.

Tartu konverentsil oli ligi 70 osavõtjat Eestist, Leedust, Lätist, Norrast ja Soomest. Kolmel plenaaristungil ja kolmes paralleelsektsioonis (koolimatemaatika, ülikoolimatemaatika ning arvutid ja matemaatika) esitati ettekandeid pea kõigist matemaatika didaktika valdkondadest. Ühisistungitel kuulati ettekandeid koolimatemaatika ajaloost (A. Ažubalis), matemaatika õppekavaarendusest (I. France ja E. Slokenberga, V. Dagienė, A. Andžāns, T. Lepmann ja J. Afanasjev), matemaatikaõpetajate koolitusest ja nende suhtumisest matemaatika õpetamisse (E. Pehkonen, B. Grevholm, J. Mencis), arvutite kasutamisest õppetöös (R. Prank ja E. Tõnisson) ning matemaatika õpetamisest kõrgkoolide mittematemaatiliste erialade üliõpilastele (E. Stankus). Norra Agderi Ülikooli (*Agder University College*) matemaatika didaktika professor Barbro Grevholm tutvustas kuulajatele põhjamaade matemaatika didaktika doktorikooli (*Nordic Graduate School in Mathematics Education*) tegevust ning kutsus sinna õppima noori ka Baltikumist.

Koolimatemaatika sektsioonis kõneldi koolimatemaatika ajaloost, selle terminoloogiast ning õppematerjalidest. Suur osa ettekannetest oli pühendatud üldpedagoogika ning psühholoogiaga seonduvates uurimissuundades nagu õpimotivatsiooni käsitlused, koostööpedagoogika, metakognitsioon, õpetajate ja õpilaste arusaamad ja uskumused jne. läbi viidud uurimuste tutvustamisele. Traditsiooniliselt kuulus osa koolimatemaatika sektsiooni ettekannetest hermeneutilise didaktika valdkonda. Mõned ülevaated käsitlesid erivajadustega, matemaatikas andekate õpilastega tehtavat tööd. Rühm Eesti teadlaste ettekandeid oli pühendatud Eestile eduka rahvusvahelise reaalainete ja matemaatika tasemeuuringu TIMSS 2003 tulemuste üksikasjalikumale analüüsimisele

Ülikoolimatemaatika sektsiooni ettekanded käsitlesid väga erinevaid matemaatika õpetamise tahke kõrgkoolides alates õppekavade sisust ja kooskõlastamisest kuni täiskasvanute matemaatilise koolituse psühholoogiliste probleemideni. Ka siin ei puudunud ettekanded hermeneutilise didaktika valdkonnast.

Arvutite ja matemaatika sektsioonis peeti küll teistest sektsioonidest vähem ettekandeid (6 ettekannet) kuid need kõik seostusid tihedalt koolitegelikkusega ning pakkusid erinevaid võimalusi matemaatikaõpetuse illustreerimiseks ning huvitavamaks, õpilasi enam haaravaks käsitlemiseks.

Konverentsi ettekannete kogumik peaks ilmuma trükist 2007. aasta esimesel poolel.

Konverentsi lõpetamisel esitasid kolleegid Läti ülikoolist kutse 2007. aasta maikuus Riias korraldatavale selle konverentsidesarja kaheksandale konverentsile.

SOBI 2006

Otu Vaarmann
BaltORSi president

Rahvusvaheline konverents "5th International Conference on Operational Research: **Simulation and Optimization in Business and Industry. SOBI 2006**" leidis aset 17.-19. maini Tallinnas Mustpeade Majas. See oli viies konverents Balti Operatsioonianalüüsi Seltsi (Baltic Operation Research Society (BaltORS)) eestvõttel korraldatud konverentside seeriast, millest kaks on korraldatud Lätis (1996, 2000) ja kaks Leedus (1998, 2003) ning selliste konverentside korraldajaks on idee ja kokkuleppe kohaselt rotatsiooni korras üks Balti riikidest. Siiani polnud Eesti oma kohustust täitnud ja oma võlga naabritele tasunud. Konverentsi SOBI põhikorraldajateks olid TTÜ Majandusteaduskond, matemaatikainstituut ja Küberneetika Instituut ning sponsoriteks Tallinna Tehnikaülikool (50 000 EEK) ja The Association of European Operational Research Societies (EURO) 2010 EUR suuruses summas. Kuigi operatsioonianalüüsi meetodid on laialdaselt ja igapäevaselt kasutusel ärinduses, tööstuses, logistikas, halduses jne, jäi osavõtjate arv 92 mitmesugustel põhjustel loodetust mõnevõrra väiksemaks. Seda eeskätt kodumaiste majandusteadlaste ja inseneride passiivsuse ja loiduse tõttu, kuigi just neile oligi peamiselt see nõupidamine orienteeritud, et meelitada neid teadmiste turule ja teada saada, milliste matemaatiliste probleemide lahenduste järele on ühtedel nõudlus ja milliseid lahendusmeetodeid on pakkuda teistel. Selle asemel, et agaralt kaasa lüüa, levitati kuulujutte, et see ettevõtmine on matemaatikute mängumaa. Vaatamata sellele, konverentsi tegususe ja sisukuse üle kurta ei saa. Konverentsil kuulati 64 ettekannet, millest 8 olid plenaarettekanded (45 min), mis kõik olid kõrgetasemelised. Esinemise järjekorras:

18. mai

TARMO SOOMERE: *Unusual wave and waterlevel conditions in the Baltic Sea during windstrom Gudrun in January 2005 and their modelling*

PEETER OJA: *Shape-preseving interpolation and histopolation*

VASILE POSTOLICA: *Efficiency. Recent results and related topics*

19. mai

ALEXIS TSOUKIAS (EURO President): *Branding OR*

TÕNU PUU: *Some nonlinear dynamic models in economics and regional science*

RASMUS KATTAI: *Estimating VECM of a converging economy: Applying time varying dynamic homogeneity condition*

HENRIKAS PRANEVICIUS: *Performance and behaviour analysis of complex systems using PLA formalism*

JAAN JANNO ja JÜRI ENGELBRECHT: *Identification of properties of microstructured materials by means of Gaussian wave packets and solitary waves*

Esindatud oli 8 riiki (Leedu, Eesti, Läti, Saksamaa, Prantsusmaa, Venemaa, Rumeenia, Rootsi). Kõige arvukamalt oli osavõtjaid Leedust, mille esindajad moodustasid peaaegu poole külaliste üldarvust, ja naljatamisi võib öelda, et seda konverentsi võib pidada leedu operatsioonianalüüsi spetsialistide väljasõiduistungiks Eestis, seda enam, et see konverents toimuski suurel määral leedulaste õhutamisel ja pealekäimisel, aga ühtlasi ka nende toekal abil ja mõjusamatel rahvusvahelistel sidemetel. Rahaline toetus EURO-lt õnnestus meil hankida Leedu Operatsioonianalüüsi Seltsi (LitORS) vahendusel. Samuti ettekannete kogumik publitseeriti Kaunases, Leedu riikliku kirjastuse "Tehnologija" väljaandena ja suures osas nende kulu ja kirjadega. Eestist oli osavõtjaid 25 ja Lätist 24. Meie olukord operatsioonianalüüsi vallas on võrreldav eesti korvpallurite positsiooniga Balti liigas, kellega ei taheta varsti enam ühes liigas

mängida, kuna Eesti meeskonnad on liiga nõrgad. Selle konverentsi korraldamisega saime pisut armuaega. Järgmine konverents sellest seeriast toimub loodetavasti aastal 2008 Riias ja järjekord jõuab meieni uuesti alles 5–6 aasta pärast.

Väljaspool seda konverentside seeriat leiab Leedus aset LitORSi eestvõttel ja BaltORSi toel suur ja esinduslik rahvusvaheline konverents EurOPT–2008:

Continuous Optimization and Knowledge-Based Technologies,
Nida (Neringa), Lithuania, May 20–23, 2008.

Juulis 2007 avatakse konverentsi koduleheküIg:
`http://www.mii.lt/europt-2008`.

Loodan, et sellest konverentsist saab tuge ja leiab innustust hääbumise märke näitav operatsioonianalüüsi alane uurimistöö Eestis. Vastupidiselt Eestile on ülemaailmseks trendiks operatsioonianalüüsi üha hoogustuv areng ja selle meetodite üha laialdasem levik ja tungimine teistesse distsipliinidesse ja mitmesugustesse, esmapilgul matemaatikavõõrastena tunduvatesse eluvaldkondadesse.

Siiras tänu kõigile kolleegidele ja sõpradele, kes nõu ja jõuga abiks olid ja kaasa aitasid konverentsi SOBI 2006 kordaminekule.

Eesti Matemaatika Päevad Jäneda mõisas

Andi Kivinukk
Tallinna Ülikool

Eesti Matemaatika Päevade peaaegu 20 aasta pikkune traditsioon jätkus 26.-28. juunil 2006 Jäneda mõisas. Kokkusaamist alustasime Jäneda mõisaga tutvumisega (vt. `www.janedaturism.ee`), mille järel jõime pärastlõunakohvi mõisa ajaloolises härrastemajas.

Esimese päeva õhtupoolikuks oli planeeritud neli ettekannet.

Esmaspäev, 26. juuni

Tõnu Möls, *Järvede, metsade ja niitude kontraste.*

Peep Uba, *GPS meteoroloogias ja matemaatikast selles.*

Ene-Margit Tiit, *Matemaatilise statistika seostest mitmesuguste rakendusvaldkondadega.*

Indrek Zolk, *Olümpiaadiülesannete andmebaas.*

Tavaliselt matemaatikapäevade esimene õhtu veedetakse ühiselt kas pikema õhtusöögiga või korraldatakse saunaõhtu. Seekord istuti siis koos Musta Täku Tallis ja hilisõhtul külastas väiksem seltskond matemaatikuid ka külalistemaja sauna.

Teise päeva ennelõunases sektsioonis kuulasime kolme matemaatilist ettekannet ning seoses koolimatemaatika uue õppekava koostamisega alustati diskussioone ka sellel teemal.

Teisipäev, 27. juuni

Evely Leetma: *Silumisülesanded (funktsiooni taastamine diskreetsete andmete põhjal).*

Raul Kangro: *Madala hälbivusega jadad ja integraalide arvutamine.*

Tarmo Veskioja: *Stabiilne paaripanek ja kõrgkooli vastuvõtt TTÜ 2001–2003. a. näitel.*

Rein Kolde: *Mõtteid Eesti koolimatemaatika arengust ja soovitusi uuele õppekavale.*

Pärastlõunal jätkati õppekava teemadega.

Avo Lind: *Mis saab koolimatemaatikast?*

Helgi Uudelepp: *Matemaatika ainekavast.*

Tõnso Tõnso: *Matemaatika ainekava – kriitilise analüüsi katse.*

Diskussioon ainekava teemadel.

Õppekava viimase versiooni valmimist pidi koordineerima Riiklik Eksami- ja Kvalifikatsioonikeskus (REKK), mille esindaja Helgi Uudelepp oli kutsutud tõrjuma paljude oponentide kriitikanooli. REKKi kodulehelt `http://www.ekk.edu.ee/` oli võimalik eelnevalt tutvuda õppekava valmimise seisuga.

Tulised vaidlused lõpetas piknik Tõllakuuris, mille korraldasid osavõtjatele Jäneda turismikeskuse lahked kokad. Õhtupoolik oli ilus ja saime teha ka mõnekilomeetrise jalgsirännaku kohalikule Siniallikale.

Viimasele päevale oli planeeritud ainult kaks ettekannet.

Kolmapäev, 28. juuni

Ellen Redi: *Kuulsate loogikute sünniaastapäevadega seoses De Morgani seadustest, Gödeli teoreemist ja Zorni lemmast.*

Valdek Rohtma: *Kutseaasta – olgem toeks algajale õpetajale.*

Lõpetuseks mainime, et matemaatikapäevad on kindlasti Eesti Matemaatika Seltsi omanäoline kokkusaamisvõimalus matemaatikaõpetajate ja matemaatikute vahel. Kahjuks pole lihtne leida ettekandeid, mis huvitaksid võrdselt mõlemaid pooli. Toimunud päevade ettekannete temaatikat aitasid oluliselt mitmekesistada seltsi auliikmed Ene Tiit, Rein Kolde ja Avo Lind, kes olid nn. kutsutud esinejad. Seltsi president Kalle Kaarli andis kõikidele kutsutud auliikmetele ettekannete algul kätte auliikme diplomid.

Matemaatiline tarkvaratehnoloogia Saaremaal

Tarmo Uustalu
Küberneetika Instituut

Suve kuumimal nädalal kogunes Kuressaarde 86 tarkvarateadlast viie maailmajao 17 riigist. Tuldi kõrgeimatasemelisimale teaduskonverentsile, mida Saaremaal korraldatud.

2.–8. juulini toimus Saaremaa Spa Hotellis "Meri" ühendkonverents matemaatilisest tarkvaratehnoloogiast lühinimega MPC/AMAST 2006. Selle sisse mahtus kolm iseseisvat teaduskohtumist, 8th International Conference on Mathematics of Program Construction, MPC 2006, 11th International Conference on Algebraic Methodology and Software Technology, AMAST 2006, ja Workshop on Mathematically Structured Functional Programming, MSFP 2006.

MPC ja AMAST on pika traditsiooniga konverentsiseeriad, mille kummagi temaatika on aja jooksul arenenud. Täna on mõlema teemavaldkondadeks programmide semantika ja programmiteisendused, programmide rafineerimine, programmiloogikad, verifitseerimine, mudelikontroll ja abstraktne interpreteerimine, relatsioonilised meetodid ja Kleene'i algebra, kategoorsed meetodid. Eelmised MPC ja AMAST toimusid 2004. aastal koos ning juhttoimkonnad leidsid, et sama korraldust on mõttekas korrata ka 2006. aastal. Et MPC juhtgrupp pakkus MPC korraldamise allakirjutanule, tulidki mõlemad konverentsid siia. MSFP *workshop*, mille sihikul on matemaatiliste struktuuride rakendused funktsionaalprogrammeerimises, on uus foorum. Kuressaares toimus avaüritus.

MPC/AMAST 2006 programmitoimkondade esimehed oli allakirjutanu, Michael Johnson (Macquarie Ülikool), Varmo Vene (Tartu), Conor McBride (Nottingham).

Seitsme konverentsipäeva teadusliku programmi kutsutud kõnelejateks olid John Power (Edinburgh, Lawvere teooriad versus monaadid), Andrzej Filinski (Kopenhaagen, monaadiline reflektsioon), Olivier Danvy (Aarhus, refunktsionaliseerimine), Oege de

Moor (Oxford, aspektid ja andmete rafineerimine), Robin Cockett (Calgary, protsessisemantika), Ralph-Johan Back (Turu, rafineerimisdiagrammid), Larry Moss (Indiana Ülikool, rekursiivsed programmiskeemid), Till Mossakowski (Bremen, monaadilised programmiloogikad). Lisaks nende ettekannetele mahutas kava 57 autorite poolt pakutud ettekannet. MPC ja AMASTi toimetised ilmusid konverentsiks Springeri väljaandes. MSFP toimetised publitseeris elektroonisel kujul British Computer Society. Sessioonidel valitses töine meeleolu ja ettekandeid arutati elavalt. Eriti toimis see MSFP ja MPC juures, mis olid suhteliselt tugevalt fokuseeritud ja homogeense osavõtjaskonnaga. AMASTi puhul oli pilt kirjum.

Õhtute jooksul nägid külalised ära suure osa Saaremaa sümbolitest. Kuressaare lossis tervitas teadlasi linnapea Urve Tiidus, Tehumardil saadi osa eesti moodi grillist. Ekskursioonil vaadati Kaali kraatrit, Karja kirikut, Angla tuulikuid ja päikese loojumist peegelsiledasse merre Panga pangal. Teine vastuvõtt oli Kuressaare linnateatris. Seltskondliku programmi lõpetas väljasõit Muhusse, kus külalised uudistasid Koguva küla ning said väga vahva maaõhtusöögi osaliseks Vanatoa talus. Võib arvata, et paljud kaugemalt tulijaid ei osanud reisisihti kuigi täpselt ette kujutada, ent päris mitmetelt kuulsime kiidusõnu. Väike linn on tegelikult süvitsimineva konverentsi jaoks ideaalne paik, jätab vähe võimalusi seltskonna hajumiseks. Ja seda nauditi. Nagu ka uskumatult kuuma valgeöist põhjamaist suve.

Kahjuks peab ütlema, et midagi läks valesti ka. Asi puudutab konverentsihotelli "Meri", kelle müügiosakond meile teatas viis päeva enne konverentsi algust, et kõiki broneeritud kohti meil ei ole. Tekkinud olukorra lahendamine ei olnud lihtne. Hiljem mulje hotellis valitsevast korraldamatusest süvenes. On üllatav, et Saaremaa suurim hotellikett ei taju üleüldse, mida tähendab ühe rahvusvahelise tippkonverentsi mitmeid rahvusvahelisi organisatsioone haarav ja poolteist aastat vältav ettevalmistustöö.

Seda enam oleme eriti tänulikud kõigile organisatsioonidele ja üksikisikutele, kes pakkusid meile parimat Saaremaad: Kuressaare Linnavalitsus ja linnapea Urve Tiidus, Georg Ots Spa Hotell,

Linnahotell, Kuressaare Haigla, giid Tiiu Tõnus, geoloog Reet Tiirmaa, Kaali trahter, Kuressaare Linnateater, Muhu Muuseum ja giid Kadri Tüür, Vanatoa talu jt.

Lähem info MPC/AMAST 2006 kohta on leitav veebilehelt http://cs.ioc.ee/mpc-amast06/. Konverentsi toetasid Eesti teadustippkeskus "Töökindlate Arvutisüsteemide Uurimise Keskus" ja EL 6RP koordinatsiooniaktsioon TYPES.

Riiklike Matemaatikavõistluste Ülemaailmse Föderatsiooni viies konverents

Raili Vilt
Tartu Ülikool

Esimene Rahvusvaheline Matemaatikahariduse Konverents (ICME) toimus aastal 1969 ja järgmine aastal 1972, millest alates toimuvad need konverentsid iga nelja aasta möödudes.

Paljude erinevate valdkondade seas oli ja on seal matemaatikavõistlused ja töö võimekamate õpilastega. 1984. aastal loodi Rahvuslike Matemaatikavõistluste Ülemaailmne Föderatsioon (*World Federation of National Mathematics Competitions* (WFNMC)), mille eesmärgiks on ühendada erinevatel tasemetel võistluste korraldajaid ja huvitegevuse koordinaatoreid.

WFNMC teemadeks on: riiklikud ja regionaalsed matemaatikavõistlused, täiendkoolitused ja publikatsioonid õpilastele ja õpetajatele, matemaatikaringid, -päevad ja laagrid, toetus õpetajatele ja korraldajatele, kes tegelevad andekate õpilastega ning töötavad välja kohalikku matemaatikavõistluste ja õpilaste arendamise süsteemi. Aastas kaks korda ilmub ühenduse ajakiri "Mathematics Competitions". Föderatsioon annab välja David Hilberti ja Paul Erdősi nimelisi autasusid. Aastal 2006 pälvisid Erdősi-nimelise tunnustuse Alexander Soifer (USA), Ali Rejali (Iraan) ja Simon Chua (Filipiinid).

WFNMC viies konverents toimus 22.–28. juulil 2006. a. Cambridge'is.

Et konverents toimus Cambridge'is, siis on kohane mainida ka ilma, mis oli sel ajal vägagi muutlik – oli Inglismaale omaseid sombuseid päevi, kõrvetavat päikest ja ka äiksetorme.

Konverentsist osavõtjaid oli 28-st riigist kokku 102. Töökorralduse poolest ei erinenud see paljudest konverentsidest – olid töörühmad, plenaaristungid, paralleelseminarid ning loomulikult ka ühised vabaaja üritused (muuseumide külastused, kontserdid

kolledži kabelis ja võimalus külastada Shakespeare'i festivali raames toimuvaid vabaõhuetendusi kolledžite aedades.)

Töörühmad

Töörühmi oli 9: ajakirjad, meeskondlikud võistlused, valikvastustega võistlused ja olümpiaadid, neist kahes viimases olid veel erinevad vanuserühmad. Konverentsi ettevalmistajad olid igaks päevaks koostanud töörühmale eelvaliku ülesannetest või õigemini nende ideedest. Rühma ülesandeks oli vormida neist korrektsed ülesanded või arutelude käigus jõuda hoopis uute põnevate ülesanneteni. Teadagi on ülesande idee alles algus, tuleb arvestada vanuserühmaga tasemega ning loomulikult korrektselt sõnastada. Seega töö ei erinenud palju sellest, mis eelneb võistluskomplekti ülesannete valmimisel siin. Vahepeal võtsid suurema osa ajast inglise keelt emakeelena kõnelevate inimeste vaidlused täpsete ja korrektsete sõnastuste üle, mis siis arvestaks inglise keele kasutust ja sõnavara erinevates maailma paikades.

Plenaaristungid

- ROBIN WILSON andis ülevaate Cambridge'i matemaatikutest 750 aasta jooksul.
- JÓZSEF PELIKAN rääkis oma kogemuste ja mälestuste põhjal, nii matemaatika õppimisest kui õpetamisest, ülesannete koostamisest ja lahendamisest. Tõdes, et matemaatikas on välja kujunenud eraldi valdkond, s.o. olümpiaadimatemaatika ning selleks, et olla võistlustel edukas, tuleb eraldi ette valmistuda ja treenida. Tulemustejahis aga kipub kaduma minema lihtne rõõm matemaatikaga tegelemisest. Headeks ülesanneteks peetakse neid, kus kasutades teadaolevaid fakte ja andmeid, tuleb mõelda uutmoodi. Selliste heade ülesannete juures on aga probleemiks just nende raskusaste, mida on väga raske määrata enne, kui õpilased on võistlusel lahendanud.
- MARIA FALK DE ROSADA andis ülevaate olümpiaadide süsteemi loomisest ja arendamisest 25 aasta jooksul Columbias.

Nende süsteemi välja kujunemises oli vägagi palju sarnaseid jooni sellega, kuidas on arenenud meie olümpiaad ja sellega kaasnev pärast rahvusvahelise olümpiaadiliikumisega liitumist. Kui meil oli olümpiaad olemas ja süsteem vajas uuendamist, siis neil tuli pärast rahvusvahelise olümpiaadiga liitumist hakata oma olümpiaadisüsteemi looma. Rahvusvahelistel olümpiaadidel osalejad annavad nüüd oma teadmisi edasi praegustele võistlejatele.

- Colin Wrighti etteaste matemaatikast ja žongleerimisest oli särav ja meelelahutuslik. Ühendades oma harrastuse ja eriala, süstematiseeris ta juba teadaolevad skeemid pallide vahetamiseks ning demonstreeris uute loomist tuginedes just matemaatikale.

- Simon Singh pidas lustaka loengu koos praktiliste näidete ja katsetega tõenäosusteooriast ja salapärastest koodidest.

- Ben Green pidas hariva loengu jadadest ja algarvudest.

Paralleelseminarid

Riiklikud olümpiaadid ja nende võitjate selgitamine toimuvad enamikus riikides ühtemoodi. Selle põhjuseks on paljuski see, et võistluse tulemusena selguvad esindajad rahvusvahelisel olümpiaadil ning edu tagamiseks on õigem valida esindajad analoogse võistluse põhjal. Tähelepanu oligi just neil võistlustel ja sellisel tööl, mis erineb ja on suunatud laiemale huviliste ringile.

Osavõtjate ettekanded olid valdavalt ühest neil toimuvast võistlusest või matemaatikaringist, kodulehest ja mitte niivõrd ülesannetest, kui just korraldusest, ülesehitusest, sihtgrupist, tasemest, teemadest jne.

Pärast ameeriklaste ja inglaste tutvustust oma meeskondlikest võistlustest oli kõigil võimalus panna ennast proovile kohapeal korraldatud analoogsetes võistlustes. Ameerikas väga populaarne võistlus ARML koosneb nii individuaalsest voorust kui ka erinevatest võistkondlikest. Neist veidi ebatavalisem on see, kus võistkonna

liikmed on järjestatud ja igal liikmel on erinev ülesanne. Esimene liige saab ülesande, kus kõik andmed on antud, aga igal järgmisel liikmel on üheks antud suuruseks eelmise võistleja käest saadud vastus ning iga võistleja näeb vaid talle antud ülesannet.

Inglismaa võistluse üheks etapiks on ristarvu lahendamine – võistkonnaliikmed on jaotatud kaheks ning neile lisaks on õpetaja. Pool võistkonda saavad kätte ristarvu ruudustiku ja vaid küsimused "alla" ja ülejäänud võistlejad ruudustiku ja küsimused "paremale". Kui üks rühmadest on otsustanud, milline on vastus, siis nad ütlevad selle õpetajale, kes kontrollib. Kui on õige, siis saavad õigesti täidetud ruutude eest punkte. Kui aga nende pakutud arv on vale, siis punkte ei saa, aga saavad teada õige vastuse. Õpetaja ütleb tulemuse ka teisele rühmale. Kaks rühma võivad omavahel suhelda õpetaja vahendusel, s.t. esitada teisele rühmale tellimuse, näiteks püüdke leida vastust x. alla/y. paremale.

Mõlemad võistlused olid kaasakiskuvad ning tekitasid elevust ja hasarti.

Valdkonna populariseerimise üheks pooleks on loomulikult erinevad võistlused. Teiselt poolt on aga õpilasi, kellele lihtsalt meeldib lahendada ülesandeid, lugeda, uurida ja seejuures neile ei meeldi võistelda. Eelkõige neile õpilastele ning ka õpetajatele enesetäiendamiseks ongi mõeldud erinevad koduleheküljed, ajakirjad ja huviringid.

Ettekandjatest jäi eelkõige kõlama rõõm ja nauding, mida nad saavad õpilastega koos töötamisest. Eks nii nagu meilgi, ole probleemiks sellise tegevuse rahastamine ja kõige selle jaoks aja leidmine. Välja tuli ka üpriski ootuspärane erinevus suurte ja väikeste riikide vahel, viimastes on tegevus koondunud valdavalt ühte kohta ja samad inimesed tegelevad nii võistluste kui ka koolitustega, suuremates aga tegelevad mitmed organisatsioonid ja inimesed erinevate töölõikudega.

Konverents andis ülevaate teistes riikides toimuvast, uusi ideid ja ka tõdemuse, et nii probleemid kui rõõmud on enamusel samad. Kuigi meil on veel palju teha, on hea tõdeda, et Eestis on matemaatikahuvilistele erinevaid võimalusi. (Üleriigilised: olümpiaad,

lahtised võistlused, valikvastusega võistlus Känguru, meeskondlik võistlus Nuputa, peastarvutamisvõistlus Pranglimine, kaugõppekursused ja õppepäevad, nuputamisülesannetega veebileheküljed, raamatud ja ülesannete kogumikud. Koolides ja piirkondades: matemaatikaringid ja laagrid, eraldi õppepäevad võimekamatele ning klassikalisest matemaatikaolümpiaadist erineva ülesehitusega kohalikud võistlused.)

Järgmine WFNMC konverents toimub 2010. aastal Riias ning loodetavasti on siis Eestist palju huvilisi osalemas, nii kuulamas kui esinemas.

Vabariiklikud matemaatikaõpetajate päevad Pärnus

Lea Lepmann
Tartu Ülikool

Matemaatikaõpetajatel on saanud traditsiooniks igal sügisel ühes Eesti maakonnas kokku tulla, et arutada omavahel matemaatikaõpetuse sõlmprobleemide üle. Seekordsed, järjekorras 33-ndad matemaatikaõpetajate päevad toimusid Pärnus 14.–15. oktoobril. Asukoha valikul sai määravaks asjaolu, et rahvusvahelise matemaatika ja loodusainete tasemeuuringu TIMSS 2003 tulemused Eesti lõikes olid parimad Pärnumaal ja Pärnu linnas.

Matemaatikaõpetajate päevade ajalukku tagasi vaadates selgub, et Pärnu võttis õpetajaid vastu juba kolmandat korda: 1978. aastal kohtuti 5-ndatel päevadel Vändras ja Pärnus ning 1993. aastal 20-ndatel päevadel Uulus ja Pärnus. Kuigi nüüd toimus üritus ainult Pärnu linnas, tegelesid selle korraldamisega ikka Pärnu linna ja maakonna matemaatikaõpetajad käsikäes.

Seekordsete päevade esinejate hulgas oli ka endine Pärnu Koidula kooli õpilane kultuuriminister Raivo Palmaru. Erinevalt laialt levinud arusaamast matemaatika mittevajalikkusest elus demonstreeris kultuuriminister oma ettekandes, missugust matemaatikat on temal tulnud kasutada selleks, et uurida meedia mõju inimesele.

Kahel päeval kuulati sanatooriumi "Tervis" konverentsisaalis viie istungi vältel 20 ettekannet Tartu Ülikooli ja Tallinna Ülikooli matemaatika didaktikutelt, doktorantidelt ning tegevõpetajatelt. Rõõmustav oli see, et 8 ettekannet peeti õpetajate poolt.

Neid õpetajate päevi kavandades oli soov pöörata põhitähelepanu õppekavale ja eriti matemaatika ainekavale, sest uue 2007. aastal rakenduva õppekava väljatöötamine oli jõudmas lõppfaasi. Kahjuks läks nii, et sel teemal ei soovinud keegi vabatahtlikult esineda. Samas ei jäänud antud temaatika Pärnus päriselt puudutamata, sest nii mitmedki esinejad tõid oma ettekandes esile ka õppekavaga seotud aspekte. Kõige enam puudutas seda T. Kaljas seoses võrrandi õppimisega ning algebraõpetuse eesmärkidega üldse. Ta

püstitas küsimuse: mida me tahame ja suudame VI klassis seoses võrrandiga õpetada, kas ainult lihtsamaid protseduure või ka midagi sisulisemat?

Tavalisest suurema tähelepanu all oli seekordsetel päevadel **õpilase edukus matemaatikas**. Sissejuhatuse antud teemale tegi TÜ Teaduskooli psühholoog H. Saul oma ettekandega "Millised on Eesti andekad lapsed?" Tema uuringust selgus, et umbes 30% (nii tavaliste kui ka andekate grupi) õpilastest on depressioonis ning et tõeliselt andekas elab oma ebaõnnestumisi läbi palju tõsisemalt kui tavaliste võimetega õpilane. T. Lepmann tõdes, et kõrge tulemus TIMSS-testis saavutatakse sageli mitte õpilase seesmise motivatsiooni, vaid mitmete väliste tegurite (õpetaja, kodu jne) mõjul ning et pingerea eesotsas olevates maades on matemaatika muutunud paljudele ebameeldivaks ja tulevikuplaanide seisukohalt väheväärtuslikuks õppeaineks. Rahvusvahelise projekti IPMA tulemustele tuginedes jõudsid A. Palu ja J. Afanasjev tõdemusele, et meie õpilaste mahajäämus matemaatikas saab alguse juba algklassides, sest ka lihtsate matemaatiliste operatsioonide omandamiseks kulub paljudel õpilastel (ca 13% õpilastest) rohkesti aega. Samas kuulub aga umbes 24% õpilastest nn potentsiaalsete andekate rühma. Õpilase edukust vähendavatest teguritest riigieksamil kõneles K. Kokk, tuginedes oma eksamitööde parandamisel saadud kogemustele. TÜ doktorandi E. Leetma ettekandes vaagiti TÜ Õpetajate Seminari astujate oskusi VI klassi matemaatika tekstülesannete lahendamisel ja nenditi selle madalat taset. Õpetaja A. Lind tutvustas aga testi, millega saab päris hästi määrata õpilase matemaatilist võimekust.

Teine suurem teemadering keskendus **arvuti kasutamisele matemaatikas**. Õpetaja S. Pihlap jõudis seitsmes koolis korraldatud eksperimendi tulemusena järeldusele, et VII klassis funktsioonide õpetamisel ei olnud arvuti kasutamisel ei positiivset ega ka negatiivset mõju õpitulemustele, kuid paremaks muutus õpilaste suhtumine õppimisse. E. Redi keskendus oma ettekandes sellele, kuidas põhikooli tugevamate õpilastega arvuteooria ülesandeid lahendades Exceli abi kasutada. E. Tõnisson tutvustas peagi eesti

keelde tõlgitava arvutiprogrammi WIRIS kasutamise võimalusi algebraõpetuses. H. Uudelepp selgitas G. Adolfi Gümnaasiumi abituuriumi näitel, kuidas õpetada kirjeldava statistika küsimusi arvuti abil. TÜ doktorant I. Zolk andis ülevaate uuest õpilaste informaatikaviktoriinist "Kobras".

Järgmise käsitletud rubriigina võiks nimetada **lisamaterjale matemaatika õpetamiseks**, seda nii ainekavakohaste kui -väliste teemade osas. Õpetaja M. Saks suunas õpetajaid kasutama keelekümblusprogrammi raames valminud elektroonseid töölehti VII, VIII ja IX klassile, õpetajad A. Oks ja H. Taperson julgustasid kõiki kuulajaid töölehti koostama ja ka avaldama. Tallinna Ülikooli magistrant ja õpetaja R. Timmermann keskendus majandusmatemaatika mõistetele, mis peaksid kuuluma ka matemaatikaõpetusse ning pakkus selleks sobivaid majandusülesandeid. Ideid matemaatikatunni elavdamiseks said õpetajad kindlasti T. Tõnso ettekandest sudokude kohta ning A. Linnu pakutud anagrammidest. Tartu Kõrgema Kunstikooli, TÜ ja H. Elleri nimelise Muusikakooli õppejõu H. Uudevaldi ettekanne viis kuulajad kolmedimõõtmelisest ruumist kõrgemale ja näitas geomeetrilise maailmapildi avardamise võimalusi.

Traditsiooni kohaselt tutvustavad nendel kokkusaamistel oma töid ja tegemisi ka korraldava maakonna matemaatikaõpetajad. Veendusime, et Pärnu linna ja maakonna õpilaste edu matemaatikas on suuresti rajatud õpetajate järjekindlale tööle. Õpetajate A. Aasametsa ja L. Naela ettekandest kuulsime, et neil on olemas kvalifitseeritud matemaatikaõpetajate kaader, kes küll varsti vanuse tõttu väljavahetamist vajab. Pärnu Koidula Gümnaasiumi õpetajate T. Toobali ja A. Pressi kogemused nii tunnisisese kui ka tunnivälise töö osas väärivad paljuski ülevõtmist. Eriti tahaks rõhutada tõsiasja, et selles koolis korraldatakse ka suulisi matemaatikaeksameid.

Veel tähistati nendel päevadel 200 aasta möödumist esimese eestikeelse P. H. Frey kirjutatud matemaatikaõpiku "Arropiddamisse ehk Arwamisse-Kunst" ilmumisest. EMS KMÜ esinaine H. Kiisel tegi ettepaneku algatada korjandus 2006. aastal manalateele läinud

O. Prinitsa hauakivi valmistamiseks.

Nagu eelmistelgi matemaatikaõpetajate päevadel, oli ka nüüd olemas mitmekesine kultuuriprogramm: Pärnu õpilaste tervitusesinemine, võimalus valida lõõgastavaid protseduure tervisekeskuses ning ühine õhtusöök Kuursaalis. Lisaks said õpetajad istungite vaheaegadel tutvuda kirjastuste "Avita" ja "Koolibri" väljapanekutega ning matemaatika näitlike õppevahenditega.

Matemaatikaõpetajate päevadest Pärnus võttis osa üle 250 inimese, see ületas kõigi senistest päevadest osavõtjate arvusid. Kuid korraldajad said sellise suure rahvahulga juhtimisega suurepäraselt hakkama. Kindlasti aitas siin kaasa ürituse sisukas koduleheküIg, sest suur osa infost jõudis osavõtjateni juba eelnevalt veebi vahendusel.

Lõpuks tänati kõiki korraldajaid, sponsoreid ja esinejaid TÜ Matemaatika-informaatikateaduskonna ja Eesti Matemaatika Seltsi nimel ning anti teatepulk üle järgmistele korraldajatele – Võrumaa matemaatikaõpetajatele.

Päevade korraldajad Anne Aasamets ja Lemmi Nael süütavad küünlad ja kuulutavad matemaatikaõpetajate päevad avatuks.

PREEMIAD JA AUTASUD

Üle anti järjekordsed prof Gerhard Rägo nimelised medalid

Tiit Lepmann
Tartu Ülikool

Alates 1990-ndast aastast annavad Tartu Ülikooli Matemaatika-informaatikateaduskond ja Eesti Matemaatika Selts välja professor Gerhard Rägo nimelist mälestusmedalit. Vastavalt medali statuudile võivad medali omanikeks saada nii üksikisikud kui ka kollektiivid, kes:

- omavad silmapaistvaid teeneid õpetaja- või õppejõutöös, õppe- ja metoodilise kirjanduse, õppeplaanide ja programmide, õppetehnika, metoodiliste töötluste jms. väljatöötamisel;
- on osutanud tõhusat kaasabi matemaatika õpetamise täiustamisele eesti koolis.

Kuni käesoleva aastani on ühtekokku välja antud 114 medalit. Medali on seni saanud 64 matemaatikaõpetajat, 19 matemaatika didaktikut, 18 matemaatikut teadlast, 6 kollektiivi ja 7 väliskolleegi.

Vastavalt medali statuudile määrab TÜ Matemaatika-informaatikateaduskonna dekaan iga aasta sügisel käskkirjaga komisjoni, kes valib esitatud kandidaatide seast medali laureaadid. Komisjoni koosolek toimus 11. oktoobril 2006. aastal. Käesoleval, prof. G. Rägo 114. sünniaastal, otsustati välja anda 5 medalit. Medalid anti üle 16. detsembril 2006. a Tartu Ülikooli nõukogu saalis.

Komisjoni otsusega määrati medal TÜ Matemaatika-informaatikateaduskonna matemaatika didaktika assistent Katrin Kokale.

Komisjon tõstis esile Katrin Koka tööd matemaatikaõpetajate koolitajana ja eesti koolimatemaatika arendajana. Alates 1987. aastast töötab Katrin Kokk TÜ matemaatika metoodika kateedris assistendina. K. Koka teadustöö põhitähelepanu on suunatud üldhariduskooli matemaatika õppekava rakendumise ja selle

õppekavaga määratletud pädevuste süsteemi uurimisele. Viimastel aastatel on K. Kokk TIMSS 2003 andmetele toetudes uurinud õpilaste sotsiaalse ja motivatsioonilise tausta seotust nende matemaatilise edukusega. 2005/06. õppeaastal läbiviidud õppetöö põhjal valisid TÜ üliõpilased K. Koka REALIA ET NATURALIA valdkonna kümne parima õppejõu hulka. Ühiskondlike kohustustena on K. Kokk aastaid edukalt vedanud Avatud Ülikooli PMI poolse täienduskursuste korraldusjuhi ülesandeid.

Komisjoni otsusega määrati medal Paide Gümnaasiumi matemaatikaõpetajale Daire Krabile.

Õpetaja Daire Krabi on lõpetanud Tartu Ülikooli 1989. aastal ja töötab Paide Gümnaasiumis alates 1992. aastast, hetkel vanemõpetajana. Komisjon tõstis esile Daire Krabi edukat ja kõrgetasemelist tööd matemaatikaõpetajana. Tema meetodid tagavad õpilastele võimetekohase, huvitava ja aktiivse õpikeskkonna. Daire Krabi õpilased on saavutanud häid ja väga häid kohti maakonna matemaatikaolümpiaadidel ja Nuputa võistlustel. Hästi on esinetud maakondlikul matemaatikavõistlusel "Türi Pähkel". Daire Krabi õpilased on saavutanud silmapaistvalt häid tulemusi ka matemaatika riigieksamitel. Oma riigieksami tulemustega oli tema reaalklass sellel kevadel riigis kuuendal kohal. Märkimist vääriv on veel Daire Krabi ühiskondlik töö kooli matemaatika ainesektsiooni juhina. Ta on 2006. aasta Järvamaa Aastaõpetaja ja samuti oma kooli Aastaõpetaja.

Komisjoni otsusega määrati medal Valga Gümnaasiumi matemaatikaõpetaja Külli Kukele.

Õpetaja Külli Kukk on lõpetanud Tartu Ülikooli 1974. aastal ja on kauaaegne Valga Gümnaasiumi matemaatikaõpetaja. Komisjon tõstis esile Külli Kuke edukat kauaaegset tööd matemaatikaõpetajana Valga Gümnaasiumis. Lisaks väga heale õpetaja tavatööle märgib komisjon ära Külli Kuke tegevuse matemaatikas andekate lastega. Tema õpilased on olnud edukad nii õpilaste maakondlikel kui ka üleriigilistel matemaatikavõistlustel. Külli Kuke panus on olnud märgatav ka ühiskondlikus liinis. Ta on edukas oma piirkonna matemaatikaõpetajate ühistegevuse eestvedajana. Tema juhtida on

Valgamaa matemaatikaõpetajate ainesektsioon. Siinkohal ei saa märkimata jätta koolidevahelisi matemaatikavõistlusi, õpetajate ühisväljasõite teistesse maakondadesse ja loomulikult suurejooneliselt korraldatud matemaatikaõpetajate päevi.

Komisjoni otsusega määrati medal Tallinna Ülikooli professor ANNE TALILE.

Komisjon tõstis esile prof. Anne Tali tegevust meie matemaatikaõpetajate koolitamisel, eriti selle matemaatilise külje kujundamisel. Võib öelda, et aastaid pole võimalik Tallinna Ülikoolist matemaatikaõpetaja kutset saada ilma prof. Anne Talilt hinnet või arvestust saamata. Samuti on märkimist vääriv Anne Tali administratiivne Eesti koolimatemaatikaga seotud tegevus. Ta on olnud aktiivne osaline matemaatika riigieksamite nii sisu kui ka vormi kujundamisel. Viimasel ajal, alates 2005-st aastast, vajab erilist äramärkimist Anne Tali tegevus üleriigilise matemaatika ainenõukogu esinaisena.

Komisjoni otsusega määrati medal Kilingi-Nõmme Gümnaasiumi matemaatikaõpetaja HELLE ÕIGELE.

Helle Õige töötab Kilingi-Nõmme Gümnaasiumis matemaatikaõpetajana alates 1974-st aastast. Oma õpetajat hinnates kirjutavad tema kolleegid: "Õpetaja Õige on oma tööd analüüsiv ja ise õppides arenev õpetaja. Õpilaste kindlad teadmised on rajatud tööle raudvaraga, vigade profülaktikale ja õppekirjanduse õigele kasutamisele. Tema tunnis on huvitav jälgida, kuidas ka matemaatikas nõrgemad on õpetaja pideva heatahtliku tähelepanu all." Helle Õige töö on tulemuslik ka andekate õpilastega. Häid ja väga häid kohti on tema õpilased saavutanud Nuputa võistlustel nii maakondlikul kui ka üleriigilisel tasemel. Samuti on tema õpilased olnud edukad vanemate klasside matemaatika olümpiaadidel. Kõrgetasemelist õpetajatööd kajastavad õpetaja Helle Õige õpilaste tulemused ka riigieksamitel. Tema õpilastest valivad umbes pooled matemaatika riigieksami ja saavutavad seal ka häid ja väga häid tulemusi. Helle Õige on pälvinud Aastaõpetaja 2003 austava nimetuse maakonnas.

Eesti Vabariigis antud preemiad ja autasud

Eesti Matemaatika Seltsi preemiad

Arnold Humala 2005. a. preemia

Meelis Käärik, Tartu Ülikool – doktoritöö *Fitting Sets to Probability Distributions* eest.

EMS üliõpilaspreemia

Aleksei Lissitsin, Tartu Ülikool – uurimistöö *Operaatorite hulga poolt defineeritud aproksimatsiooniomadus* eest.

EMS õpilaspreemia

Laur Tooming, Hugo Treffneri Gümnaasium – eduka esinemise eest vabariiklikul matemaatikaolümpiaadil.

Prof. Gerhard Rägo nimelised medalid

Vt. eraldi artiklit käesolevas kogumikus!

Haridus- ja Teadusministeeriumi 2006. a. üliõpilaste teadustööde riiklik konkurss

Preemiad loodusteaduste ja tehnika valdkonnas

Meelis Käärik, Tartu Ülikool – I preemia doktoritöö *Fitting Sets to Probability Distributions* eest.

Teisi preemiaid

Märt Möls, Tartu Ülikool, matemaatilise statistika lektor – auhind *Conference Award for Scientist* konverentsil *27th Annual Conference of the International Society for Clinical Biostatistics* tehtud ettekande *Identifying risk factors in intravenous drug users – a likelihood based approach for respondent driven samples* eest.

Matemaatikud – riiklike teenetemärkide kavalerid 2006

Peeter Lorents – Riigivapi IV klassi teenetemärk

Peeter Lorents on matemaatik, füüsika-matemaatika teaduste kandidaat loogika alal. Praegu EBS infotehnoloogia õppetooli juhataja. Oli Riigikogu liige 1992–1999. Pälvis teenetemärgi kui Eesti Vabariigi taastaja ja edendaja.

Enn Sarv – Valgetähe II klassi teenetemärk

Enn Sarv lõpetas TRÜ 1966. a. matemaatikuna. Oli 1941–1944 Eesti Vabariigi Rahvuskomitee liige. Tegutsenud literaadina. Pälvis teenetemärgi kui Eesti Vabariigi taastaja ja edendaja.

Kalmer Hütt – Valgetähe IV klassi teenetemärk

Kalmer Hütt lõpetas TRÜ 1985. a. matemaatik-pedagoogina. On Häädemeeste Keskkooli matemaatika-informaatikaõpetaja ja Eesti Lasterikaste Perede Liidu president. Pälvis teenetemärgi kui õpetaja ja suurperede eestseisja.

Tiiu Kiudorv – Valgetähe IV klassi teenetemärk

Tiiu Kiudorv on Põlva Ühisgümnaasiumi kauaaegne matemaatikaõpetaja ja rahvatantsujuht. Pälvis teenetemärgi kui õpetaja ja rahvakultuuri hoidja.

Arvo Kivikas – Valgetähe IV klassi teenetemärk

Arvo Kivikas lõpetas TRÜ matemaatikuna 1973. a. On AS Ilves-Extra asutaja ja tegevjuht. Pälvis teenetemärgi kui ettevõtluse edendaja.

Tiia Penjam – Valgetähe IV klassi teenetemärk

Tiia Penjam lõpetas TRÜ matemaatikuna 1979. a. On "Õpetajate lehe" peatoimetaja. Pälvis teenetemärgi oma tegevuse eest ajakirjanikuna.

Peeter Küüts – Valgetähe V klassi teenetemärk

Peeter Küüts lõpetas TRÜ matemaatikuna 1971. a. On siseministeeriumi rahvastikuregistri büroo juhataja. Pälvis teenetemärgi kui rahvastikuregistri arendaja.

VARIA

Statistika ja eetika

Ene-Margit Tiit
Tartu Ülikool

Teadlase eetika – millest see oleneb?

Teadlase eetika sõltub paljuski sellest, missuguse teadusvaldkonnaga on tegemist. "Kõvu" teadusi, s.t. eeskätt täppis- ja tehnoloogilisi teadusi seostatakse ühiskonna arengus innovatiivsusega, tootmise ja tehnoloogia kõrge tasemega, mis on kiire majandusarengu eelduseks. Eetikaprobleemid tõusetuvad siin aga seoses massihävitusrelvadega, mille loomine omakorda tugineb tehnika kõrgele tasemele, samuti ökoloogiliste katastroofidega. Ka infotehnoloogiliste teadmiste – infotehnoloogilise kirjaoskuse – lai levik ühiskonnas ei ole probleemivaba, siingi tekivad eetikaprobleemid, nt. seoses info salastamise ja saladuste "lahtimuukimisega". Keskkonnateaduste kõrge areng ja sellest tulenev keskkonnateadlikkus seevastu peaks tagama keskkonna "rohelise" ja tervisliku seisundi, kuid siingi tekib väga tõsiseid huvide konflikte majandusarengu ja loodushoiu vahel. Ühiskonnateadlased on need, kes peaksid märkama ebakõlasid ühiskonna arengus ja nende eest hoiatama, kuid siingi on probleeme teabe sõltumatusega erakondliku kallutatuse ja võimalike teadlike või ebateadlike grupihuvide suhtes.

Mõnes valdkonnas, kus töötajate eetilisus on eriti oluline, on aegade jooksul välja töötatud spetsiaalsed eetikakoodeksid ja ametisse astumisel tõotatakse neist kinni pidada, kusjuures see puudutab mitte üksnes praktikuid, vaid ka neil erialadel töötavaid teadlasi. Niisugused valdkonnad on arsti- ja õigusteadus. Arstiteaduslike uuringute teostamise eeldused on tänapäeval muutunud aina karmimaks, üldiselt kõneldes on keelatud igasugused inimkatsed, mis põhimõtteliseltki võiksid katsealuste tervist, heaolu või mainet kahjustada ning uuringute eeldusi kontrollivad autoriteetsed

eetikakomisjonid.

Matemaatikute eetikakoodeks seevastu on väga lihtne ja enesestmõistetav, sisaldades põhiliselt selliseid punkte nagu "ära varasta teise tulemusi ega ideid", "kui kasutad, siis viita", "ära esita teadvalt ekslikke tulemusi, sh. lünklikke tõestusi".

Üldiselt on erinevate teadusharude esindajate roll ühiskonnas erinev, kuid igal juhul on eetiline toetada ja suunata positiivseid ja jätkusuutlikke arenguid, tagada põhiväärtuste püsimist. Samuti on iga eriala teadlaste eetiline kohustus vastavalt oma pädevusele hoiatada ühiskonda, sealjuures eriti võimukandjaid ja otsustajaid ohtude ja ohtlikus suunas toimuvate arengusuundumuste eest.

Statistika kolm erinevat palet

Missugused on statistiku, sh. ka matemaatiku-statistiku eetikaprobleemid ja eetilised kohustused? Selleks tuleb lähtuda statistiku rollist ühiskonnas, ning ilmneb, et siin on suured erinevused. Matemaatikul-statistikul on vähemalt kolm vägagi erisuunalist rolli (siin ei ole eraldi käsitletud statistika õppejõu rolli, mille erialased erisused on suhteliselt väikesed).

Esiteks on ***matemaatiline statistika*** kui matemaatika osa rakendusliku suunitlusega täppisteadus. Keerukaid looduslikke ja tehnoloogilisi protsesse kirjeldavad mudelid peavad paratamatult arvestama juhuslikkust ning see tähendab tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika meetodite rakendamist modelleerimisel. Kõigi reaalsust kirjeldavate mudelite puhul tuleb arvestada vaatlusvigu ja neist tulenevaid vigu järeldustes. Matemaatilise statistika (siin mõistame seda teadusvaldkonda kõige laiemas tähenduses, s.t. kaasates tõenäosuslikud meetodid, juhuslikud protsessid jmt.) võrdluses nn. puhta matemaatikaga selgub üks oluline ja põhiline erinevus. Puhta matemaatiku looming täiustab matemaatika kui teaduse sisemist struktuuri ja teiste rakenduste seisukohalt on see n.ö. "lattu" tootmine, s.t. tulemustel ei ole otseselt tellijat ega rakendust. Matemaatilise statistiku puhul on aga valdavalt tegemist n.ö. tellimustöödega, s.t. et töötatakse välja metoodikaid konkreet-

sete, enamasti teistest teadusvaldkondadest pärinevate ülesannete lahendamiseks. Siinjuures on arsenaliks puhas matemaatika, see aga tähendab, et sageli jõuab puhta matemaatika esindajate "toodang" tarbijateni nimelt matemaatilise statistika kaudu.

Teine roll on eelmistest radikaalselt erinev, see on nn ***riigistatistika roll***. Riigistatistika on eeskätt ühiskonna erinevate dimensioonide mõõtmine, kusjuures selle mõõtmisprotsessi juures rakendatakse matemaatilist statistikat mõõtmistulemuste kvaliteedi ja adekvaatsuse tagamiseks, mõõtmisprotsessi optimeerimiseks ja samuti põhjendatud otsustuste tegemiseks/soovitamiseks. Riigistatistika on üks matemaatilise statistika "tellijaid", nii on näiteks valikuteooria kasvanud välja eeskätt riigistatistika vajadustest.

Kolmanda valdkonna – ***statistilise nõustamise ja koostöö teiste teadusharude (või ka praktika) esindajatega*** – sisuks on statistiku suhtlus mittestatistikutega, statistika-alaste teadmiste edasiandmine ja ühtlasi statistilise kirjaoskuse arendamine kõige laiemas mõttes. See on ühelt poolt meeskonnatöö erinevas koosluses, teiselt poolt vahendaja roll matemaatilise statistiku kui metoodika looja ja mingi teise eriala teadlase kui metoodika tarbija vahel, ja sageli kujunevad nimelt vahendamise protsessis uued ülesanded matemaatikute-statistikute jaoks.

Suhtlusreeglid ja eetikakoodeksid

Igasuguste koosluste käitumist reguleerivad kas kirjutatud või kirjutamata reeglid ja head tavad. Mida laiem ja mitmepalgelisem on kooslus, seda keerukamad on võimalikud vastastikused mittemõistmised ja huvide konfliktid, mis tähendab ka suuremat tähelepanu vajadust "mängureeglite" kehtestamisele ja nendest kinnipidamise jälgimise mehhanismi käivitamisele.

Kõige lihtsam on selles mõttes olukord matemaatilise statistika esindajaga. Seni, kuni matemaatilise statistika esindaja piirdub valemite tõestamise ja nende kontrollimisega simuleeritud andmestikel, pole tal ka puhta matemaatika esindajast erinevaid eetikanõudeid. Kui aga tegemist on tegelikkuse modelleerimisega,

vastutus suureneb: eetika nõuab, et eeldused tagaksid mudelite hea sobivuse tegelikkusega, oluline on kogu protsessi läbipaistvus ja hinnangutäpsuse hindamine.

Olukord muutub radikaalselt keerukamaks niipea, kui mängu tuleb teise eriala teadlane oma huvidega, see tähendab tavaliselt tööhüpoteesi uuritavas valdkonnas, mida uurija kogutud empiiriliste andmete põhjal soovib tõestada. Kui statistikul õnnestub sisulisele hüpoteesile vastav statistiline hüpotees leida, selgitada, et tellija andmed rahuldavad selle hüpoteesi eeldusi ning õnnestub ka vastav nullhüpotees kummutada, s.t. sisukas hüpotees (soovitaval olulisuse nivool) tõestada, siis enamasti täiendavaid probleeme ei teki. Vastupidisel juhul on aga potentsiaalseid konfliktikohti mitu: uurijal on raske leppida tõdemusega, et tema hüpoteesi ei õnnestu antud materjali põhjal tõestada. Mõnikord võiks lahenduseks olla tööhüpoteesi muutmine, mõnikord metoodika või ka otsustuse vastuvõtmisel kasutatava olulisuse nivoo muutmine. Halvemal juhul tõrgub uurija tunnistamast andmestiku kallutatust või ebakvaliteetsust või ka eelduste mittetäidetust. Statistikupoolseks veaks võib olla oskamatus või soovimatus valida teisi tõestusmeetodeid või soovitada alternatiivseid sisulisi hüpoteese. Vastuolusid võib põhjustada ka erinev arusaamine autorlusest – tihti on statistiku roll uurimistöös küllaltki suur (aja- ja ressursimahukamgi kui uurimisülesande autoril), kuid eriarvamusi võib põhjustada arusaam töö iseloomust – kas statistiku tegevus oli vaid abitöö, partnerlus või osutus statistik koguni uuringu põhitegijaks.

See kõik on viinud selleni, et statistikute ja mittestatistikute koostöö reguleerimisel lähtutakse lisaks heale tavale vajaduse korral ka mitmetest seadusepügalatest, sh. näiteks Rahvusvahelise Statistikainstituudi kutse-eetika deklaratsioonist (`http://www.stat.ee/4278`) või ka vaimse omandi kaitse seadusest.

Et statistika tegeleb mõõtmisega, tuleb arvestada ka mõõdetava huve. Viimastel kümnenditel on väga oluliselt esile kerkinud mitmesugused andmekaitsealased regulatsioonid, mis tagavad küll üksikisikute eraelu ja privaatsuse puutumatuse, kuid raskendavad ja takistavad oluliselt niihästi statistikute kui ka andmetega töötavate

teadlaste, sh. eriti arstide-epidemioloogide tööd.

Kõige tõsisemad eetikareeglid reguleerivad aga riigistatistikute tegutsemist, sest nad on kahtpidi seotud kogu ühiskonnaga – ühelt poolt on ühiskond kogu oma keerukuses riigistatistika (mõõtmis-) objekt, teiselt poolt aga ka tellija, kelle vajadusi rahuldatakse ja teatava määrani ka otsustusi mõjutatakse.

Riigistatistika eetilisust ja kvaliteeti tagavad regulatsioonid

Riigistatistika tegevust ja kvaliteeti reguleerivad riiklikud seadused (Eestis Riikliku statistika seadus, `http://www.legaltext.ee/text/en/X1058K3.htm` ja Isikuandmete kaitse seadus, `www.legaltext.ee/et/andmebaas/paraframe.asp?loc=text&lk=et&sk=en&dok=X70030.htm&query=)`, aga ka rahvusvahelised kokkulepped ja ühisdeklaratsioonid, mille sisuks on tagada statistika usaldusväärsus ja üldkasutatavus, kuid samuti ka eetilisus.

1985. aasta augustis võttis Rahvusvaheline Statistikainstituudi (ISI) Peaassamblee vastu seitsmeaastase töö tulemusena valminud ***Rahvusvahelise Statistikainstituudi kutse-eetika deklaratsiooni***. Selles märgitakse niisuguseid punkte nagu statistiku vastutus ühiskonna ees, objektiivsuse taotlus, usalduse säilitamine statistika vastu, meetodite ja uurimistulemuste avaldamine ja läbivaatamine, eetiliste põhimõtete edastamine, aga ka kohustusi subjektide vastu, sh. andmete konfidentsiaalsuse hoidmine.

Oluliselt suunavad Eesti riigistatistikat Euroopa statistikat käsitlevad dokumendid, millest valikut järgnevas lühidalt refereerime.

1. Riikliku statistika põhiprintsiibid Euroopa Majanduskomisjoni piirkonnas (Vastu võetud ÜRO Euroopa Majanduskomisjoni 47. istungil 15. aprillil 1992. a. Genfis), `http://www.stat.ee/4276`

I. Riiklik statistika on demokraatliku ühiskonna infosüsteemi häda-

vajalik osa, mis annab valitsusele, majandusele ja üldsusele andmeid majandusliku, demograafilise, sotsiaalse ja keskkonna olukorra kohta. Et oleks tagatud kodanike õigus saada avalikku informatsiooni, peab riiklik statistika olema kättesaadav ja vastama kasutatavuse ja erapooletuse nõuetele.

II. Et säilitada usaldust riikliku statistika vastu, tuleb statistikaasutustel professionaalselt, teaduslikult ja kutse-eetikat arvestavalt välja töötada statistiliste andmete kogumise, töötlemise, säilitamise ja esitamise meetodid ja kord.

III. Et aidata andmeid korrektselt tõlgendada, peavad statistikaasutused esitama teaduslike normatiivide kohast informatsiooni statistika allikate, meetodite ja menetluste kohta.

IV. Statistikaasutustel on õigus kommenteerida statistika ekslikku tõlgendust ja väärkasutust.

Esitatud kümnest printsiibist märgime veel järgmist:

VI. Statistikaasutuste poolt statistika tootmiseks kogutud üksikandmed, olgu need siis seotud füüsiliste või juriidiliste isikutega, peavad olema rangelt konfidentsiaalsed ja neid võib kasutada ainult statistilistel eesmärkidel.

2. Euroopa statistikasüsteemi kvaliteedideklaratsioon
`http://www.stat.ee/183922`

See deklaratsioon sõnastab Euroopa statistikasüsteemi missiooni "Pakume Euroopa Liidule ja kogu maailmale kvaliteetset infot majanduse ja sotsiaalelu kohta Euroopa, riigi ja piirkonna tasandil ning teeme selle kõigile kättesaadavaks, aitamaks langetada otsuseid, teha teadustööd ja osaleda aruteludel", samuti ka visiooni "...Teaduslikel printsiipidel ja meetoditel põhinev Euroopa statistikasüsteem pakub ja täiustab pidevalt harmoneeritud Euroopa statistikaprogrammi, mis on demokraatlike protsesside ja ühiskonna edukuse oluline alus." Oluliseks punktiks kvaliteedideklaratsioonis on lubadus "Pakume kvaliteetset statistikainfot, mis on toodetud

teaduslikke meetodeid kasutades ning on kooskõlas objektiivsuse ja konfidentsiaalsuse printsiibiga." Lisaks sellele märgitakse koostöö ja partnerluse tähtsust, andmeandjate vajaduste arvestamist, esitatava info kättesaadavust ja mõistetavust ning pideva kvaliteedijuhtimise vajalikkust.

3. Euroopa statistikat käsitlev tegevusjuhis (vastu võtnud statistikaprogrammi komitee 24. veebruaril 2005. a.), `http://www.stat.ee/183094` esitab 15 põhimõtet, mille jälgimist Euroopa riikides peetakse vajalikuks ja auditeeritakse rahvusvaheliselt. Need põhimõtted on järgmised (valikuliselt on lisatud ka saavutamise meetmeid):

1. põhimõte: erialane sõltumatus – Euroopa statistika usaldatavuse tagab statistikaasutuste erialane sõltumatus teistest poliitilistest, regulatiiv- ja haldusüksustest ja -asutustest ning erasektorist.

2. põhimõte: volitus andmete kogumiseks – statistikaasutustel peab olema selge juriidiline volitus teabe kogumiseks Euroopa statistilistel eesmärkidel.

3. põhimõte: ressursside piisavus – statistikaasutuste käsutuses olevad ressursid peavad olema piisavad, et oleks võimalik täita Euroopa statistikaalaseid nõudeid.

4. põhimõte: kvaliteedinõuete järgimine – kõik Euroopa statistikasüsteemi liikmed kohustuvad töötama ja koostööd tegema, lähtudes Euroopa statistikasüsteemi kvaliteedideklaratsioonis sätestatud põhimõtetest.

5. põhimõte: statistiline konfidentsiaalsus – täielikult tuleb tagada andmeesitajate (kodumajapidamised, ettevõtted, haldusasutused ja teised andmeesitajad) privaatsus, nende esitatud teabe konfidentsiaalsus ja kasutamine ainult statistilistel eesmärkidel.

6. põhimõte: erapooletus ja objektiivsus – statistikaasutused peavad tootma ja levitama Euroopa statistikat teaduslikku sõltumatust tunnustades ning objektiivsel, professionaalsel ja läbipaistval viisil, koheldes kõiki tarbijaid võrdväärselt.

7. põhimõte: läbimõeldud metoodika – kvaliteetse statistika aluseks on läbimõeldud metoodika. Selle jaoks on vaja asjakohaseid

vahendeid, menetlusi ning asjatundlikkust.

- Tööle võetakse ülikoolis vastava eriala lõpetanuid.

- Personal osaleb vastavatel rahvusvahelistel koolitustel ja konverentsidel ning teeb rahvusvahelisel tasandil koostööd statistikutest kolleegidega, et saada uusi teadmisi.

- Metoodika täiustamise huvides tehakse koostööd teadlastega, väliseksperdid hindavad rakendatud meetodite kvaliteeti ja tõhusust ning vajaduse korral soovitavad kasutada paremaid statistikatöö vahendeid.

8. põhimõte: asjakohased statistikaalased menetlused – kvaliteetse statistika aluseks on asjakohased statistikaalased menetlused, mida rakendatakse alates andmete kogumisest kuni andmete õigsuse kontrollini.
9. põhimõte: andmeesitajate mitteülemäärane koormus – andmeesitajate koormus peab vastama tarbijate vajadustele ning ei tohi olla andmeesitajate jaoks liiga suur. Statistikaasutus jälgib andmeesitajate koormust ning seab eesmärgid aja jooksul nimetatud koormuse vähendamiseks.
10. põhimõte: tasuvus – ressursse tuleb kasutada efektiivselt.
11. põhimõte: asjakohasus – Euroopa statistika peab vastama tarbijate vajadustele.
12. põhimõte: täpsus ja usaldusväärsus – Euroopa statistika peab kajastama tegelikkust täpselt ja usaldusväärselt.

- Lähteandmeid, vahetulemusi ja avaldatud statistikat hinnatakse ja nende õigsust kontrollitakse.

- Valikuvigu ja valikust sõltumatuid vigu hinnatakse ning dokumenteeritakse süstemaatiliselt vastavalt ESSi kvaliteedikomponentidele.

13. põhimõte: ajakohasus ja õigeaegsus – Euroopa statistikat tuleb levitada ajakohaselt ja õigeaegselt.

14. põhimõte: seostatavus ja võrreldavus – Euroopa statistika peab olema valdkonniti ja ajaliselt järjepidev ning piirkonniti ja riigiti võrreldav; eri allikatest pärit omavahel seosesolevaid andmeid peab olema võimalik ühendada ning koos kasutada.
15. põhimõte: kättesaadavus ja selgus – Euroopa statistikat tuleb esitada selgel ja arusaadaval kujul ning levitada sobival ja otstarbekohasel viisil, see peab koos toetavate metaandmete ja juhtnööridega olema saadaval erapooletul moel.

Statistiku meeskonnatöö ja statistilise nõustamise eetika

Statistiline nõustamine oli see valdkond, mille jaoks püüti Statistikute eetikakoodeksit formuleerida juba 1969. aastal Rahvusvahelise Statistikainstituudi asutatud kutse-eetika küsimusi uuriva komisjoni töö tulemusena (Deming[19], 1972). Valdkonna olulisust ja keerukust näitab tõsiasi, et viimastel aastatel on mitmete matemaatilist statistikat õpetavate ülikoolide, sh. ka Tartu Ülikooli kursuste loetelusse lisandunud nimetus "Statistiline nõustamine" (*Statistical consulting*). Selles valdkonnas on publitseeritud ka õpikuid ning avaldatud artikleid, (vt. nt. Statistical Consulting Newsletter `http://www.amstat.org/sections/cnsl/newsletter.html`). Tähelepanuväärne on see, et konsulteerimisega seotud probleemidele on tähelepanu pööranud tippstatistikud juba aastakümnete eest. Alljärgnevad mõtted (modifitseeritud ja lühendatud kujul) pärinevad A. Kivinuka tervitusettekandest Eesti Statistikaseltsi 19. konverentsil, kus ta tsiteeris Sir David Coxi *soovitusi statistikutele, kes töötavad praktikutega* G. van Belle teose "Statistical Rules of Thumb" vahendusel.

1. Kui võimalik, tehke koostööd, mitte ärge ainuüksi konsulteerige.

[19] Deming, W. Edwards (1982). Code of professional conduct: a personal view. International Statistical Review 40, 214219.

2. Statistilises töös on laialt levinud viga – otsida vastuseid valedele küsimustele
3. Püüdke eristada olulisi algandmeid ja mõista andmete kvaliteeti
4. Alustage väga lihtsa mudeliga.
5. Kui võimalik, lõpetage lihtsa mudeliga.
6. Olge valmis tegema modifikatsioone.
7. Uurige, millised eeldused on olulised
8. Kui teie osalust artiklis või aruandes tahetakse märkida tänusõnadega, küsige kindlasti tööd näha.
9. Vahel harva olge valmis ütlema, et esitatud andmed ei kinnita praktiku hüpoteese.
10. Kui uurimistöö lõppedes enam kui 10% tööst on osutunud kasulikuks, siis olete hästi töötanud.

Autori kogemused statistikutööst teadlaste meeskonnas

Statistilist konsulteerimist käsitlevad paljud autorid ka ***tõlkimisena***, kus ülesandeks on vahendada tekste ja ülesandeid uurija erialakeelest matemaatilise statistika keelde ja tulemusi vastavalt matemaatilise statistika keelest erialakeelde. Siinjuures pole põhimõtteliselt oluline see, missuguses keeles (tavalises lingvistilises tähenduses) töötavad uurija ja statistik.

Tavaliselt on selge, et kummagi osapoole – niihästi erialateadlase kui ka statistiku – teadmised teise eriala keelest ei ole vastastikuseks mõistmiseks piisavad. Statistiku poolt vaadates on enamasti üsna kahtlane, kui eriala esindaja püüab ülesannet statistikule arusaadavaks teha statistika keeles – enamasti jääb puudu mõistete sügavuti tundmisest ning tulemus võib olla ebaadekvaatne.

Oma kogemusele tuginedes leian, et alati on parim moodus kasutada tõlkimiseks vahekeelena tavakeelt. Kuigi eriala spetsialistile, nt. meedikule võib tunduda vahel veidrana kõnelda keerukatest laboratoorsetest uuringutest tavakeeles, saab ta sellega peagi hästi hakkama – tuleb vaid hajutada ettekujutus, et mida keerukamat terminoloogiat kasutatakse, seda sügavam on teadus ja tõsisem probleem. Tavakeeles sõnastatud erialaprobleemi lahendamiseks oskab statistik tavaliselt lihtsalt leida sobiva metoodika. Arusaadavalt tuleb saadud tulemusi tõlgendada tavakeele abil ja abistada ka eriala spetsialisti tulemuste tagasitõlkimisel erialakeelde.

Mis on siinjuures suurimad ohud?

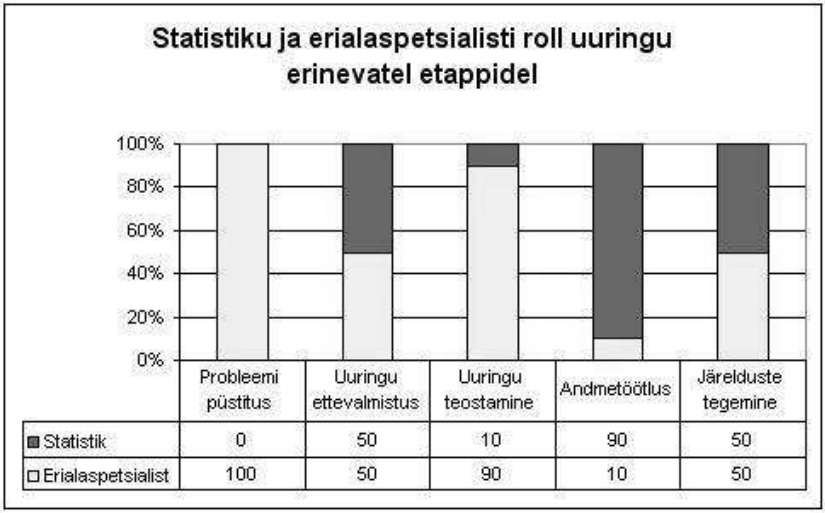
1. Puudulikust vastastikusest mõistmisest tulenev vastuste otsimine valedele küsimustele.

2. Erialaspetsialisti liigne enesekindlus metoodika valikul (nt. ta on kirjandusest leidnud artikli, mis talle jätnud hea mulje ja soovib sama metoodikat rakendada, kuigi ülesanne pole päris sama või pole meetodi eeldused täidetud.

3. Statistiku puudulik süvenemine ülesandesse või selle ekslik mõistmine, mille taga võib olla niihästi asjatundmatus, pealiskaudsus kui ka üleolev suhtumine.

4. Aja- ja muude ressursside piiratus, töö liigvarane ja mitteammendav lõpetamine.

Kindlasti tuleb nõustuda Sir D. Coxiga, et koostöö ühtses meeskonnas on tõhusam kui vaid konsulteerimine. Ideaalis võiks statistikust ja erialaspetsialistist meeskonna koostööd erinevatel uuringuetappidel kirjeldada alljärgnev tulpdiagramm



Küsimusele – millal alustada koostööd – saab olla ainult üks vastus – mida varem, seda parem. On hea, kui statistik või statistikud on meeskonnas juba siis, kui uuringut kavandatakse. Ometi on probleemi püstitaja kindlasti uurimisvaldkonna spetsialist (kuigi siingi pole välistatud statistiku abi). See määrab ühtlasi ka uuringu põhiautori. Uurimuse kavandamisel peaks aga statistik olema kindlasti osaline. Tema osalus on tähtis nii katseplaani kui ka uuringu valimi disainimisel, samuti uuringumetoodika ja instrumendi (küsitluse, mõõtmisviisi) kavandamisel. Uuringu toimumisel on statistiku roll tagasihoidlik, kuigi kasulik on kavandatud plaani järgimise kontroll ja võimalike kõrvalmõjude fikseerimine. Järgmine, vägagi töömahukas andmete töötlemise ning analüüsimise etapp (mis sageli jaguneb reaks alametappideks) on aga statistiku pärusmaa. Pahatihti arvatakse statistiku töö üksnes sellega piirduvatki – kui aga statistiku abi pole varem kasutatud, kulub tihti suur hulk tööd uuringu ebaotstarbekast planeeringust tulenevate vigade korrigeerimisele ja kannatab ka saadav tulemus. Töötlusetapil on erialaspetsialisti rolliks tööhüpoteeside sõnastamine ja vajadusel varieerimine või edasiarendamine – statistik üldiselt ei tea täpselt, missugused saadavatest statistilistest tulemustest on

sisuliselt tähtsad, missugused mitte. Ühistöö viimane etapp sisaldab järelduste tegemist: enamasti sõnastab statistik need kvantitatiivsel või formaalsel tasemel, eriala spetsialist aga põhjendab tulemusi sisuliselt.

Oma praktilises kootöös teiste erialade esindajatega olen järginud mõningaid lihtsaid eetikareegleid, mida olen ka oma õpilastele soovitanud.

- Teise eriala spetsialistisse tuleb suhtuda lugupidamisega sõltumata tema teadmistest statistika või matemaatika alal. Parimad kliendid on need, kes tunnevad hästi oma eriala.
- Uurimistöö aluseks on oskus esitada õigeid küsimusi. Koostöö puhul on tähtis, et kõik osapooled neid küsimusi ühtviisi mõistaksid, selle saavutamiseks kulutatud aeg pole kunagi tulutult raisatud.
- Statistik peab tegema pingutusi, et leida soovitud lahendus või sellele lähedane tulemus – kuid tingimuseks on matemaatiline ja statistiline korrektsus nii eelduste jälgimisel kui ka andmestiku tõlgendamisel.
- Negatiivne tulemus peab olema veenvalt põhjendatud ja lisatud soovitused, mida siiski saaks järeldada olemasolevast andmestikust või mida teha teisiti järgmises uuringuvoorus.
- Statistiku töö ei lõpe statistiliste rehkendustulemuste üleandmisega, hea tulemuse saavutamiseks tuleb kindlasti assisteerida ka järelduste tegemisel.
- Publitseerimisel kuulub esimese autori au küll erialaspetsialistile, kuid tavaliselt väärib ka statistiku töö kuulumist autorite hulka, sest peaaegu mitte kunagi pole tegemist pelgalt tehnilise tööga.
- Kui tegemist on episoodilise konsultatsiooniga, on sageli targem autorlusest loobuda, sest pole võimalik vastutada kogu uuringuprotsessi statistilise korrektsuse eest, mida kaasautorlus eeldaks.

Võin kinnitada, et ülalmärgitud põhimõtete järgimine on peaaegu 100%-liselt taganud eduka koostöö; eranditeks on olnud vaid mõned väga noored uurijad.

Rahvusvaheline Üliõpilaste Matemaatikavõistlus

Vladimir Kutšmei
Tartu Ülikool

Rahvusvaheline Üliõpilaste Matemaatikavõistlus (IMC – International Mathematics Competition for University Students) on igaaastane matemaatika-alane võistlus üliõpilastele. IMC-d korraldatakse alates aastast 1994 ja selle peaorganisaatoriks on University College London. Igal aastal juuli lõpus või augusti alguses toimuvat olümpiaadi viiakse läbi maailma erinevates paikades:

28. juuli - 2. august 1994 Plovdiv, Bulgaaria;
2. august - 7. august 1995 Plovdiv, Bulgaaria;
31. juuli - 5. august 1996 Plovdiv, Bulgaaria;
30. juuli - 4. august 1997 Plovdiv, Bulgaaria;
29. juuli - 3. august 1998 Blagoevgrad, Bulgaaria;
29. juuli - 2. august 1999 Keszthely, Ungari;
26. juuli - 31. juuli 2000 London, Inglismaa;
19. juuli - 25. juuli 2001 Praha, Tšehhi;
19. juuli - 25. juuli 2002 Varssavi, Poola;
25. juuli - 31. juuli 2003 Cluj-Napoca, Rumeenia;
23. juuli - 29. juuli 2004 Skopje, Makedoonia;
22. juuli - 28. juuli 2005 Blagoevgrad, Bulgaaria;
20. juuli - 26. juuli 2006 Odessa, Ukraina.

Käesoleva aasta võistlus leiab taas aset Blagoevgradis, Bulgaarias.

Korraldajad on teinud kõik selleks, et osalejate geograafia oleks võimalikult lai. IMC-st on saanud üks esinduslikum üliõpilaste matemaatikaolümpiaad. Nii näiteks osales 2006. aasta võistlusel 241 üliõpilast 72-st ülikoolist üle kogu maailma. Reeglina esindab ülikooli kolmest-viiest üliõpilasest ja ühest juhendajast koosnev võistkond.

Kahel võistluspäeval lahendavad osavõtjad 5 tunni jooksul 6 ülesannet, mis kuuluvad algebra, matemaatilise analüüsi ning

kombinaatorika valdkonda. Iga ülesanne annab maksimaalselt 20 punkti. Sealjuures ülesanded valitakse selliselt, et kaks esimest on päris lihtsad, kaks järgmist on rasked ja viimased kaks on väga rasked. Igal aastal pakuvad IMC korraldajad võistkondade juhendajatele võimalust esitada sellele võistlusele ülesandeid. Korraldajad lahendavad kõik saabunud ülesanded ise läbi ning valivad nende hulgast võistluse jaoks sobivaimad. Lõplik ülesannetekomplekt valitakse välja üks päev enne võistlust žürii poolt, mis koosneb võistkondade juhendajatest.

Iga võistluspäeva järel hindab žürii töid. Iga ülesannet kontrollib vähemalt kaks inimest. Tavaliselt kestab hindamisprotseduur varahommikuni välja ning tulemused tehakse teatavaks järgmise päeva hommikul.

Peale pingelisi võistluspäevi korraldatakse alati mõni ekskursioon. Arvestades osavõtjate arvu, toimuvad taolised ekskursioonid tavaliselt looduses. Peale lõdvestavaid ekskursioone toimub veel üks üsna meeli ülesküttev üritus nimetuse all apellatsioon. Üliõpilane, kes ei ole oma töö tulemusega nõus, võib pöörduda juhendaja poole, kelle kaudu toimubki tulemuse vaidlustamine. Olümpiaadi lõppüritusteks on autasustamine ning pidulik õhtusöök.

Tartu Ülikool osaleb Rahvusvahelisel Üliõpilaste Matemaatikavõistlusel iga-aastaselt alates aastast 1996. Esimeses võistkonnas olid Maria Zeltser, Kati Metsalu ja Vladimir Kutšmei ning juhendaja Märt Põldvere. Tartu Ülikooli osalemisaja jooksul võtsid IMC võistluses osa järgmised Tartu Ülikooli matemaatika-informaatika teaduskonna üliõpilased: Mart Abel, Andrei Filonov, Ülar Kahre, Anton Karputkin, Oleg Košik, Meelis Kull, Emilia Käsper, Sven Laur, Aleksei Nazarov, Hendrik Nigul, Leopold Parts, Martin Pettai, Lauri Tart, Konstantin Tretjakov, Dmitry Tseluiko, Indrek Zolk, Boriss Vlassov. Võistkonna juhendajaks on lisaks Märt Põldverele olnud Maria Zeltser ja alates aastast 2003 Vladimir Kutšmei.

Viimane võistlus toimus 2006. aastal Odessas, Ukrainas. Tartu Ülikool osales kolmeliikilise võistkonnaga, kuhu kuulusid Anton Karputkin, Oleg Košik ja Martin Pettai. Martin Pettai sai võistlusel

esimese preemia (üldjärjestuses 27. koht), kogudes 145 punkti 240 võimalikust. Anton Karputkin sai võistlusel esimese preemia (üldjärjestuses 28. koht), kogudes 144 punkti. Oleg Košik sai võistlusel teise preemia (üldjärjestuses 96. koht), kogudes 105 punkti. Tol aastal osales võistlusel 241 üliõpilast enam kui neljakümnest Euroopa, Aasia ja Ameerika ülikoolist. Esimest korda koostati tulemuste põhjal ka ülikoolide paremusjärjestus. Paremusjärjestuses on esindatud need 43 ülikooli, mis saatsid võistlusele kolm või rohkem üliõpilast. Tartu Ülikool sai selles järjestuses 9. kohta ennetades muuhulgas Turu Ülikooli (22. koht) ja Helsingi Tehnikaülikooli (26. koht).

Järgmiselt esitame kahe võistlusel osalenud üliõpilase muljeid IMC-st.

Konstantin Tretjakov

2002, Varssavi. Kolmas preemia, üldjärjestuses 119. koht 182-st.

2003, Cluj-Napoca. Kolmas preemia, üldjärjestuses 114. koht 185-st.

2005, Blagoevgrad. Teine preemia, üldjärjestuses 95. koht 227-st.

Üliõpilaste rahvusvaheline olümpiaad on vaieldamatult üks omapärasemaid ja huvitavamaid üritusi, millest võib üliõpilane oma õpingute aja jooksul osa võtta. Sarnaselt kooliõpilaste olümpiaadidele, on see sisuliselt üks ühiskondlik puhkeüritus ülesannete lahendamisvõistluse katte all. Kuna olümpiaad on ise rahvusvaheline, siis toob temas osalemine endaga kaasa palju toredaid kultuuri- ja turismielamusi ning mälestusi.

Minu teada toimuvadki niivõrd laialttuntud rahvusvahelised üliõpilastele suunatud olümpiaadid ainult matemaatikas (IMC) ning informaatikas (ACM ICPC). Sellest on natuke kahju, kuna kooliajal on motiveeritud õpilasel oluliselt laiem valik alasid, milles ta saaks oma jõudu proovida. Ilmselt on põhjuseks eelkõige see, et matemaatika ja informaatika, erinevalt teistest aladest, on iseenesest põhiliselt suunatud ülesannete lahendamisele.

Kuna ma õnneks sattusin ülikoolis õppima ühte neist kahest toredast alast, on ka minul oma bakalaureuseõpingute ajal mitmel

korral õnnestunud rahvusvahelise matemaatikaolümpiaadi elamusi nautida. Elamused, nagu ikka olümpiaadi puhul, algavad valikvooru ülesannete lahendamise hasardiga. Minu arvates on üliõpilaste olümpiaadi valikvoor oluliselt kergem võrreldes õpilaste olümpiaadi (IMO) omaga. Esiteks, konkurents käib siin ainult ühe ülikooli (ning põhiliselt ühe teaduskonna) üliõpilaste vahel – mingeid voorusid kooli, piirkonna või riigi tasemel ei ole. Teiseks, ülesanded vastavad oluliselt täpsemini õpingute temaatikale – kui kooliolümpiaadi puhul on olümpiaadiülesanded enamasti "ebastandardsed" ning nõuavad suuresti teatud taibukust ja tihti ka kooliprogrammiväliseid teadmisi, siis ülikooli olümpiaadiülesannete edukaks lahendamiseks on eelkõige vaja väga hästi aru saada esimese-teise kursuse matemaatilisest analüüsist ja algebrast. Aga muus osas pakub valikvoor mõlemal juhul samasugust nauditavat ja pingerikast ajuharjutust. Iga lahendatud ülesanne toob kaasa väga omapärase avastuserõõmu. Vaevalt saab kuskilt mujalt niisugust ajutoonust, nagu seda saab olümpiaadilt. Valikvoor lõpeb ikka ja alati arutlustega stiilis "noh, palju sina siis lahendasid?", "aga kuidas sa seda tegid?", "ah, see oligi siis nii lihtne, küll ma olen ikka loll!" jne. – võib täheldada teatud analoogiat sportlastega, kes just äsja lõpetasid ühe maratonijooksu ja üritavad nüüd hingamist korda ajada.

Valikvoorust hea punktiskooriga pääsenu saab suvel veelkord sarnase mõttetegevuse maratoni osaliseks – nüüd juba "päris" võistlusel. Pärisvõistlus on samas minu arvates veidi vähem pingeline, kuna seal ei ole lõpptulemusel juba enam nii suurt tähendust – nagunii enam kuhugi edasi ei pääse, auhinnad on kesised, kuldhõbe-pronksmedali väärtus on (vähemalt minu jaoks) teisejärguline ning tegelikult ainsa pingutusega ei olegi seal "oma kategooriast" eriti võimalik välja pääseda. Esikohad lähevad alati nendele, kes on aasta jooksul ülesannete lahendamist korralikult harjutanud. Ülejäänud kohad jagunevad ühtlaselt vedamise, taibukuse ja viitsimise faktorite alusel.

Kuigi võistluse osa on tõesti unustamatu elamus (mul on vist siiamaani meeles mõned ülesanded, mille kallal tuli eriti kõvasti

nuputada, või mida sai mõne eriti ootamatu trikiga lahendada), põhiline on ikkagi ürituse ühiskondlik aspekt. Olümpiaadile koguneb üle saja üliõpilase erinevatest maadest – kõik erakordselt toredad, targad ja huvitavad inimesed. Olümpiaad ise tekitab olukorra, kus omavaheline suhtlemine on kerge ja lõbus – igale inimesele saab läheneda ja kasvõi standardse fraasi "Hi, where do you come from?" abil alustada juttu suvalisel teemal, alates Bulgaaria veinide omapärasusest kuni religiooni mõjuni Iraani sisepoliitikale. Mõned olümpiaadidel tekkinud tutvused jäävad kestma pikemaks ajaks ning see lisab erilist motivatsiooni saada ka järgmisel aastal ülikoolivõistkonda sisse – et nii saaks jälle kohata olümpiaadisõpru ning käia nendega ringi mööda tundmatu linna tänavaid ja parke, ronides iga võimaliku kõrghoone vaateplatvormile ja külastades iga piljardilauaga baari. Kaardi- ja kitarrimänguõhtu, mis lõppeb kollektiivse päikesetõusu vaatlemisega ja laulude karjumisega linnaäärselt künkalt, rahvusvaheline jalgpalliturniir, kus Brasiilia ei pruugi üldsegi olla favoriit, kuna Ukraina matemaatikud taovad palli lihtsalt kõvemini, kümne inimesega ühe pileti abil botaanikaaia külastamine – sellised lastelaagri-laadsed üritused on ilmselt see, mis jääb kõige paremini meelde.

Lõpuks jääb mainida turismiga seonduvat aspekti. Olümpiaadid toimuvad alati huvitavates kohtades. Parkide- ja kirikuterikas Poola pealinn Varssavi, omapärane Transilvaania keskus Cluj-Napoca ning väike ülikoolilinn Blagoevgrad Bulgaarias on nüüd minu jaoks alatiseks seotud olümpiaadielamustega. Kuna iga olümpiaadi ajal on kombeks korraldada ka mõni väljasõit-ekskursioon, siis lisaks ülikoolilinnadele sai nähtud ka nende läheduses asuvaid vaatamisväärsusi.

Kokkuvõttes saab ainult veelkord öelda, et IMC-ga seonduvad mul ühed säravamad mälestused bakalaureuseõppest. See tekitas lisamotivatsiooni tõsisemalt tegeleda matemaatikaga ning pakus nii korraliku ajuharjutust kui ka fantastilist suvepuhkust.

Lauri Tart

2003, Cluj-Napoca. Kolmas preemia, üldjärjestuses 110. koht 185-st.

2004, Skopje. Aukiri, üldjärjestuses 133. koht 180-st.

Mina olen IMC võistlusel osalenud kahel korral, 2003. aasta minijuubelil ehk 10. IMC-l Rumeenias Cluj-Napoca linnas ja järgmisel aastal Skopjes Makedoonias (olgu siis selle viimase ametliku nimetusega, kuidas on). Kõige õigem oleks ehk alustada sellest, et võistlusele minekule eelneb veel minu jaoks küllaltki huvitav osa, ehk eelvõistlus selle nimel, kes antud aastal võistlusele üldse pääseb. Need eelvõistlused on harilikult kõige tõsisemateks võistluslikeks momentideks, sest IMC-l endal ei ole harilikult erilist lootust Kesk-Euroopa ja Valgevene-Ukraina võistlejate vastu.

Eelvõistlus toimub tavaliselt õhtusel ajal (üliõpilased on harilikult hommikul muude asjadega ametis, õppimisega näiteks). Harilikult on seal selline atmosfäär, et keegi just eriti palju analüüsi/algebra parematest tulemustest enam ei mäleta, aga anda tuleb ju endast parim. Lohutust leiab pärast võistlust sellest, et teised ütlevad, et ega nemadki üle poolte ülesannete ära ei lahendanud Ja mõnikord imestad isegi, kui palju tegelikult meeles on ja välja tuleb, kuigi keskmine tulemus on tavaliselt siiski kusagil maksimaalse punktisumma kolmandiku või poole juures.

Võistlusele endale tuleb muidugi kohale jõuda. Ja see on minu juhul ikka omaette seiklus olnud. Rongi, bussi ja taksoga on tulnud läbi Ida-Euroopa reisida, kummalistel aegadel kohale jõuda, vahepeal Varssavi, Budapesti või veel mõne linnaga tutvudes. Nii Rumeenia kui Makedoonia olid mõlemad veel küllaltki mägised ja lageda maaga harjunud eestlasel oli veidi harjumatu ja kõhe mäeküljel kulgevail (ja tihti mitte esimeses nooruses) teedel reisida. Makedooniasse jõudmisel selgus lisaks tee peal, et sihtkohas on toimumas raudteelaste streik, ja seega pidime teekonna viimase otsa kuidagi mingi muu transpordivahendiga asendama. Lõpuks sõitsime edasi peale piiripunkti leitud vana Mercedesega, mis end takso nime all reklaamis. Eelmine öö oli jäänud une poolest napiks, kuumus oli kõvasti üle harjumuspärase ning maanteede seisukord mitte just julgustav. See osa reisist jättis kaunis kustumatu mulje.

Võistluse enda peamisteks osadeks on sissejuhatav aktus, kaks päeva võistlemist, millele järgneb lõõgastumiseks ekskursioon ku-

hugi põnevasse kohta ning siis tulemuste kokkuvõtmine, auhindade jagamine ja lõpetuseks ühine pidusöök. Vahepeal on tavaliselt nii palju vaba aega ka, et on võimalik kohalike oludega tutvuda. Rumeenia olude üks iseärasusi oli kohaliku rahaühiku väga väike väärtus. Nagu Martin Pettai kohe esimesel õhtul demonstreeris, ei ole mingi kunsttükk saada miljonäriks peale valuutavahetuse külastamist. Seevastu Skopje osutus huvitavaks, õigeusklikku kristlust taastavaks linnaks, täis mošeesid.

Ööbimiskohaks on olnud üliõpilaselamud, mis on osavõtjatele täiesti harjumuspärased. Makedoonias oli seejuures tasuta lisandiks mingi kohaliku kangelase raidkuju õues ja ühikad olid ikka tõeliselt suured. Kvaliteet aga muidugi suurusega pöördvõrdeline. Eriti raskeks tegi elu see asjaolu, et suvine temperatuur oli seal üle 30 kraadi, konditsioneerist võis aga vaid und näha, isegi akende avamine oli keeruline.

Aktuse peamiseks osaks on harilikult ürituse peaorganisaatori, presidendi ja muidu vaimse isa, John E. Jaynei kõne, kus pannakse meile südamele üksteisega suhelda, mitte pabistada hirmus heade tulemuste pärast ja võrreldakse IMC ning IMO erisusi. Siis esinevad kohalikud oma kiidu- ja muude juttudega, ning vanad olijad saavad seda oma eelnevate kogemustega võrrelda. Makedoonias toimusid kohalike kõned millegipärast läbi tõlgi (ja Jaynei kõne tõlgiti ka tagasi), kelleks oli piisavalt taibukas neiu, suutes kolmandat korda IMO otsa komistades, selle ka ära tõlkida.

Võistlus ise on nagu matemaatikavõistlused ikka, tegeletakse lahendamisega ja suurt muud tähele ei pandagi. Makedoonias sattusime jälle viletsa jahutussüsteemi otsa ja ma olen seniajani kindel, et ma oleksin konditsioneeri olemasolu korral suutnud palju paremaid punkte saada. Ülesandeid on muide seal igasuguseid. Kummalgi päeval lahendatakse kuus ülesannet, millest umbes kolmandik on praktiliselt lihtsalt igaühe jaoks mingi punktisumma garanteerimiseks, teine kolmandik on umbkaudu harilikud raskema raskusastme ülesanded ja lõpus tulevad tõelised pähklid. Mina vist küll ei ole viimastest ühtki ära lahendanud, näidislahendused võtavad harilikult enda alla paar-kolm väikeses kirjas täiskribitud

lehekülge.

Võistlusjärgses masenduses/joovastuses, aga kindlasti väsimuses, toimub lõpuks ka ekskursioon kuhugi linnast välja. Rumeenias oli peamiseks atraktsiooniks matkarada kergelt mägises looduses. Mul õnnestus isegi ühest kaunis järsust mäenõlvast üles ronida ja tuleb tunnistada, et vaade sealt oli küll kena. Aga kahjuks ei olnud see just kõrgeim tipp lähiümbruse. Ning vast eredaima mulje jätsid tee äärtes lõpmatult laiuvad põllud ja istandused.

Ekskursioon ei ole muidugi niisama nalja pärast. Kuni osavõtjad lõbutsevad, peavad nendega kaasa tulnud tegelema lahenduste parandamisega. Järgmisel päeval toimub siis veel kaunis närvesööv apellatsiooniprotsess, mis tavaliselt demonstreerib, et ega parandajad lühikese ajaga väga head tööd ära teha ei suuda. Punktisummad muudkui kasvavad ja kahanevad.

Seevastu Makedoonias käisime ühes pärlipüügiga tegelevas linnakeses, uurisime lähedalasuvat kloostrit, mille ees tegutses täiesti arvestatav, turistidele huvi pakkuda võivate esemete turg. Linnakeses endas oli meeldejäävaim vast mitte just kõige otsesemalt pärlitega seonduv objekt — õigeusklik kirik, milles muhameedlikud vallutajad olid ohutuse kaalutlustel ikoonidel silmad peast eemaldanud.

Kui kõik tehtav on juba ära tehtud, siis kogunetakse kusagile pidulikumasse kohta ja hakatakse tulemusi välja kuulutama. Diplomite jagamisega kitsi ei olda, enamus saab umbes võrdselt kas esimese, teise, kolmanda koha auhinna või äramärkiva diplomi. Lõpupoole, lootusetumate jaoks on varuks paar niisama osavõtudiplomit ja parimate vahel jagatakse ära kolm *Grand First Prize*'i ning üks *Grand-Grand First Prize*. Traditsiooniliselt on ürituse suursponsoriks Wolfram Research (ehk Makers of Mathematica), seega alates umbes poolte kolmanda koha auhindade jagamise juures antakse välja ka mitmesugust matemaatilist vara karbikestes. Kui mõnes lauas juhtub istuma tugeva riigi võistkond, siis võib sinna algeline karbipüramiidike kerkida. Äramärkimist väärib siinjuures Iraani võistkond, kes alati oma auhinnasaajaid innukalt (seejuures ka lauluga) toetanud on.

Sellega on olulised asjatoimetused läbi, tuleb veel viimane pidulik söömaaeg maha pidada, potentsiaalselt saab veel tantsidagi ja järgmisel hommikul ootab ärasõit.

Kokkuvõttes võiks öelda, et olümpiaadil osalemine oli huvitav kogemus. Sain rikkamaks teadmistelt nii Kesk-Euroopa geograafia, ülikoolitasemel ülesannete stressiolukorras lahendamise kui ka teiste endasuguste üliõpilastega tutvumise osas. Olulisim ongi vast neist see viimane – teiste samaealiste ja huvilistega kokkupuutumine, tutvumine ja ka matemaatiliste oskuste võrdlemine.

Väitekirjade kaitsmine

Doktoritööd

Tartu Ülikool

Tanel Kaart – *doctor philosophiae* matemaatilise statistika erialal. *The reliability of linear mixed models in genetic studies.* Juhendaja dots. Tõnu Möls (Tartu Ülikool). Oponendid: prof. Dietrich von Rosen (Rootsi Põllumajandusülikool) ja prof. Anita Dobek (Poznani Põllumajandusülikool, Poola). Kaitstud 11.01.2006.

Kadre Torn – *doctor philosophiae* matemaatika erialal. *Shear and bending response of inelastic structures to dynamic loads.* Juhendaja prof. Jaan Lellep (Tartu Ülikool). Oponendid: prof. Janis Brauns (Läti Põllumajandusülikool) ja prof. Jakob Kõo (Eesti Maaülikool). Kaitstud 09.05.2006.

Kristel Mikkor – *doctor philosophiae* matemaatika erialal. *Uniform factorization for compact subsets of Banach spaces of operators.* Juhendaja prof. Eve Oja (Tartu Ülikool). Oponendid: prof. Anne Tali (Tallinna Ülikool) ja uurija-professor Hans-Olav Johannes Tylli (Soome Akadeemia). Kaitstud 20.06.2006.

Darja Saveljeva – *doctor philosophiae* matemaatika erialal. *Quadratic and cubic spline collocation for Volterra integral equations.* Juhendaja dots. Peeter Oja (Tartu Ülikool). Oponendid: prof. Jaan Janno (Tallinna Tehnikaülikool) ja vanemteadur Ewald Quak (SINTEF ICT, Oslo). Kaitstud 20.06.2006.

Kristo Heero – *doctor philosophiae* informaatika erialal. *Path planning and learning strategies for mobile robots in dynamic partially unknown environments.* Juhendajad vanemteadur Maarja Kruusmaa (Tartu Ülikool) ja dots. Jan Villemson (Tartu Ülikool). Oponent: prof. Paolo Fiorini (Verona Ülikool, Itaalia). Kaitstud 19.06.2006.

Annely Mürk – *doctor philosophiae* matemaatika erialal. *Optimization of inelastic plates with cracks.* Juhendaja prof. Jaan Lel-

lep (Tartu Ülikool). Oponent: prof. Vitauts Tamuzs (Läti Ülikool). Kaitstud 19.06.2006.

Annemai Raidjõe – *doctor philosophiae* matemaatika erialal. *Sequence spaces defined by modulus functions and superposition operators.* Juhendaja dots. Enno Kolk (Tartu Ülikool). Oponendid: prof. Anne Tali (Tallinna Ülikool) ja prof. Hans-Olav Johannes Tylli (Helsingi Ülikool). Kaitstud 21.09.2006.

Olga Panova – *doctor philosophiae* matemaatika erialal. *Real Gelfand-Mazur algebras.* Juhendaja prof. Mati Abel (Tartu Ülikool). Oponendid: dots. Jorma Arhippainen (Oulu Ülikool) ja dots. Aleksander Monakov (Tallinna Ülikool). Kaitstud 21.09.2006.

Härmel Nestra – *doctor philosophiae* informaatika erialal. *Iteratively defined transfinite trace semantics and program slicing with respect to them.* Juhendaja dots. Varmo Vene (Tartu Ülikool). Oponendid: prof. Helmut Seidl (Müncheni Tehnikaülikool) ja vanemteadur Tarmo Uustalu (Tallinna Tehnikaülikool, Küberneetika Instituut). Kaitstud 13.10.2006.

Tallinna Tehnikaülikool

Alar Leibak – loodusteaduste doktor. *Voronoi teooria aditiivne üldistus täiuslikele ruutvormidele üle algebraliste arvkorpuste.* Juhendajad dots. Paul Tammela (Tallinna Ülikool) ja prof. Peeter Puusemp (Tallinna Tehnikaülikool). Oponendid: Dr. Renaud Coulangeon (Bordeaux Ülikool, Prantsusmaa) ja dots. Ellen Redi (Tallinna Ülikool). Kaitstud 08.12.2006.

Magistritööd

Tartu Ülikool

Anna Bileva – kutsemagister rakendusstatistika erialal. *Mitmene võrdlemine protseduuriga MULTTES.* Juhendaja dots. Anne-Mai Parring (Tartu Ülikool). Oponent: lektor Mare Vähi (Tartu Ülikool). Kaitstud 10.02.2006.

Vesal Vojdani-Ghamsari – *magister scientiarum* informaatika erialal. *Mitmelõimeliste C-programmide kraasimine analüsaatoriga Goblin.* Juhendaja dots. Varmo Vene (Tartu Ülikool). Oponent: teadur Härmel Nestra (Tartu Ülikool). Kaitstud 10.02.2006.

Emilia Käsper – *magister scientiarum* informaatika erialal. *Complexity analysis of hardware-assisted attacks on A5/1.* Juhendaja prof. Helger Lipmaa (Tartu Ülikool). Oponent: prof. Ahto Buldas (Tartu Ülikool). Kaitstud 17.04.2006.

Maksim Ivanov – *magister scientiarum* matemaatika erialal. *Kolmnurgaga seotud lõikude geomeetria põhitulemused ja nende tõestusmeetodid.* Juhendaja dots. Elts Abel (Tartu Ülikool). Oponent: dots. Tiit Lepmann (Tartu Ülikool). Kaitstud 14.06.2006.

Helle Hallik – *magister scientiarum* matemaatika erialal. *Monotoonsust säilitav histopoleerimine.* Juhendajad dots. Malle Fischer (Tartu Ülikool) ja dots. Peeter Oja (Tartu Ülikool). Oponent: füüs.-mat. knd. Ivar-Igor Saarniit (Tartu Ülikool). Kaitstud 14.06.2006.

Tiina Kraav – *magister scientiarum* matemaatika erialal. *Praoga varda stabiilsus.* Juhendaja prof. Jaan Lellep (Tartu Ülikool). Oponent: dots. Sander Hannus (Tartu Ülikool). Kaitstud 14.06.2006.

Andres Teder – *magister scientiarum* informaatika erialal. *The problem sets of Java Micro Edition Technology.* Juhendaja prof. Jüri Kiho (Tartu Ülikool). Oponent: tehnoloogiajuht Veljo Otsason (Mobi Solutions). Kaitstud 15.06.2006.

Jüri Reimand – *magister scientiarum* informaatika erialal. *Geeniontoloogiate kaevandamise programm GOSt.* Juhendaja vanem-

teadur Jaak Vilo (Tartu Ülikool). Oponent: prof. Per Kraulis (Tartu Ülikool). Kaitstud 15.06.2006.

Mihhail Juhkam – *magister scientiarum* matemaatilise statistika erialal. *Populations with large number of classes: models and estimation of sample coverage and sample size.* Juhendaja prof. Kalev Pärna (Tartu Ülikool). Oponent: teadur Meelis Käärik (Tartu Ülikool). Kaitstud 15.06.2006.

Anu Vilu – kutsemagister finants- ja kindlustusmatemaatika erialal. *Kaotatud eluaastate mudelid Eesti andmetel.* Juhendaja emeriitprofessor Ene-Margit Tiit (Tartu Ülikool). Oponent: lektor Mare Vähi (Tartu Ülikool). Kaitstud 15.06.2006.

Indrek Zolk – *magister scientiarum* matemaatika erialal. *Banachi ruumi kommuteeruv aproksimatsiooniomadus.* Juhendaja prof. Eve Oja (Tartu Ülikool). Oponent: lektor Märt Põldvere (Tartu Ülikool). Kaitstud 20.06.2006.

Ingrid Vessin – *magister scientiarum* matemaatika erialal. *Moodulfunktsioonidega määratud jadaruumid ja tugev summeeruvus.* Juhendaja dots. Virge Soomer (Tartu Ülikool). Oponent: dots. Leiki Loone (Tartu Ülikool). Kaitstud 15.09.2006.

Kristo Käärmann – *magister scientiarum* informaatika erialal. *Haplotype inference using overlapping segments.* Juhendaja prof. Jaak Vilo (Tartu Ülikool) ja doktorant Sven Laur (Tartu Ülikool). Oponendid: prof. Eero Vainikko (Tartu Ülikool) ja statistik-geneetik Tanel Kaart (Tartu Ülikool). Kaitstud 15.09.2006.

Välismaal kaitstud magistritööd

Piia-Piret Eomois – *Master of Science* biostatistika erialal. *Sexual dysfunction and antiretroviral therapy.* Juhendajad R. Colebuners (Troopilise Meditsiini Instituut) ja A. Laenen (Hasselti Ülikool, Belgia). Kaitstud Hasselti Ülikoolis (Belgia).

Teele Tamme – *Master of Science* biostatistika erialal. *Finding the missing links in pneumonic plague epidemics: who infected whom?*

Juhendajad N. Hens (Hasselti Ülikool, Belgia) ja J. Wallinga (Riiklik Rahva Tervise ja Keskkonna Instituut, Holland). Kaitstud Hasselti Ülikoolis (Belgia).

Tallinna Ülikool

Sergei Sumin – *magister scientiarum* matemaatika erialal. *Geomeetriliste objektide sümmeetriad.* Juhendaja dots. Paul Tammela (Tallinna Ülikool). Openent: füüs.-mat. kand. Rein Kolde. Kaitstud 12.06.2006.

Tallinna Tehnikaülikool

Mervi Sepp – loodusteaduste magister. *Mittestatsionaarsete koherentsete optiliste lainete levi karakteristikud Kerri mittelineaarsusega kihilises keskkonnas.* Juhendaja vanemteadur Pearu Peterson (TTÜ Küberneetika Instituut). Oponent: vanemteadur Jaan Kalda (TTÜ Küberneetika Instituut). Kaitstud 02.06.2006.

Liis Rebane – loodusteaduste magister. *Valguse orbitaalse pöördemomendi rakendused optiliste kujutiste analüüsil.* Juhendaja vanemteadur Pearu Peterson (TTÜ Küberneetika Instituut). Oponent: vanemteadur Jaan Kalda (TTÜ Küberneetika Instituut). Kaitstud 02.06.2006.

Merle Randrüüt – loodusteaduste magister. *Lainelevi modelleerimine mikrostruktuuriga materjalides.* Juhendaja professor Jüri Engelbrecht (TTÜ Küberneetika Instituut). Oponent: vanemteadur Arvi Ravasoo (TTÜ Küberneetika Instituut). Kaitstud 02.06.2006.

Kert Tamm – loodusteaduste magister. *Deformatsioonilainete interaktsioonid mikrostruktuursetes tahkides.* Juhendaja professor Andrus Salupere (TTÜ Küberneetika Instituut). Oponent: professor Jüri Engelbrecht (TTÜ Küberneetika Instituut). Kaitstud 02.06.2006.

Mihhail Berezovski – loodusteaduste magister. *Elastse lainelevi numbriline simulatsioon kihilises mittelineaarses keskkonnas.*

Juhendaja prof. Jüri Engelbrecht (TTÜ Küberneetika Instituut). Oponent: teadur Andres Braunbrück (TTÜ Küberneetika Instituut). Kaitstud 02.06.2006.

Tanel Peets – loodusteaduste magister. *Dispersioon mikrostruktuursetes materjalides.* Juhendaja prof. Jüri Engelbrecht (TTÜ Küberneetika Instituut). Oponent: vanemteadur Arkadi Berezovski (TTÜ Küberneetika Instituut). Kaitstud 02.06.2006.

Madis Laas – loodusteaduste magister. *Akivise silmuse üldistatud Lie võrrandid ja nende integreeruvustingimused.* Juhendaja prof. Eugen Paal (TTÜ matemaatikainstituut). Oponent: dotsent Liivi Kluge (TTÜ matemaatikainstituut). Kaitstud 02.06.2006.

Janek Tabun – loodusteaduste magister. *Mittelineaarsete juhtimissüsteemide identifitseeritavus arvutialgebra süsteemiga Mathematica.* Juhendaja juhtivteadur Ülle Kotta (TTÜ Küberneetika Instituut). Oponent: dots. Mati Väljas (TTÜ matemaatikainstituut). Kaitstud 02.06.2006.

Edith Soosaar – loodusteaduste magister. *Upwelling filamentide numbriline modelleerimine Soome lahes.* Juhendaja vanemteadur Urmas Raudsepp (TTÜ meresüsteemide instituut). Oponent: juhtivteadur Jaan Laanemets (TTÜ meresüsteemide instituut). Kaitstud 06.06.2006.

Svetlana Vassiljeva – loodusteaduste magister. *Tuule genereeritud barokliinne veevahetus Pakri lahes.* Juhendaja vanemteadur Urmas Raudsepp (TTÜ meresüsteemide instituut). Oponent: vanemteadur Aleksander Toompuu (TTÜ meresüsteemide instituut). Kaitstud 06.06.2006.

Annika Kriisa – loodusteaduste magister. *Kahedimensionaalse magnetilise ühendi Na5RbCu4(AsO4)4Cl2 uurimine TMR spektroskoobiga.* Juhendaja: vanemteadur Raivo Stern (Keemilise ja Bioloogilise Füüsika Instituut). Oponent: vanemteadur Urmas Nagel (Keemilise ja Bioloogilise Füüsika Instituut). Kaitstud 06.06.2006.

Ülikoolide lõpetajad 2006

Tartu Ülikooli matemaatika-informaatikateaduskond

Bakalaureuseõpe (4 a)

Matemaatika

1. Veiko Lehto
2. Inga Mehide

Bakalaureuseõpe (3 a)

Matemaatika

1. Oliver Ait
2. Mari-Liis Kadak
3. Lennart Kitt
4. Oleg Košik – *cum laude*
5. Aleksei Lissitsin – *cum laude*
6. Peeter Puusemp
7. Ago-Erik Riet

Matemaatiline statistika

1. Kadri Kanarbik
2. Kati Kukk
3. Reeni Kuus
4. Aldo Mäsak
5. Heleri Narusk
6. Elis Paas
7. Helerin Rannala
8. Maria Sarv
9. Marek Tooming
10. Karolin Toompere
11. Merili Umbleja
12. Natalja Vassiljeva

Õpetajakoolitus

1. Viktoria Deputat
2. Külli Jesmin
3. Katrin Jõgi
4. Erli Kontkar
5. Tatjana Kornejeva
6. Katre Paabo
7. Peep Põldmaa
8. Allan Randlepp
9. Raivo Reinart
10. Diana Rožkova
11. Hiie Taniloo
12. Epp Tiitsu
13. Kristel Tuisk
14. Tanel Tärgla
15. Kerli Vahi
16. Marianna Vares
17. Irina Vesi

Tallinna Ülikooli matemaatika osakond

Magistriõpe (3+2)

Matemaatikaõpetaja

1. Anna Dmitrijeva
2. Inna Gusseva
3. Anna Surmai
4. Jelena Sussareva

Bakalaureuseõpe (5 a)

Gümnaasiumi matemaatikaõpetaja (lisaeriala informaatika)

1. Kadri Limberg
2. Natalja Maksimova
3. Kerli Raudsepp
4. Kati Rääk
5. Anna Tarakanova – *cum laude*
6. Ljubov Tolmatšova
7. Piret Vaargas

Diplomiõpe (4 a)

Põhikooli matemaatikaõpetaja (lisaeriala informaatika)

1. Maarika Kivi
2. Kristi Kons
3. Ave Rüüson
4. Riina Soon

Bakalaureuseõpe (3 a)

Matemaatika

1. Juri Belikov – *cum laude*
2. Alesja Borissova
3. Jelena Dmitrijeva
4. Olga Fatfudinova
5. Marina Filippova
6. Andrei Frolov
7. Kätlin Kalde – *cum laude*
8. Vadim Kaparin
9. Galina Kazban
10. Jekaterina Kleidov
11. Oxana Krylova
12. Viktoria Levitševa
13. Kadri Lill
14. Helli Lõoke – *cum laude*
15. Kai Mikk
16. Kadri Nool
17. Gerly Ottender
18. Ivar Raav
19. Anneli Raju
20. Monika Raudsik
21. Rene Sadam
22. Sirje Saula
23. Jekaterina Simonova
24. Merike Teekivi
25. Janno Tults
26. Katrin Vabson
27. Marika Äkke

Tallinna Tehnikaülikool

Bakalaureuseõpe (3 a)

Tehniline füüsika[20]

1. Henri Alas
2. Ardo Illaste
3. Tanel Joon
4. Rainer Mark
5. Dag Nurm
6. Madis Pärn
7. Päivo Simson – *cum laude*
8. Kristjan Tammik
9. Rivo Uiboupin
10. Rait Valksaare

[20]Tallinna Tehnikaülikoolis õpetatakse tehnilise füüsika eriala bakalaureuseõppes võrdses mahus nii matemaatikat kui ka füüsikat. Magistriõppes valitakse juba kas matemaatika, füüsika või mehaanika suund.

Juubelid

Ülo Lepik – 85 (sündinud 11. juulil 1921 Tartus)

Ülo Kaasik – 80 (sündinud 9. novembril 1926 Tallinnas)

Tamara Sõrmus – 80 (sündinud 29. novembril 1926 Tartus)

Endel Jürimäe – 75 (sündinud 22. veebruaril 1931 Rae vallas)

Endel Ruustal – 75 (sündinud 24. juulil 1931 Tõrvas)

Nora Veske – 75 (sündinud 26. veebruaril 1931 Rakveres)

Voldemar Arro – 70 (sündinud 12. oktoobril 1936 Venemaal, Leningradi oblastis, Kingissepas)

Andres Jaeger – 70 (sündinud 29. augustil 1936 Tartus)

Tiiu Jõgi – 70 (sündinud 9. juunil 1936 Vändras)

Evi Mitt – 70 (sündinud 4. jaanuaril 1936 Laheda vallas)

Viktor Orlov – 70 (sündinud 24. oktoobril 1936 Tartumaal, Alatskivi vallas, Nina külas)

Maido Rahula – 70 (sündinud 20. mail 1936 Käreveres)

Margus Tõnnov – 70 (sündinud 25. aprillil 1936 Pangodi vallas)

Heino Türnpu – 70 (sündinud 5. juunil 1936 Hiiumaal)

Helgi Uudelepp – 70 (sündinud 10. juunil 1936 Järvamaal)

Otto Karma – 65 (sündinud 18. mail 1941 Tallinnas)

Jüri Kirs – 65 (sündinud 17. novembril 1941 Tallinnas)

Enno Kolk – 65 (sündinud 6. septembril 1941 Rõngus)

Elmar Sakkov – 65 (sündinud 9. juunil 1941 Mõisakülas)

Ivar Tammeraid – 65 (sündinud 25. septembril 1941 Tallinnas)

Helki Haavasalu – 60 (sündinud 27. novembril 1946 Koorastes)

Aleksander Piroženko – 60 (sündinud 30. juunil 1946 Venemaal, Volgogradi oblastis, Dubovka linnas)

Valentina Sitina – 60 (sündinud 4. märtsil 1946 Tallinnas)

Peep Miidla – 55 (sündinud 11. juunil 1941 Tartus)

Viktor Abramov – 50 (sündinud 29. novembril 1956 Tallinnas)

Svetlana Babitšenko – 50 (sündinud 6. novembril 1956 Tallinnas)

EMS 2006. a. tegevuse kroonika

- **Üldkoosolek** toimus 11. märtsil Tallinna Vanalinna Hariduskolleegiumi Muusikamajas. Koosolekul valiti uus seltsi juhatus koosseisus: Mati Abel, Kalle Kaarli, Raul Kangro, Katrin Kokk, Valdis Laan, Toivo Leiger, Tiit Lepmann, Peeter Puusemp, Ellen Redi, Tõnu Tõnso. Seltsi presidendiks valiti uuesti Kalle Kaarli. Valiti ka revisjonikomisjon koosseisus Leiki Loone, Frederik Vichmann ja Jüri Lippus. Uuteks auliikmeteks valiti Rein Kolde, Aavo Lind, Ene Tiit ja Gennadi Vainikko.

- **Juhatuse koosolekud** toimusid 15.02.2006, 28.05.2006 ja 04.10.2006.

- **Matemaatikapäevad, konverentsid**

  1. Üldkoosolekuga ühendatult peeti 11. märtsil EMS KMÜ talvepäev.
  2. 10. Eesti Matemaatika Päevad toimusid Jänedal 26.-28. juunil.
  3. Selts osales rahvusvahelise konverentsi Matemaatika õpetamine ja selle perspektiivid, mis toimus 12.-13. mail Tartus, korraldamisel.

- **Kirjastustegevus.** Ilmusid järgmised trükised:

  1. EMS aastaraamat 2005, toimetas Peeter Puusemp.
  2. Elts Abel, Mati Abel, Ülevirumaalised matemaatikavõistlused.
  3. Matemaatika õpetamine ja selle perspektiivid. 7. rahvusvaheline konverents 12.-13. mai 2006. Artiklite kogumik. Toimetasid Elts Abel jt.
  4. Koolimatemaatika XXXIII, toimetasid Elts Abel ja Lea Lepmann.
  5. Kõrgem matemaatika. Harjutusülesanded. (kordustrükk)

6. Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis, nr. 10.

- **Loengud.** Toimusid avalikud loengud: Tallinnas
  - 26. aprillil Mati Abel "Visioon matemaatika arengust käesoleva sajandil",
  - 14. detsembril Peeter Oja "Splainidega projektsioonimeetodid Volterra integraalvõrrandite lahendamisel"

  ning Tartus
  - 12. aprillil Tarmo Uustalu "Tüübisüsteemid – suur ühendav teooria".