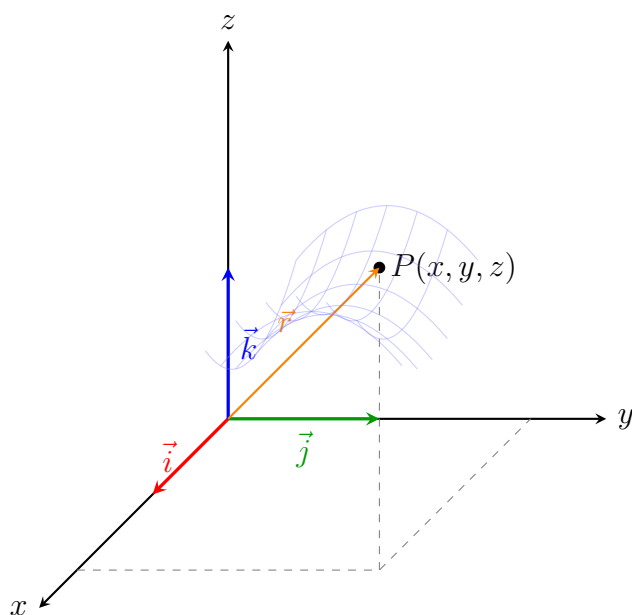


Analüütiline geomeetria

Viktor Abramov, Priit Lätt



Matemaatika ja statistika instituut
Tartu 2026

Sisukord

I	Vektoralgebra, sirged ja tasandid	4
1	Tehted vektoritega	9
1.1	Vektori mõiste	9
1.2	Vektorite liitmine	15
1.3	Vektori korrutamine arvuga	19
2	Baas, reeper, koordinaadid	23
2.1	Baas	24
2.2	Vektori koordinaadid	25
2.3	Ristbaas	31
2.4	Tasandi orientatsioon	37
2.5	Vektorite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus	39
2.6	Reeper, koordinaadisüsteem	43
2.7	Polaarkoordinaadid	45
2.8	Sfäärilised koordinaadid	47
3	Skalaarkorrutis	50
3.1	Skalaarkorrutise definitsioon	50
3.2	Skalaarkorrutise omadused	51
3.3	Skalaarkorrutis koordinaatides	53
4	Vektorkorrutis	56
4.1	Vektorkorrutise definitsioon ja omadused	56
4.2	Vektorkorrutis koordinaatides	62
4.3	Kahekordne vektorkorrutis	65
5	Vektorite segakorrutis	67
5.1	Segakorrutise definitsioon ja geomeetriline tähendus	67
5.2	Segakorrutise omadused	70
5.3	Segakorrutis koordinaatides	71
6	Sirge võrrandid	74
6.1	Sirge võrrand ruumis	75
6.2	Sirge võrrand tasandil	76
6.3	Punkti kaugus sirgeni	78

7	Tasandi võrrandid	80
7.1	Tasandi parameetrilised võrrandid	80
7.2	Tasandi ilmutamata võrrandid	81
7.3	Üleminek ühelt võrrandilt teisele	82
7.4	Tasandite vastastikune asend. Tasandite lõikesirge	84
7.5	Punkti kaugus tasandini	87
8	Koordinaatide ja ruumi teisendused	88
8.1	Üleminek ühelt reeperilt teisele	91
8.2	Valemite maatrikskuju	93
8.3	Tasandi teisendused	96
9	Weyli aksiomaatika	100
9.1	Vektorruum	100
9.2	Eukleidiline ruum	101
II	Ellips, hüperbool, parabool	103
10	Teist järku joonte klassifikatsioon	104
10.1	Teist järku joone üldvõrrand	104
10.2	Ruutosa lihtsustamine pöörde abil	105
10.3	Reeperi paralleelüke	106
10.4	Teist järku joone võrrandi invariantid	109
10.5	Elliptilist tüüpi teist järku jooned	111
10.6	Hüperboolset tüüpi teist järku jooned	113
10.7	Paraboolset tüüpi teist järku jooned	114
11	Ellips	117
11.1	Kanooniline võrrand, ekstsentrilisus	117
11.2	Fokaalraadiused	119
11.3	Juhtsirged	122
11.4	Parameetriline võrrand	125
12	Hüperbool	128
12.1	Hüperbooli struktuur ja sümmeetriad	128
12.2	Hüperbooli fookused ja ekstsentrilisus	132
12.3	Hüperbooli juhtsirged	136
13	Parabool	139
13.1	Parabooli sümmeetriad	139
13.2	Parabooli geomeetriline struktuur	140

14 Võrrand polaarkoordinaatides	142
14.1 Joone võrrand polaarkoordinaatides	142
14.2 Ellipsi, hüperbooli ja parabooli võrrand	143
15 Lõikumine sirgega, puutujad	145
15.1 Ellips	145
15.2 Hüperbool	148
15.3 Parabool	150
16 Puutujate võrrandid	153
16.1 Funktsiooni graafiku puutuja	153
16.2 Parametriseeritud joone puutuja	153
16.3 Ellipsi puutuja	155
16.4 Hüperbooli puutuja	156
16.5 Parabooli puutuja	157
17 Puutujate geomeetrilised omadused	159
17.1 Ellipsi puutuja omadus	159
17.2 Hüperbooli puutuja omadus	161
17.3 Parabooli puutuja omadus	164

Osa I

Vektoralgebra, sirged ja tasandid

Sissejuhatus

Analüütilise geomeetria uurimisobjektiks on geomeetriliste kujundite, eelkõige joonte ja pindade, omadused, mida uuritakse ruumikoordinaatidest sõltuvate võrrandite abil. Algebra rakendamisel geomeetriliste omaduste uurimisel on pikk ajalugu. Juba Vana-Babüloonia matemaatikud lahendasid täisnurksete kolmnurkade seotud ülesandeid, leides lõikude pikkusi arvuliste ruutvõrrandite juurtena. Tugeva tõuke algebra kasutamisele geomeetrias andsid F. Viète'i (1540–1603) tööd, milles ta arendas sümboolset ja arvulist algebrat. Analüütilise geomeetria rajajateks peetakse aga väljapaistvaid prantsuse matemaatikuid R. Descartes'i (1596–1650) ja P. Fermat'd (1601–1665).

Koordinaadisüsteemid ja ruumi dimensioon

Analüütilise geomeetria meetodi vundamendiks on koordinaadisüsteemi mõiste. Koordinaate tunti juba antiikajal; näiteks geograafilisi pikkus- ja laiuskraade kasutati Maa pinnal punktide asukoha määramiseks. Sarnast süsteemi kasutasid vanaaja astronoomid tähtede asukoha kirjeldamiseks taevafääril. Descartes ja Fermat näitasid, et koordinaadimeetod kombineerituna Viète'i arendatud sümboolse algebraga on võimas ja efektiivne matemaatiline vahend geomeetriliste objektide omaduste uurimiseks.

Matemaatiliselt määrab koordinaadisüsteem injektiivse (ehk üksühese) kujutuse, mis seab ruumi igale punktile vastavusse reaalarvudest koosneva järjestatud n -enniku, kus $n \geq 1$ on täisarv. Arvu n nimetatakse ruumi dimensiooniks. Käesolevas kursuses käsitleme ühemõõtmelist ruumi (sirget, $n = 1$), kahemõõtmelist ruumi (tasandit, $n = 2$) ja kolmemõõtmelist ruumi ($n = 3$).

Koordinaadisüsteem võib hõlmata kas kogu ruumi (globaalne koordinaadisüsteem) või ainult osa sellest (lokaalne koordinaadisüsteem). Selles loengukursuses kasutame peamiselt ristkoordinaadisüsteeme, mis konstrueeritakse ortonormeeritud reeperi abil. Lisaks ristkoordinaatidele leiavad analüütilises geomeetrias rakedust ka kõverjoonelised koordinaadisüsteemid, näiteks polaarkoordinaadid tasandil ning sfäärilised koordinaadid kolmemõõtmelises ruumis. Kolmandas peatükis anname neist süsteemidest ülevaate ja esitame valemid, mis seovad ristkoordinaate kõverjooneliste koordinaatidega.

Vektorarvutus kui analüütilise geomeetria tööriist

Tänapäevases analüütilise geomeetria käsitluses on kesksel kohal vektorarvutus, mistõttu on käesoleva kursuse üheks põhimõisteks vektor. Koolimatemaatikast on vektor õpilastele tuttav kui suunatud lõik. Selles kursuses nimetame suunatud lõiku

seotud vektoriks, rõhutades, et see on oma otspunktide kaudu seotud konkreetsete ruumipunktidega.

Võttes lähtepunktiks seotud vektori, defineerime võrdsed seotud vektorid ning seejärel vaba vektori kui võrdsete seotud vektorite ekvivalentsiklassi. Vaba vektori mõiste mängib kursuses fundamentaalset rolli. Terminoloogia lihtsustamiseks jätame sageli sõna “vaba” ära ja räägime lihtsalt vektorist. Näitlikult võib seda ette kujutada nii: igas ruumipunktis on määratud samasuunaline ja sama pikkusega seotud vektor (suunatud löik). Nihutades iga ruumipunkti piki vastavat vektorit, saame kogu ruumi nihke etteantud suunas ja etteantud kauguse võrra. Seega võib vektorit intuiitiivselt käsitada ruumi nihkena.

Vektorite hulgal on defineeritud kaks algebralist tehet: vektorite liitmine ja korrutamine reaalarvuga. Neile definitsioonidele tuginedes tõestame olulised algebralised omadused, nagu kommutatiivsus, assotsiatiivsus ja distributiivsus. Neist omadustest järeldeb, et vektorid moodustavad vektorruumi üle reaalarvude kor-puse.

Järgnevalt defineerime vektorite skalaarkorrutise ja uurime selle omadusi. Skalaarkorrutis — vektorite pikkuste ja nende vahelise nurga koosinuse korrutis — on tuntud juba kooligeomeetriast. Meie eesmärgiks on tuletada valem, mis avaldab skalaarkorrutise vektorite ristkoordinaatide kaudu. Skalaarkorrutise eriline tähtsus seisneb selle seotuses eukleidilise vektorruumi mõistega.

Viies peatükk on pühendatud vektorkorrutisele. Vektorkorrutis on algebrali-ne tehe vektorruumi sees, mis seab igale kahele vektorile vastavusse uue vektori. Sellel on kaks olulist omadust: kaldsümmeetrilisus ja Jacobi samasuse rahuldami-ne. Selles peatükis tuletame vektorkorrutise arvutamise valemi ristkoordinaatides ning tõestame valemi kahekordse vektorkorrutise avaldamiseks vektorite ja nende skalaarkorrutiste kaudu. Kuues peatükk keskendub vektorite segakorrutisele.

Sirged ja tasandid

Peatükid 7 ja 8 käsitlevad analüütilise geomeetria põhiküsimust: sirgete ja tasandi-te geomeetriliste omaduste uurimist algebraliste võrrandite abil. Selleks kasutame laialdaselt eelnevalt õpitud vektoralgebrat. Näitame, millised geomeetrilised and-med määravad sirge või tasandi üheselt ja kuidas nende põhjal koostada vastavad võrrandid.

Alustame vektorvõrranditest, mille eeliseks on sõltumatus koordinaadisüsteemist. Seejärel eeldame, et ruumis on ortonormeeritud reeperi abil fikseeritud rist-koordinaadid, ja esitame saadud vektorvõrrandid koordinaatkujul. Tasandil asuva sirge põhivõrranditeks on üldvõrrand, kanooniline võrrand ja parameetriline võrrand. Ruumisirge korral on nendeks kanooniline ja parameetriline võrrand, tasandi puhul aga üldvõrrand ja parameetriline võrrand.

Eukleidiline geomeetria ja Hilberti aksiomaatika

Sissejuhatuse lõpetuseks peatume ruumi geomeetria olemusel. On ilmne, et analüütilise geomeetria arendamiseks peame tegema eeldusi ruumi geomeetrilisteomaduste kohta. Meie käsitus toetub eukleidilisele geomeetriaale, lähtudes kahe- või kolmemõõtmelisest eukleidilisest ruumist. Selle geomeetria kirjeldamiseks kasutame aksiomaatilist lähenemist.

Käesolevas konspektis eeldame, et ruumis kehtivad kõik D. Hilberti teoses¹ esitatud aksioomid. Me ei esita kogu süsteemi, vaid anname ülevaate selle struktuurist ja toome välja analüütilise geomeetria seisukohalt olulisemad aksioomid. Hilberti aksiomaatika määratlemata põhimõisted on punkt, sirge ja tasand. Samuti on määratlemata kuuluvussuhe, vahelsus ja kongruentsussuhe. Neid seoseid kirjeldavad viide rühma jagatud aksioomid.

I rühm: Kuuluvusaksioomid

Märkus: Allpool eeldame alati, et rääkides mitmest punktist, sirgest või tasandist, on need omavahel erinevad. Kui punkt P kuulub sirgele l või tasandile λ , ütleme, et P asub sirgel l (tasandil λ) või et sirge l (tasand λ) läbib punkti P .

- G₁) Suvalist kaht punkti P ja Q läbib sirge l .
- G₂) Suvalist kaht punkti P ja Q läbib kõige rohkem üks sirge.
- G₃) Igal sirgel asub vähemalt kaks punkti. Leidub vähemalt kolm punkti, mis ei asu samal sirgel.
- G₄) Suvalist kolme punkti P, Q, R , mis ei asu samal sirgel, läbib tasand λ . Igal tasandil asub vähemalt üks punkt.
- G₅) Suvalist kolme punkti, mis ei asu samal sirgel, läbib kõige rohkem üks tasand.
- G₆) Kui sirge l kaks punkti asuvad tasandil λ , siis asuvad tasandil λ kõik sirge l punktid. Sel juhul ütleme, et sirge l asub tasandil λ .
- G₇) Kui kahel tasandil on ühine punkt, siis on neil vähemalt veel üks ühispunkt.
- G₈) Leidub vähemalt neli punkti, mis ei asu ühel ja samal tasandil.

II rühm: Järjestusaksioomid ja vahelsus

Järjestusaksioomidena tuntakse nelja aksioomi, mis defineerivad punktide järjestuse sirgel ja võimaldavad sisse tuua lõigu mõiste. Kui punkte P ja Q läbib ainus sirge l , nimetatakse neist kahest punktist koosnevat süsteemi *lõiguks* PQ või QP . Otpunktide vahele jäävaid sirge l punkte nimetatakse lõigu sisepunktideks. See

¹David Hilbert "The Foundations of Geometry" — <https://www.gutenberg.org/ebooks/17384>

aksioomide rühm võimaldab defineerida ka sirgel asuvast punktist O lähtuva *pool-sirge* ehk *kiire* kui sirge punktide hulga, mis asuvad punktist O samal pool.

III rühm: Kongruentsusaksioomid

Määratlevad lõikude võrdsuse, näidates, et kongruentsussuhe on ekvivalentsussuhe (refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne).

IV ja V rühm: Paralleelsus- ja pidevusaksioomid

Neljas rühm sisaldab Eukleidese paralleelsete sirgete aksioomi ning viies rühm Archimedese ja sirge täielikkuse aksioome.

Aksioomide süsteem võimaldab defineerida ka nurga. Tasandil λ asuvast punktist O lähtuva kahe erineval sirgel paikneva kiire k ja m süsteemi nimetatakse nurgaks, tähistusega $\angle(k, m)$ või $\angle(m, k)$. Kiired on nurga haarad ja punkt O on tipp. Kokkulangevate kiirte korral on tegemist nullnurgaga $\angle(k, k)$, vastassuunaliste kiirte korral aga sirgnurgaga.

Hilberti aksioomidest tuletatakse hulk väiteid, mille täpsed tõestused leiab eespool viidatud monograafiast “The Foundations of Geometry”. Muuhulgas saab aksioomide toel igale lõigule PQ vastavusse seada pikkuse $|PQ|$ — positiivse reaalarvu, eeldades fikseeritud pikkusühikut. Punktiks kidunud lõigu pikkus on null ja võrdsetel lõikudel on sama pikkus. Samuti saab igale nurgale vastavusse seada arväärtuse (radiaanides) vahemikus 0 kuni π , mis mõõdab lühimat pööret ühe haara kattumiseni teisega ja mida tähistatakse $\angle(k, m)$.

Oluline on märkida, et Hilberti aksiomaatikale rajatud eukleidiline geomeetria ja Descartes’i analüütiline geomeetria on ekvivalentsed. Tänapäevase aksiomaatilise käsitle, mis on algebraline ja tugineb afiinse ruumi mõistele, esitas Hermann Weyl (käsitletakse paragrahvis 9).

1 Tehted vektoritega

Üks analüütilise geomeetria tähtsamaid mõisteid on vektori mõiste. See on lugejale tuttav juba koolimatemaatika alggeomeetriast. Enne kui anname vektori täpse definitsiooni, teeme mõned üldisemad märkused geomeetrilise ruumi kohta, milles vektorid asuvad. Eeldame, et ruum on eukleidiline, selles kehtivad kõik sissejuhatustes kirjeldatud Hilberti aksioomid ning nendest tulenevad väited. Sellest järeldub kaks olulist omadust, mida edaspidi kasutame. Esiteks, iga lõigu korral on määratud selle pikkus ehk mittenegatiivne arv, kusjuures see arv on null parajasti siis, kui lõigu otspunktid langevad kokku (st lõik taandub punktiks). Teiseks on iga kahe ühest ja samast punktist lähtuva kiire korral määratud nendevaheline nurk φ . Täpsuse huvides eeldame, et nurgad mõõdetakse radiaanides. Käesolevas kursuses mõistame nurga all seda nurka, mis tekib ühe kiire pööramisel lühimat teed pidi teisega kokkulangemiseni. Sellest definitsioonist tuleneb, et nurk rahuldab võrratust $0 \leq \varphi \leq \pi$.

1.1 Vektori mõiste

Tähistame eukleidilist ruumi tähega $\mathcal{E}$. Olgu P ja Q selle ruumi kaks punkti, mis määravad lõigu PQ . Kui sellele lõigule on antud suund punktist P punkti Q , nimetame lõiku seotud vektoriks ja tähistame seda kui $\overrightarrow{PQ}$. Seega on seotud vektori tähises esimesel kohal alguspunkt ning teisel kohal lõpp-punkt. Võime öelda, et seotud vektor on eukleidilise ruumi punktide järjestatud paar, kus punktide järjestus määrab lõigu suuna. Kõigi eukleidilise ruumi $\mathcal{E}$ seotud vektorite hulka tähistame $\mathcal{W}$.

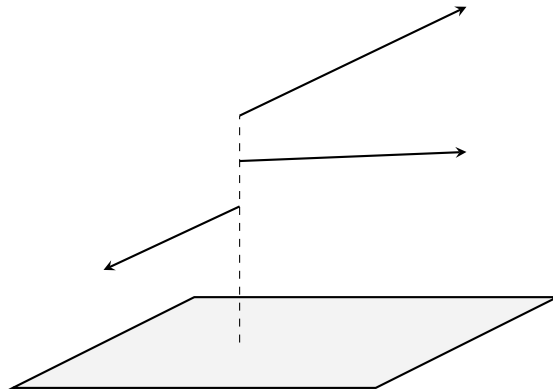
Lõigul PQ on olemas ka teine, esimesega vastassuunaline suund — suund punktist Q punkti P . Seega saame moodustada ka teise seotud vektori $\overrightarrow{QP}$, mis erineb seotud vektorist $\overrightarrow{PQ}$ oma suuna poolest. Seotud vektorit $\overrightarrow{QP}$ nimetame seotud vektori $\overrightarrow{PQ}$ *vastandvektoriks*. Juhul, kui punktid P ja Q langevad kokku, nimetame seotud vektorit $\overrightarrow{PP}$ nullvektoriks, sõltumata sellest, milline on punkt P .

Oluline lõigu omadus on selle pikkus. Seotud vektori pikkuseks loeme teda määratleva lõigu pikkuse ja tähistame seda kui $|\overrightarrow{PQ}|$. Seega kehtib $|\overrightarrow{PQ}| \geq 0$, kusjuures vektori pikkus on null parajasti nullvektori korral. Lisaks tuleneb vastandvektori $\overrightarrow{QP}$ definitsioonist, et $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{QP}|$.

Seotud vektoreid nimetatakse *kollineaarseteks*, kui nad asuvad kas ühel ja samal sirgel või paralleelsetel sirgetel. Kui $\overrightarrow{PQ}$ ja $\overrightarrow{SR}$ on kollineaarsed, tähistame seda järgmiselt: $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{SR}$. Kaht kollineaarset seotud vektorit nimetame *samasuunalisteks* (tähistame $\overrightarrow{PQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{SR}$), kui neil on sama suund, ning *vastassuunalisteks* (tähistame $\overrightarrow{PQ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{SR}$), kui nende suunad on vastupidised. On ilmne, et seotud

vektor ja talle vastav vastandvektor on vastassuunalised. Kuna nullvektoril puudub suund, loetakse see kollineaarseks mistahes seotud vektoriga.

Veel üks tähtis mõiste on *seotud vektorite komplanaarsus*. Seotud vektoreid nimetatakse komplanaarseteks, kui leidub tasand, millega nad on paralleelsed. Erijuhul, kui komplanaarsete seotud vektorite alguspunktid ühtivad, tähendab komplanaarsus seda, et nad asuvad ühel ja samal tasandil. On ilmne, et seotud vektorite komplanaarsusest saab rääkida ainult kolmemõõtmelises ruumis.



Joonis 1: Vektorite komplanaarsus

Üheks keskseks mõisteks vektorarvutuses on võrdsete seotud vektorite definitsioon.

Definitsioon 1. Kaht seotud vektorit $\overrightarrow{PQ}$ ja $\overrightarrow{SR}$ nimetatakse **võrdseteks**, kui täidetud on järgmised tingimused:

$$\overrightarrow{PQ} \uparrow \uparrow \overrightarrow{SR} \quad \text{ja} \quad |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{SR}|.$$

See tähendab, et seotud vektorid on samasuunalised ja võrdse pikkusega. Asjaolu, et need seotud vektorid on võrdsed tähistatakse $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$.

Rangelt võttes ei ole ülaltoodud definitsioon rakendatav seotud nullvektorite korral, kuna nullvektoril puudub suund. Sel juhul postuleerime lihtsalt, et kõik seotud nullvektorid on omavahel võrdsed. See ei ole vastuolus eespool antud vektorite võrdsuse definitsiooniga, kuna kõik nullvektorid on pikkusega null.

Märgime, et seotud vektorite võrdsus erineb lugejale tuttavast arvude võrdsusest. Kaks võrdset arvu on sisuliselt üks ja sama arv. Vektorite puhul see aga nii ei ole: kaks võrdset seotud vektorit ei ole üldjuhul üks ja sama vektor, kuna ühe alguspunkt võib erineda teise alguspunktist. Seega on meil olemas hulk omavahel võrdsed seotuid vektoreid. Just seda võrdsete seotud vektorite hulka kasutatakse abstraktse ehk vaba vektori mõiste sisseviimiseks. Seega on meie järgmiseks eesmärgiks anda vaba vektori definitsioon ning selleks vajame selliseid hulgateoreetilisi

mõisteid nagu ekvivalentsiseos, ekvivalentsiklassid ja nende mõned omadused, mis esitatakse ilma tõestuseta.

Olgu $\mathcal{A}$ mingi hulk. Alamhulka $\mathcal{R} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ nimetatakse binaarseks seoseks hulgal $\mathcal{A}$. Kui elementide paar $(x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ kuulub alamhulka $\mathcal{R}$, siis öeldakse, et elemendid x, y on seoses $\mathcal{R}$ ning seda tähistatakse kujul $x \mathcal{R} y$. Meie eesmärkide jaoks on kõige olulisem binaarne seos, mida nimetatakse ekvivalentsiseoseks. Binaarset seost ρ hulgal $\mathcal{A}$ nimetatakse **ekvivalentsiseoseks**, kui iga $x, y, z \in \mathcal{A}$ korral on täidetud järgmised tingimused:

- refleksiivsus - $x \rho x$, s.t. iga hulga $\mathcal{A}$ element x on seoses ρ iseendaga,
- sümmeetrilisus - kui $x \rho y$, siis $y \rho x$,
- transitiivsus - kui $x \rho y$ ja $y \rho z$, siis $x \rho z$.

Olgu x hulga $\mathcal{A}$ suvaline element ja ρ ekvivalentsiseos hulgal $\mathcal{A}$. Kõik hulga $\mathcal{A}$ elemendid, mis on elemendiga x seoses ρ , moodustavad hulga $\mathcal{A}$ alamhulga, mida tähistame $[x]$. Seega $[x] = \{y \in \mathcal{A} : y \rho x\}$ ja $[x] \subset \mathcal{A}$. Alamhulka $[x]$ nimetatakse elemendi x **ekvivalentsiklassiks**. Iga elementi y ekvivalentsiklassist $[x]$ nimetatakse selle ekvivalentsiklassi **esindajaks**. Kõigi ekvivalentsiklasside hulka nimetatakse hulga $\mathcal{A}$ **faktorhulgaks** ekvivalentsiseose ρ järgi ning seda tähistatakse $\mathcal{A}/\rho$. Seega on faktorhulga $\mathcal{A}/\rho$ elementideks ekvivalentsiklassid. Ekvivalentsiklassidel on kaks olulist omadust, mille esitame ilma tõestuseta.

- Kaks ekvivalentsiklassi kas langevad kokku, st koosnevad samadest elementidest, või neil ei ole ühiseid elemente.
- Kõigi ekvivalentsiklasside ühend, vaadelduna hulga $\mathcal{A}$ alamhulkadena, on võrdne hulgaga $\mathcal{A}$.

Pöördume nüüd tagasi eukleidilise ruumi $\mathcal{E}$ seotud vektorite juurde. Oleme seotud vektorite hulgal $\mathcal{W}$ defineerinud võrdsete seotud vektorite mõiste (Definitsioon 1). Seotud vektorite võrdsuse mõistel on oluline omadus. Kui $\overrightarrow{PQ}$ on seotud vektor ja R on eukleidilise ruumi $\mathcal{E}$ suvaline punkt, siis saab punktis R konstrueerida seotud vektori $\overrightarrow{RS}$, mis on võrdne seotud vektoriga $\overrightarrow{PQ}$.

Tegemist on geomeetrilise väitega, mida saab tõestada Hilberti aksioomide abil. Tõepoolest, olgu l sirge, millel asub seotud vektor $\overrightarrow{PQ}$. Kui punkt R ei asu sirgel l , siis paralleelsete sirgete aksioomi (IV) kohaselt leidub täpselt üks sirge l' , mis läbib punkti R ja on paralleelne sirgela l . Kasutades nüüd kongruentsuse aksioomi (III₁), määrame sirgel l' punkti S nii, et lõik RS oleks kongruentne lõiguga PQ ning punkt S asuks punktist R lähtuval kiirel selliselt, et seotud vektori $\overrightarrow{RS}$ suund langeks kokku seotud vektori $\overrightarrow{PQ}$ suunaga. Siis on seotud vektor $\overrightarrow{RS}$ võrdne seotud vektoriga $\overrightarrow{PQ}$ ja väide on tõestatud.

Juhul kui punkt R asub sirgel l , rakendame kohe kongruentsuse aksioomi (III₁). Kui algne seotud vektor on nullvektor $\overrightarrow{PP}$, siis võtame punktis R seotud nullvektori $\overrightarrow{RR}$. Edaspidi ütleme, et seotud vektor $\overrightarrow{RS}$ on saadud seotud vektori $\overrightarrow{PQ}$ **paralleellükke** teel punktist P punkti R .

Seotud vektorite võrdsus on binaarne seos hulgal $\mathscr{W}$. Tähistame seda binaarset seost sümboliga v . Seega

$$v = \{(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS}) \in \mathscr{W} \times \mathscr{W} : \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}\}.$$

On lihtne veenduda, et v on ekvivalentsiseos, st seotud vektorite võrdsus määrab ekvivalentsiseose seotud vektorite hulgal $\mathscr{W}$. Seega saame faktorhulga $\mathscr{W}/v$, mida tähistame sümboliga $\mathscr{V}$, st $\mathscr{V} = \mathscr{W}/v$. Selle hulga elementideks on võrdsete seotud vektorite ekvivalentsiklassid. Hulga $\mathscr{V}$ elemente nimetame **vabadeks vektoriteks**. Seega on vaba vektor võrdsete seotud vektorite ekvivalentsiklass. Olgu $\overrightarrow{PQ}$ suvaline seotud vektor. Vektoriga $\overrightarrow{PQ}$ võrdsete seotud vektorite ekvivalentsiklassi tähistame $[\overrightarrow{PQ}]$. Seega $[\overrightarrow{PQ}]$ on vaba vektor ja kehtib

$$[\overrightarrow{PQ}] = \{\overrightarrow{RS} \in \mathscr{W} : \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PQ}\}.$$

Kõik seotud nullvektorid on omavahel võrdsed. Seetõttu moodustavad nad ekvivalentsiklassi, mida nimetame **nullvektoriks** ja tähistame $\vec{0}$. Seega $\vec{0} = [\overrightarrow{PP}]$.

Kuidas konstrueerida vaba vektori, kui on antud seotud vektor $\overrightarrow{PQ}$? Seda konstruktsiooni saab teostada eespool kirjeldatud seotud vektori paralleellükke abil. Kasutades seotud vektori $\overrightarrow{PQ}$ paralleellüket, konstrueerime eukleidilise ruumi $\mathscr{E}$ igas punktis R seotud vektori $\overrightarrow{RS}$, mis on võrdne seotud vektoriga $\overrightarrow{PQ}$. Kõigi selliste seotud vektorite kogum moodustab ekvivalentsiklassi ehk vaba vektori, mille määrab seotud vektor $\overrightarrow{PQ}$. Seega, kui on antud vaba vektor $[\overrightarrow{PQ}]$, siis määrab see igas punktis R üheselt määratud seotud vektori $\overrightarrow{RS}$. Hulgateoreetilises terminoloogias nimetatakse seotud vektori $\overrightarrow{RS}$ ekvivalentsiklassi $[\overrightarrow{PQ}]$ esindajaks punktis R . Kasutame edaspidi geomeetrilist terminoloogiat ning ütleme, et seotud vektor $\overrightarrow{RS}$ saadakse vaba vektori $[\overrightarrow{PQ}]$ **rakendamisel punktist** R .

Edaspidi läheme sageli üle vabalt vektorilt $[\overrightarrow{PQ}]$ seotud vektorile $\overrightarrow{RS}$, rakendades vaba vektori $[\overrightarrow{PQ}]$ punktist R . Põhjus on selles, et seotud vektoritega on lihtsam ja näitlikum töötada. Siiski peame seejuures näitama, et arvutuste lõpptulemus ei sõltu punkti R valikust.

Oluline on märkida, et vaba vektori puhul kaotavad tähenduse sellised mõisted nagu vektori alguspunkt ja lõpp-punkt. Seetõttu tähistame edaspidi vabasid vektoreid ladina tähestiku väikeste tähtedega, st $\vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{x}, \vec{y}$. Kuna vaba vektor on olemuselt hulk (suunatud sirglõikude ekvivalentsiklass), tuleb vabade vektorite võrdsust mõista hulkade kokkulangemisena. Tõepoolest, vaba vektor on kõigi

omavahel võrdsete seotud vektorite hulk. Seega, kui kirjutame $\vec{a} = \vec{b}$, peame silmas, et kaks hulka on võrdsed, st samaaegselt kehtivad tingimused $\vec{a} \subset \vec{b}$ ja $\vec{b} \subset \vec{a}$. Teisisõnu, kui seotud vektor $\vec{PQ}$ saadakse vaba vektori $\vec{a}$ rakendamisel suvalisest punktist P , siis peame näitama, et $\vec{PQ} \in \vec{b}$, ja vastupidi: kui $\vec{RS}$ on vektor $\vec{b}$, mis on rakendatud suvalisest punktist R , siis tuleb näidata, et $\vec{RS} \in \vec{a}$.

Seotud vektorite puhul on olulised sellised mõisted nagu seotud vektori pikkus, seotud vektori suund, seotud vektorite vaheline nurk, vastandvektor, seotud vektorite kollineaarsus ja seotud vektorite komplanaarsus. Kõiki neid mõisteid saab laiendada ka eelnevalt defineeritud vabadele vektoritele. Olgu $\vec{a}$ vaba vektor ja P eukleidilise ruumi suvaline punkt. Rakendades vaba vektori $\vec{a}$ punktist P , saame seotud vektori $\vec{PQ}$. Seega kehtib $\vec{a} = [\vec{PQ}]$. Defineerime **vaba vektori $\vec{a}$ pikkuse** kui reaalarvu, mis on võrdne seotud vektori $\vec{PQ}$ pikkusega. Tähistame vaba vektori $\vec{a}$ pikkust sümboliga $|\vec{a}|$. Seega definitsiooni kohaselt kehtib $|\vec{a}| = |\vec{PQ}|$. On ilmne, et vaba vektori $\vec{a}$ pikkus ei sõltu ekvivalentsiklassi $[\vec{PQ}]$ esindaja valikust. Analoogiliselt nimetame **vaba vektori $\vec{a}$ suunaks** seotud vektori $\vec{PQ}$ suunda.

Vastandvektori mõistet saab samuti laiendada vabadele vektoritele. Olgu $\vec{a} = [\vec{PQ}]$ vaba vektor. Tuletame meelde, et seotud vektori $\vec{PQ}$ vastandvektoriks nimetatakse seotud vektori $\vec{QP}$. Moodustame vaba vektori $[\vec{QP}]$, mida tähistame $-\vec{a}$ ja nimetame vaba vektori $\vec{a}$ **vastandvektoriks**. Seega, kui $\vec{a} = [\vec{PQ}]$, siis $-\vec{a} = [\vec{QP}]$.

Olgu $\vec{a}, \vec{b}$ kaks vaba vektori. Valime suvaliselt kaks eukleidilise ruumi punkti P, S ning rakendame vektori $\vec{a}$ punktist P ja vektori $\vec{b}$ punktist S . Sel viisil saadud seotud vektoreid tähistame $\vec{PQ}, \vec{SR}$. Vabu vektoreid $\vec{a}, \vec{b}$ nimetatakse **kollinearseteks**, kui seotud vektorid $\vec{PQ}, \vec{SR}$ on kollineaarsed. On ilmne, et see definitsioon ei sõltu punktide P, S valikust. Vabade vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ kollineaarsust tähistame sümboliga $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Seega kehtib

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{PQ} \parallel \vec{SR}.$$

On ilmne, et kui vabad vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ on kollineaarsed, siis rakendades neid samast punktist P , saame seotud vektorid $\vec{PQ}, \vec{PR}$, mis asuvad ühel ja samal sirgel. Kui seotud vektorid $\vec{PQ}$ ja $\vec{SR}$ on samasuunalised, nimetame vabu vektoreid $\vec{a}, \vec{b}$ **samasuunalisteks** ning kirjutame $\vec{a} \uparrow \vec{b}$. Analoogiliselt määratletakse **vastas-suunalised** vabad vektorid, mida tähistame $\vec{a} \downarrow \vec{b}$. Kuna nullvektoril $\vec{0}$ puudub suund, loeme selle kollineaarseks iga vaba vektoriga. Soovitame lugejal veenduda, et ülaltoodud definitsioonid ei sõltu punkti P valikust.

Kahe vaba vektori võrdsuse vajalik ja piisav geomeetriline tingimus on sama kujuga nagu kahe seotud vektori võrdsuse tingimus, st kaks vaba vektori $\vec{a}, \vec{b}$ on

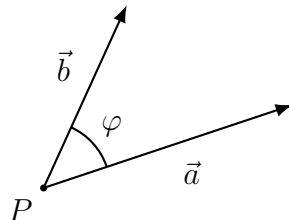
võrdsed parajasti siis, kui neil on võrdsed pikkused ja nad on samasuunalised, st

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|, \vec{a} \uparrow \vec{b}. \quad (1.1)$$

Pöörame tähelepanu sellele, et seotud vektorite korral on võrdsuse tingimus definitsioon, samas kui vabade vektorite korral on võrdsuse tingimus matemaatiline väide, mis tuleb tõestada. Piirdume selle tingimuse vajalikkuse tõestamisega, piisavuse tõestuse jätame lugejale harjutuseks.

Olgu $\vec{a} = \vec{b}$. Näitame, et sellest järelneb $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $\vec{a} \uparrow \vec{b}$. Olgu P suvaline punkt ja $\vec{PQ}$ seotud vektor, mis on ekvivalentsiklassi $\vec{a}$ esindaja. Olgu R teine suvaline punkt ning seotud vektor $\vec{RS}$ on ekvivalentsiklassi $\vec{b}$ esindaja, st $\vec{RS} \in \vec{b}$. Kuna ekvivalentsiklassid $\vec{a}, \vec{b}$ langevad kokku hulkadena, siis eeldusest $\vec{PQ} \in \vec{a}$ järelneb $\vec{PQ} \in \vec{b}$. Seega kuuluvad seotud vektorid $\vec{PQ}$ ja $\vec{RS}$ samasse ekvivalentsiklassi $\vec{b}$, millest järelneb, et need on võrdsed seotud vektorid, st neil on võrdsed pikkused ja nad on samasuunalised. Kuna punktid P, R olid valitud suvaliselt, järelneb sellest, et $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $\vec{a} \uparrow \vec{b}$.

Lõpetame paragrahvi kahe vektori vahelise nurga mõistega. Olgu antud kaks nullvektorist erinevat vektorit $\vec{a}, \vec{b}$. Rakendame mõlemad suvaliselt valitud punktist P . Olgu $\vec{a} = [\vec{PQ}]$, $\vec{b} = [\vec{PR}]$. Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheliseks nurgaks nimetatakse väiksemat kahest nurgast, mille haaradeks on seotud vektorid $\vec{PQ}$ ja $\vec{PR}$. Nurka tähistatakse $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Ütleme, et vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on *ortogonaalsed* ehk üks vektor on teisega risti, kui nendevaheline nurk on võrdne $\pi/2$.



Joonis 2: Kahe vektori vaheline nurk

Seega kasutame edaspidi kahte tüüpi vektoreid, st seotud vektoreid ja vabu vektoreid. Terminoloogia lihtsustamiseks jätame sageli sõnad “seotud” ja “vaba” ära ning kirjutame lihtsalt vektor. See ei tekita segadust, kuna kontekstist on selge, millist tüüpi vektorist on jutt. Kui vektori algus- ja lõpp-punktid on antud, st kirjutatakse $\vec{PQ}$, siis on tegemist seotud vektoriga. Kui neid punkte ei ole antud, siis on tegemist vaba vektoriga. Vaba vektori ei ole võimalik joonisel kujutada, kuna tegemist on lõpmatu hulga omavahel võrdsete seotud vektoritega. Siiski tähistame joonistel suunatud lõike, st seotud vektoreid, vabade vektorite sümbolitega $\vec{a}, \vec{b}, \dots$. Seda tuleb mõista nii, et joonisel on kujutatud seotud vektor, mis on saadud vastava vaba vektori, näiteks $\vec{a}$, rakendamisel punktist P .

Käesoleva paragrahvi lõpetuseks on otstarbekas sõnastada meie poolt üles ehitatud geomeetrilise struktuuri põhilised komponendid hulgateoreetilistes terminites, st hulkade ja kujutuste keeles. Kõigepealt märgime, et meil on kaks hulka $\mathcal{E}$ ja $\mathcal{V}$, kus $\mathcal{E}$ on eukleidilise ruumi punktide hulk ja $\mathcal{V}$ on vabade vektorite hulk. Need kaks hulka on omavahel seotud kahe olulise kujutuse abil. Esiteks Hilberti aksiomaatikale tuginedes saame igale eukleidilise ruumi $\mathcal{E}$ järjestatud punktipaarile (P, Q) vastavusse seada üheselt määratud vaba vektori $\vec{a} = [\overrightarrow{PQ}] \in \mathcal{V}$. Seega saame esimese kujutuse $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$.

Teisest küljest, kui on antud vaba vektor $\vec{a} \in \mathcal{V}$ ja punkt P eukleidilises ruumis $\mathcal{E}$, saame rakendada vaba vektori $\vec{a}$ punktist P ja saada seotud vektori $\overrightarrow{PQ}$. Seega saame veel ühe olulise kujutuse $\mathcal{E} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{E}$, kus $(P, \vec{a}) \mapsto Q$. Sageli kirjutatakse seda kujutust kujul $(P, \vec{a}) \mapsto P + \vec{a} = Q$. Seega tähendab tähis $P + \vec{a}$ seotud vektori lõpp-punkti, mis saadakse vaba vektori $\vec{a}$ rakendamisel punktist P . On ilmne, et

- kui $P + \vec{a} = Q$, siis $\vec{a} = [\overrightarrow{PQ}]$,
- $P + \vec{0} = P$.

Vektorite hulka $\mathcal{V}$ koos kujutustega

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \mathcal{E} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{E}$$

nimetame eukleidilise ruumi $\mathcal{E}$ *afinseks struktuuriks*. See afinne struktuur on aluseks analüütilise geomeetria kaasaegsele aksiomaatilisele ülesehitusele, mille töötas välja Hermann Weyl.

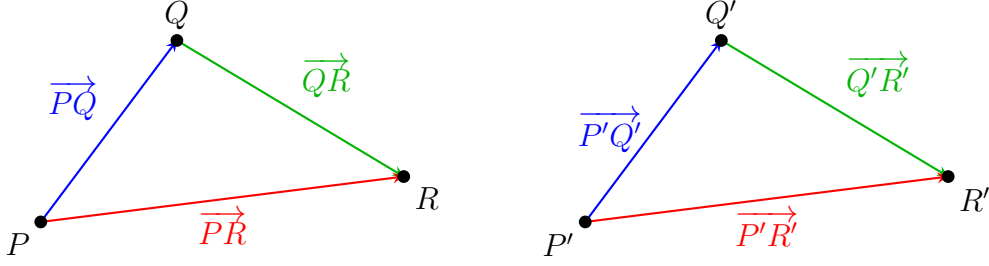
1.2 Vektorite liitmine

Analüütilise geomeetria aluseks on kaasaegse algebra mõistete ja meetodite rakendamine eukleidilise ruumi geomeetriliste objektide uurimiseks. Märgime, et eelmises paragrahvis käsitlesime hulki, st punktide hulka või vektorite hulka. Sõna “hulk” viitab sellele, et puuduvad täiendavad struktuurid, mis võimaldaksid näiteks teostada hulga elementidega algebralisi tehteid.

Käesoleva paragrahvi eesmärk on konstrueerida esimene algebraline tehe vabade vektorite hulgal, mida nimetatakse vektorite liitmiseks. Tuletame meelde, et algebraliseks tehteks hulgal nimetatakse reeglit, mis seab igale selle hulga elementide järjestatud paarile vastavusse üheselt määratud *sama hulga elemendi*.

Olgu $\vec{a}, \vec{b}$ vektorid eukleidilises ruumis $\mathcal{E}$.

Definitsioon 2 (Vabavektorite summa). Rakendame vektori $\vec{a}$ suvaliselt valitud punktist P ja tähistame saadud vektori kui $\overrightarrow{PQ}$. Seejärel rakendame vektori $\vec{b}$ punktist Q ja tähistame saadud vektori kui $\overrightarrow{QR}$. Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ *summaks* nimetatakse vektori $\vec{c} = [\overrightarrow{PR}]$ ja kirjutatakse $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.



$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}, \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{Q'R'} \Rightarrow \triangle PQR \cong \triangle P'Q'R' \Rightarrow \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{P'R'}$$

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{P'R'} = \overrightarrow{P'Q'} + \overrightarrow{Q'R'}$$

Joonis 3: Vektorite liitmine

Vaatleme seda definitsiooni lähemalt. Juhime tähelepanu sellele, et esimese liidetava vektori lõpp-punkt langeb kokku teise liidetava vektori alguspunktiga. Seega moodustavad punktid P, Q, R üldjuhul kolmnurga tipud, mistõttu eeltoodud vektorite liitmise definitsiooni nimetatakse sageli *kolmnurga reegliks*.

Nagu eespool märgitud, defineerime vabade vektorite liitmise seotud vektorite abil ning selleks fikseerime suvalise punkti P . Selleks, et vabade vektorite liitmise definitsioon oleks korrektne, peame näitama, et liitmise tulemus ei sõltu alguspunkti P valikust. Teisisõnu, valides teise alguspunkti P' , jõuame liitmise tulemusena sama vaba vektori $\vec{c}$. See on kujutatud joonisel 3.

Tõepoolest, kolmnurk $\triangle PQR$ on kongruentne kolmnurgaga $\triangle P'Q'R'$, kuna külje PQ pikkus on võrdne külje $P'Q'$ pikkusega, need asuvad paralleelsetel sirgetel ning sama kehtib ka külgede QR ja $Q'R'$ kohta. Sellest järeldeb, et külgede PR ja $P'R'$ pikkused on võrdsed, need asuvad paralleelsetel sirgetel ning suund punktist P punkti R langeb kokku suunaga punktist P' punkti R' , st seotud vektorid $\overrightarrow{PR}$ ja $\overrightarrow{P'R'}$ on võrdsed. See tähendab, et need kaks seotud vektorit kuuluvad samasse ekvivalentsiklassi, st määravad ühe ja sama vaba vektori $\vec{c}$.

Vektorite liitmise definitsioonist näeme, et tegemist on tõepoolest algebralise tehtega vabade vektorite hulgal $\mathcal{V}$, kuna see on reegel, mis seab igale järjestatud vektorite paarile $(\vec{a}, \vec{b}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ vastavusse üheselt määratud vektori $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \in \mathcal{V}$. Meie järgmiseks eesmärgiks on uurida vektorite liitmise algebralisi ja geomeetrilisi omadusi.

Uurime, kuidas vektorite liitmine on seotud eukleidilise ruumi $\mathcal{E}$ afinse struktuuriga. Eelmise paragrahvi lõpus defineerisime kujutuse $(P, \vec{a}) \mapsto P + \vec{a}$, mille aluseks on vaba vektori rakendamine punktist.

Lause 1. Olgu P eukleidilise ruumi punkt ja $\vec{a}, \vec{b}$ vabad vektorid. Kehtib

$$(P + \vec{a}) + \vec{b} = P + (\vec{a} + \vec{b}). \quad (1.2)$$

Tõestus. Vaatleme joonisel 3 vasakpoolset kolmnurka. On ilmne, et kehtivad võrdsused

$$P + \vec{a} = Q, \quad Q + \vec{b} = R, \quad P + \vec{c} = R.$$

Arvestades, et $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, saame nendest võrdsustest valemi (1.2). Edaspidi nime-tame valemit (1.2) *afinse struktuuri kolmnurga omaduseks*. $\square$

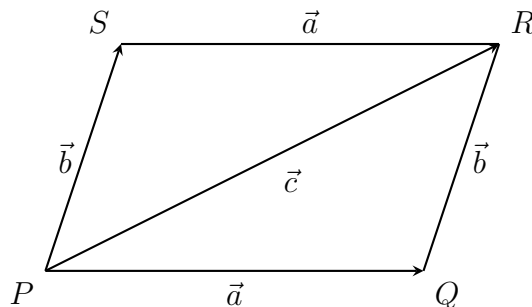
Toome välja vektorite liitmise mõned olulised geomeetrilised omadused.

- Kui vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ ei ole kollineaarsed, siis asub vektor $\vec{a} + \vec{b}$ samas tasandis kus $\vec{a}$ ja $\vec{b}$. Seega on vektorid $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}$ alati kollineaarsed.
- Kui vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed, siis on ka nende summa $\vec{a} + \vec{b}$ kollineaarne vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$.

Näitame, millised algebralised omadused kehtivad vektorite liitmisel.

1. Vektorite liitmine on *kommutatatiivne*, see tähendab, et suvaliste vektorite korral kehtib

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$



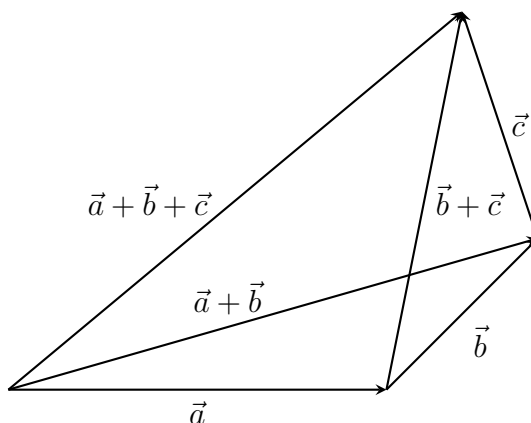
Joonis 4: Rööpküliku reegel vektorite liitmisel

Kommutatatiivsuse tõestus on toodud joonisel 4. Sellel näitab kolmnurk tippudega P, Q, R , kuidas toimub liitmine $\vec{a} + \vec{b}$. Summa $\vec{b} + \vec{a}$ leidmiseks järgime kolmnurga reeglit. Kõigepealt rakendame vektori $\vec{b}$ punktist P , saades vektori $\vec{PS}$, mis on võrdne vektoriga $\vec{QR}$. Seejärel rakendame vektori $\vec{a}$ punktist S . Kuna rakendatav vektor peab olema võrdne vektoriga $\vec{PQ}$, langeb selle lõpp-punkt kokku punktiga R . Seega on summa $\vec{b} + \vec{a}$ võrdne

sama vektoriga $\vec{c} = \overrightarrow{PR}$, mis on summa $\vec{a} + \vec{b}$. On ilmne, et nelinurk $PQRS$ on vektoritele $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ehitatud rööpkülik (eeldusel, et need vektorid on rakendatud ühest ja samast punktist). See illustreerib nn *rööpküliku reeglit*. Selle reegli kasutamisel peavad liidetavad vektorid olema rakendatud samast punktist. Neile ehitatakse rööpkülik ning selle diagonaal PR annabki liitmise tulemuse. Märgime, et kahe vektori liitmisel ei ole sisulist vahet, kumba reeglit kasutada. Kui aga liidetavaid on üle kahe, on kolmnurga reegel märksa lihtsam.

2. Vektorite liitmine on *assotsiatiivne*, st kolme vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ korral kehtib

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$



Joonis 5: Liitmise assotsiatiivsus

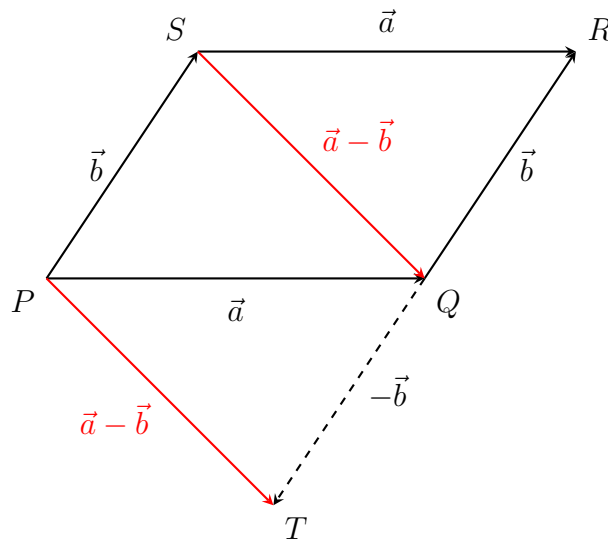
Assotsiatiivsuse tõestuse idee on kujutatud joonisel 5. Kui rakendada järjestikku kolmnurga reeglit summa $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ leidmiseks, saame vektoritest $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ koosneva murdjoone. Selle algus- ja lõpp-punkti ühendav vektor ongi summa $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$. Jooniselt näeme, et ka teise järjestuse korral, st arvutades $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, viib kolmnurga reegel täpselt sama murdjooneni. Mõlemal juhul saame ühe ja sama vektori, mis tõestab assotsiatiivsuse.

3. Suvalise vektori $\vec{a}$ korral kehtib $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (tuleneb nullvektori definitsioonist ja liitmise reeglist).
4. Suvalise vektori $\vec{a}$ korral kehtib $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ (tuleneb vastandvektori definitsioonist ja liitmise reeglist).

Vektorite lahutamine ei ole iseseisev tehe, vaid see defineeritakse liitmise kaudu. Vektori $\vec{b}$ lahutamist vektorist $\vec{a}$ tähistame $\vec{a} - \vec{b}$ ja defineerime valemiga

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}),$$

kus $-\vec{b}$ on vektori $\vec{b}$ vastandvektor.



Joonis 6: Ühe vektori lahutamine teisest.

Joonisel 6 on näidatud graafiliselt, kuidas toimub vektori $\vec{b}$ lahutamine vektorist $\vec{a}$. Joonis näitab, et vahe $\vec{a} - \vec{b}$ leidmiseks tuleb mõlemad vektorid rakendada ühisest punktist P . Seejärel ühendab vektor $\vec{SQ}$ vektori $\vec{b}$ lõpp-punkti S vektori $\vec{a}$ lõpp-punktiga Q , andeski tulemuseks vahe:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{SQ}.$$

1.3 Vektori korrutamine arvuga

Teiseks algebraliseks tehteks vektoritega on vektori korrutamine reaalarvuga. See on tehe, mis seab paarile $(\alpha, \vec{a})$ vastavusse üheselt määratud vektori $\alpha \vec{a}$. Tule-tame meelde, et vektor on (võrdsete vektorite täpsuseni) üheselt määratud, kui on teada tema suund ja pikkus.

Definitsioon 3. Vektori $\vec{a}$ korrutiseks reaalarvuga α nimetatakse vektorit $\alpha \vec{a}$, mis on määratud järgmiste tingimustega:

1. Vektori $\alpha \vec{a}$ pikkus on võrdne vektori $\vec{a}$ pikkuse ja arvu α absoluutväärtuse korrutisega, st

$$|\alpha \vec{a}| = |\alpha| |\vec{a}|.$$

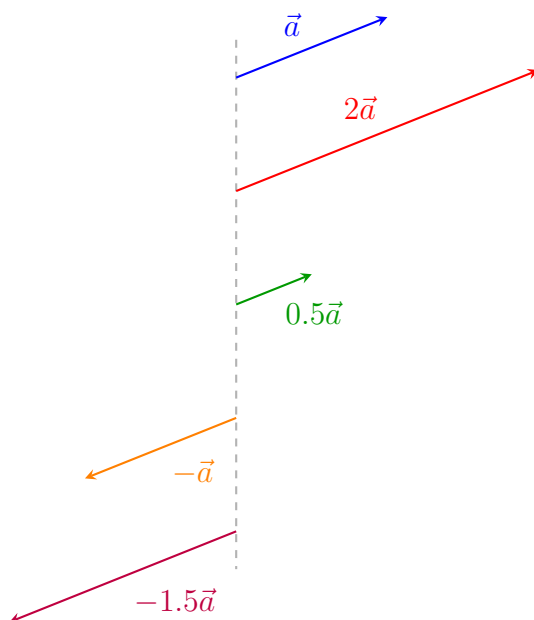
2. Kui $\alpha > 0$, on vektor $\alpha \vec{a}$ samasuunaline vektoriga $\vec{a}$, st

$$\alpha \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}.$$

Kui $\alpha < 0$, on vektor $\alpha \vec{a}$ vastassuunaline, st

$$\alpha \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}.$$

Märgime, et juhul kui $\alpha = 0$, on korrutis definitsiooni esimesest punktist lähtuvalt alati nullvektor $\vec{0}$ ($0 \vec{a} = \vec{0}$).



Joonis 7: Vektori korrutamine reaalarvuga erinevate kordajate korral.

Toome välja vektori korrutamise olulisimad omadused. Kuna need on kergesti tõestatavad, jätame osad tõestused lugejale.

1. Vektori korrutamine arvuga on assotsiatiivne, st $(\alpha\beta) \vec{a} = \alpha(\beta \vec{a})$. Selleks tuleb näidata, et vektorid on võrdse pikkusega ja samasuunalised. Kehtib

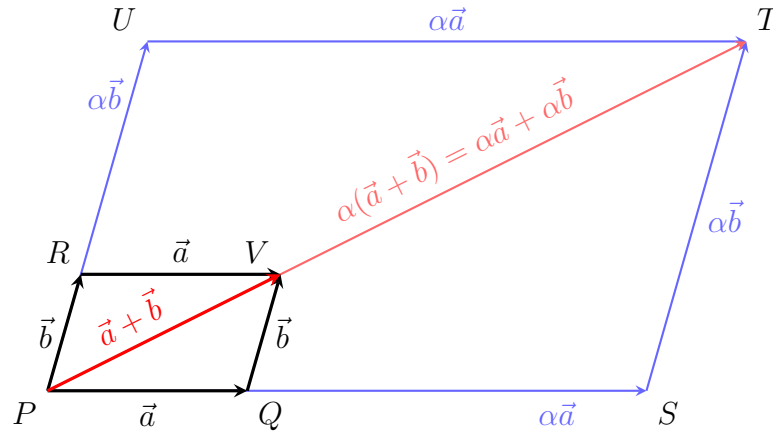
$$|(\alpha\beta) \vec{a}| = |\alpha\beta| |\vec{a}| = |\alpha| |\beta| |\vec{a}|,$$

ja

$$|\alpha(\beta \vec{a})| = |\alpha| |\beta \vec{a}| = |\alpha| |\beta| |\vec{a}|.$$

Seega on pikkused võrdsed. Suuna puhul vaatleme kolme juhtu:

- a) Mõlemad arvud on positiivsed ($\alpha > 0, \beta > 0$). Siis $\alpha\beta > 0$ ja suund ei muutu võrreldes vektoriga $\vec{a}$. Sama juhtub ka järjest korrutades, seega $(\alpha\beta)\vec{a} \uparrow\uparrow \alpha(\beta\vec{a})$, mis tähendab, et vektorid on võrdsed.
- b) Üks arv on positiivne, teine negatiivne (nt $\alpha > 0, \beta < 0$). Siis $\alpha\beta < 0$, mis pöörab suuna. Ka $\beta\vec{a}$ pöörab suuna, ja edasine korrutamine positiivse α -ga seda enam ei muuda. Mõlemad jäävad vastassuunaliseks, mistõttu $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$.
- c) Mõlemad arvud on negatiivsed ($\alpha < 0, \beta < 0$). Siis $\alpha\beta > 0$ ja vektor $(\alpha\beta)\vec{a}$ on samasuunaline. Esmalt negatiivse arvuga korrutades suund pöörduv, järgnev negatiivse arvuga korrutamine pöörab suuna algsesse asendisse tagasi. Järelikult $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$.
2. Vektori korrutamine arvuga on distributiivne vektorite liitmise suhtes: $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.



Joonis 8: Distributiivsus

Tõestame selle omadust juhul, kui $\alpha > 0$ (juhul $\alpha < 0$ on tõestus analoogiline). Jooniselt 8 näeme, et vektorid $\alpha(\vec{a} + \vec{b})$ ja $\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ on samasuunalised. Jääb üle näidata pikkuste võrdsus. Definitsioonist järeldub, et $|\alpha(\vec{a} + \vec{b})| = \alpha|\vec{a} + \vec{b}|$ (kuna $\alpha > 0$). Kuna kolmnurgad PQV ja PST on sarnased (vektoreid on skaleeritud faktoriga α), siis $\frac{|\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}|}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{|\alpha\vec{a}|}{|\vec{a}|} = \alpha$. Seega $|\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}| = \alpha|\vec{a} + \vec{b}|$, mis tõestab pikkuste võrdsuse. Järelikult on vektorid võrdsed.

3. Vektori korrutamine arvuga on distributiivne arvude liitmise suhtes:

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}.$$

Väite tõestuse jätame lugejale.

4. Vektori korrutamine arvuga üks ei muuda vektorit: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$. Väite tõestuse jätame lugejale.

Tuletame meelde, et vektori $\vec{a}$ vastandvektorit tähistatakse sümboliga $-\vec{a}$, kus miinusmärk tähistab suuna pööramist. Kui pöörame suuna kaks korda, saame tagasi algse vektori: $-(-\vec{a}) = \vec{a}$. Vektori korrutamine arvuga võimaldab meil vastandvektorit ka algebraliselt väljendada: $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$. Vektor ja vastandvektor on võrdse pikkusega. Arvuga -1 korrutamine ei muuda pikkust, vaid pöörab suuna, mistõttu $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$ tõepoolest kehtib.

2 Baas, reeper, koordinaadid

Käesolev peatükk on pühendatud **koordinaadisüsteemi** mõistele ruumis, mis on analüütilise geomeetria alusstruktuur. Koordinaadisüsteemi defineerimine võimaldab seada igale ruumipunktile vastavusse ühese reaalarvude paari või kolmiku (või üldisemalt arvjada), mis määrab punkti asukoha. Selline lähenemine loob võimaluse uurida geomeetrilisi objekte — nagu sirgeid, tasandeid ja pindu — algebraliste meetodite abil.

Nii määrab koordinaadisüsteem ruumi punktide kujutuse järjestatud n reaalarvust koosnevate jadade hulka, st hulka $\mathbb{R}^n$, kus piirdume juhtudega $n = 2$ (tasand) ja $n = 3$ (ruum). Koordinaadisüsteem võib katta kogu ruumi, st ta seab ruumi igale punktile P vastavusse reaalarvude jada $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, seega on meil kujutus $P \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n)$, mille määramispiirkonnaks on kogu ruum. Sel juhul räägitakse globaalsest koordinaadisüsteemist. Koordinaadisüsteem võib aga olla määratud mitte kogu ruumis, vaid ainult selle osas. Sel juhul räägitakse lokaalsest koordinaadisüsteemist. Tähistame koordinaadisüsteemi määramispiirkonna sümboliga $\mathfrak{U}$, st see on nende ruumi punktide hulk, mille jaoks on selles koordinaadisüsteemis koordinaadid määratud. Tavaliselt valitakse $\mathfrak{U}$ nii, et see oleks lahtine piirkond, st rajata hulk. Seega võib koordinaadisüsteemi vaadelda kujutusena $P \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n)$, kus punkt P kuulub lahtisse piirkonda $\mathfrak{U}$ ja $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. See kujutus peab olema üksühene ehk, nagu hulgateoorias öeldakse, injektiivne, st piirkonna $\mathfrak{U}$ erinevatele punktidele peavad vastama erinevad jadad hulgast $\mathbb{R}^n$. Selles seisnebki koordinaadisüsteemi mõiste olemus. Teiseks nõudeks on selle kujutuse pidevus. Kujundlikult tähendab see, et ruumi „lähedased“ punktid lähevad selle kujutuse korral üle reaalarvude „lähedasteks“ jadadeks. Neid mõisteid, st punktide „lähedust“ ja pidevust, uuritakse matemaatika harus, mida nimetatakse topoloogiaks, ning käesolevas kursuses me neid ei käsitle.

Olgu ruumis antud koordinaadisüsteem, st üksühene kujutus

$$\mathfrak{U} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad P \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

kus P on ruumi lahtisse piirkonda $\mathfrak{U}$ kuuluv punkt. Olgu $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ punkti $Q \in \mathfrak{U}$ koordinaadid. Valime punkti Q i -nda koordinaadi, st $\tilde{x}_i$. Hoides punkti Q ülejäänud koordinaadid muutumatuna, muudame koordinaadi $\tilde{x}_i$ väärtust piisavalt väikeses vahemikus $\tilde{x}_i - \delta < \tilde{x}_i < \tilde{x}_i + \delta$, kus δ on mingi reaalarv. Tekkinud punktide hulk koos vastavate koordinaatidega moodustab ruumis osa mingist joonest. Seda joont nimetatakse antud koordinaadisüsteemi i -ndaks **koordinaatjooneks**, mis läbib punkti Q . Seega läbib ruumi iga punkti n koordinaatjoont. Analoomiliselt määratletakse antud koordinaadisüsteemi koordinaatpinna mõiste. Selleks valitakse punkti kaks koordinaati, ülejäänud koordinaadid fikseeritakse ning nende kahe väärtusi muudetakse piisavalt väikestes vahemikes. Saadud punktide hulk moodustab ruumis pinna osa, mida nimetatakse koordinaatpinnaks. On ilmne, et

koordinaatpindadest saab rääkida ainult kolmemõõtmelises ruumis (või kõrgema mõõtmega ruumis).

Kui koordinaadisüsteemi koordinaatjooned on sirged, nimetatakse koordinaadisüsteemi sirgjooneliseks. Kui aga koordinaatjooned on kõverad, nimetatakse koordinaadisüsteemi kõverjooneliseks.

Koordinaadisüsteemi saab ruumis määrata mitmel erineval viisil. Kaasaegse geomeetria üheks aluspõhimõtteks on väide, et ruumis ei ole olemas eelistatud koordinaadisüsteemi, millel oleks mõne teise koordinaadisüsteemi ees eeliseid. Kõik koordinaadisüsteemid on võrdväärsed ning ühe või teise koordinaadisüsteemi kasutamine sõltub üksnes lahendatavate geomeetriliste ülesannete iseloomust.

Mõnede geomeetria küsimuste uurimisel osutub otstarbekaks minna ühelt koordinaadisüsteemilt üle teisele. See tähendab, et ruumis on antud kaks koordinaadisüsteemi. Olgu punktil P ühes koordinaadisüsteemis koordinaadid $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ja teises $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. Valemeid, mis väljendavad punkti ühed koordinaadid teiste kaudu, nimetatakse ühest koordinaadisüsteemist teise ülemineku valemiteks. Sellest on põhjalikumalt kirjutatud peatükis 8.

Käsitlust alustame sirgjoonelistest koordinaadisüsteemidest, mille konstrueerimiseks on kõige otstarbekam kasutada vektoralgebrat. Selleks defineerime esmalt baasi ja reeperi (koordinaadistiku) mõisted.

Lisaks sirgjooneliste süsteemidele käsitleme ka olulisemaid kõverjoonelisi koordinaadisüsteeme:

- polaarkoordinaadid tasandil (2.7),
- sfäärilised koordinaadid ruumis (2.8).

2.1 Baas

Eelmises peatükis defineerisime kaks vektoritega tehtavat algebralist tehet: vektorite liitmise ja vektorite korrutamise reaalarvuga. Neid tehteid järjestikku rakendades saame moodustada avaldise kujul:

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k,$$

kus $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ on reaalarvud ja $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ on vektorid. Sellist avaldist nimetatakse vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ *lineaarkombinatsiooniks* ning arve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ selle lineaarkombinatsiooni *kordajateks*.

Kui vektor $\vec{a}$ on esitatav kujul

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k,$$

siis öeldakse, et vektor $\vec{a}$ on *arendatud* vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ järgi ehk vektor $\vec{a}$ on esitatud nende vektorite lineaarkombinatsioonina.

Kui vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ on kollineaarsed, siis ka nende lineaarkombinatsioon on nendega kollineaarne. Samamoodi, kui vektorid on komplanaarsed, siis ka nende mistahes lineaarkombinatsioon on komplanaarne samade vektoritega.

Elmises peatükis käsitletud vektorite liitmise ja arvuga korrutamise omadused (kommutatiivsus, distributiivsus jne) võimaldavad lineaarkombinatsioone teisendada sarnaselt tavalistele algebralistele avaldistele. See tähendab, et vektorvõrrandites võib avada sulge, koondada sarnaseid liikmeid ning viia liikmeid võrrandi ühelt poolelt teisele, muutes nende märki.

Definitsioon 4. *Baasiks sirgel* nimetatakse selle sirge suvalist nullvektorist erinevat vektorit $\vec{e} \neq \vec{0}$.

Definitsioon 5. *Baasiks tasandil* nimetatakse kahte antud tasandil asuvat mitte-kollineaarset vektorit $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, mida vaadeldakse kindlas järjekorras.

Definitsioon 6. *Baasiks ruumis* nimetatakse kolme mittekomplanaarset vektorit $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, mida vaadeldakse samuti kindlas järjekorras.

Baasi moodustavaid vektoreid nimetatakse **baasivektoriteks** ning neid tähistatakse sümboliga $\vec{e}$, millele lisatakse järjekorranumbrit näitav alaindeks.

- *Sirge baas* koosneb ühest nullvektorist erinevast vektorist, mida tähistatakse lihtsalt $\vec{e}$.
- *Tasandi baas* koosneb kahest kindlas järjekorras antud mitte-kollineaarsest vektorist $\vec{e}_1$ ja $\vec{e}_2$, kusjuures peab kehtima tingimus $\vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2$.
- *Ruumi baas* koosneb kolmest mittekomplanaarsest vektorist $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ja $\vec{e}_3$.

Baasi ennast tähistatakse pannes baasivektorid loogelistesse sulgudesse. Näiteks ruumi baas tähistatakse kujul $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

2.2 Vektori koordinaadid

Tõestame järgnevalt teoreemid, mis annavad meile eeskirja etteantud baasivektorite abil vastavalt sirge, tasandi ja ruumi vektorite esitamiseks.

Teoreem 1. *Olgu $\{\vec{e}\}$ baas sirgel ja $\vec{a}$ selle sirgega paralleelne vektor. Siis on vektor $\vec{a}$ üheselt esitatav kujul $\vec{a} = \alpha \vec{e}$, kus α on reaalarv.*

Tõestus. Vastavalt sirge baasi definitsioonile on $\vec{e} \neq \vec{0}$, mistõttu ka pikkus $|\vec{e}| > 0$. Kuna vektor $\vec{a}$ on paralleelne antud sirgega, on ta vektoriga $\vec{e}$ kollineaarne ($\vec{a} \parallel \vec{e}$).

Määrame kordaja α järgmiselt:

$$\alpha = \begin{cases} \frac{|\vec{a}|}{|\vec{e}|}, & \text{kui } \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{e}, \\ -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{e}|}, & \text{kui } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{e}. \end{cases}$$

Näitame, et kehtib vektorvõrdus $\vec{a} = \alpha\vec{e}$. Selleks kontrollime vektorite pikkuste võrdsust ja suundade ühtivust:

1. **Pikkus.** Arvutame vektori $\alpha\vec{e}$ pikkuse:

$$|\alpha\vec{e}| = |\alpha| \cdot |\vec{e}| = \left| \pm \frac{|\vec{a}|}{|\vec{e}|} \right| \cdot |\vec{e}| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{e}|} \cdot |\vec{e}| = |\vec{a}|.$$

Vektorite pikkused on võrdsed.

2. **Suund.** Definitsiooni kohaselt on vektor $\alpha\vec{e}$ kollineaarne vektoriga $\vec{e}$ ning seega ka vektoriga $\vec{a}$. Kordaja α märgi valik tagab, et vektorid $\alpha\vec{e}$ ja $\vec{a}$ on alati samasuunalised:

- kui $\alpha > 0$, siis $\alpha\vec{e} \uparrow\uparrow \vec{e}$ ning kuna $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{e}$, siis $\alpha\vec{e} \uparrow\uparrow \vec{a}$;
- kui $\alpha < 0$, siis $\alpha\vec{e} \uparrow\downarrow \vec{e}$ ning kuna $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{e}$, siis $\alpha\vec{e} \uparrow\uparrow \vec{a}$.

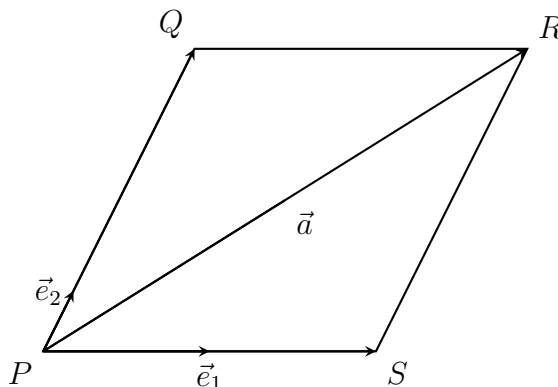
Kuna vektorite pikkused ja suunad ühtivad, siis on vektorid definitsiooni kohaselt võrdsed $\vec{a} = \alpha\vec{e}$.

Jääb veel tõestada, et leitud vektori $\vec{a}$ esitus $\vec{a} = \alpha\vec{e}$ on ühene. Tõestame seda vastuväite abil. Oletame, et leidub veel üks arv $\alpha' \neq \alpha$, mille korral kehtib võrdus $\vec{a} = \alpha'\vec{e}$. Sel juhul võime võrdsusest $\vec{a} = \alpha\vec{e}$ lahutada võrduse $\vec{a} = \alpha'\vec{e}$. Saame

$$(\alpha - \alpha')\vec{e} = \vec{0}.$$

Kuna $\alpha - \alpha' \neq 0$, järeldub sellest, et $\vec{e} = \vec{0}$. See on aga vastuolus sirge baasivektori tingimusega. Seega on esituse $\vec{a} = \alpha\vec{e}$ ühesus tõestatud. $\square$

Teoreem 2. Olgu $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ baas tasandil. Siis on iga selle tasandiga paralleelne vektor $\vec{a}$ üheselt esitatav kujul $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$, kus α_1, α_2 on reaalarvud.



Joonis 9: Tasandi baas

Tõestus. Märgime esmalt, et baasivektorid $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ on definitsiooni kohaselt mitte-kollineaarsed, mistõttu kumbki neist ei saa olla nullvektor ($\vec{e}_1, \vec{e}_2 \neq \vec{0}$). Kuna vektor $\vec{a}$ on tasandiga paralleelne, on vektorid $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ja $\vec{a}$ komplanaarsed.

Rakendame kõik kolm vektorit tasandi suvalisest punktist P ning olgu $\vec{a} = \overrightarrow{PR}$. Seejärel asuvad vektorid ühel ja samal tasandil ning neil on ühine alguspunkt.

Joonestame läbi vektori $\vec{a}$ lõpp-punkti R sirge, mis on paralleelne vektoriga $\vec{e}_2$. Tähistame selle sirge ning punkti P ja vektori $\vec{e}_1$ läbiva sirge lõikepunkti tähega S . Tehtud konstruktsioon vastab vektori $\vec{a}$ **projekteerimisele** vektori $\vec{e}_1$ sihile paralleelselt vektoriga $\vec{e}_2$. Vektorit $\overrightarrow{PS}$ nimetatakse vektori $\vec{a}$ *projektsioonivektoriks* ning tähistatakse $\text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}$.

Vektori $\vec{a}$ *projektsioon* vektori $\vec{e}_1$ sihile on defineeritud järgmiselt:

$$\text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} = \begin{cases} |\text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}|, & \text{kui } \text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{e}_1, \\ -|\text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}|, & \text{kui } \text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{e}_1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Analoogiliselt joonestame läbi punkti R sirge, mis on paralleelne vektoriga $\vec{e}_1$, ning leiame selle lõikepunkti Q sirgega, mis läbib punkti P vektori $\vec{e}_2$ suunas. On ilmne, et vektor $\overrightarrow{PQ}$ on vektori $\vec{a}$ projektsioonivektor vektori $\vec{e}_2$ sihile. Seega $\text{Pr}_{\vec{e}_2} \vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ja

$$\text{pr}_{\vec{e}_2} \vec{a} = \begin{cases} |\text{Pr}_{\vec{e}_2} \vec{a}|, & \text{kui } \text{Pr}_{\vec{e}_2} \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{e}_2, \\ -|\text{Pr}_{\vec{e}_2} \vec{a}|, & \text{kui } \text{Pr}_{\vec{e}_2} \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{e}_2. \end{cases} \quad (2.2)$$

Vektorite liitmise reegli põhjal (vt joonis 9) näeme, et:

$$\vec{a} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PQ} = \text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} + \text{Pr}_{\vec{e}_2} \vec{a}. \quad (2.3)$$

Kuna $\text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} \parallel \vec{e}_1$ ja $\text{Pr}_{\vec{e}_2} \vec{a} \parallel \vec{e}_2$, siis Teoreemi 1 põhjal eksisteerivad üheselt määratud kordajad $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ nii, et:

$$\text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 \quad \text{ja} \quad \text{Pr}_{\vec{e}_2} \vec{a} = \alpha_2 \vec{e}_2,$$

kusjuures kordajad avalduvad suhetena:

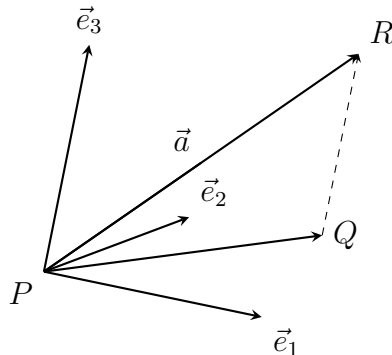
$$\alpha_1 = \frac{\text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}}{|\vec{e}_1|}, \quad \alpha_2 = \frac{\text{pr}_{\vec{e}_2} \vec{a}}{|\vec{e}_2|}. \quad (2.4)$$

Asendades need avaldised võrrandisse (2.3), saamegi vektori $\vec{a}$ arendada tasandi baasivektorite järgi

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2.$$

□

Teoreem 3. Olgu $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ruumi baas. Siis on ruumi iga vektor $\vec{a}$ üheselt esitatav kujul $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$, kus $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ on reaalarvud.



Joonis 10: Ruumi baas

Tõestus. Ruumilise juhu tõestuse geomeetiline konstruktsioon on esitatud joonisel 10. Rakendame baasivektorid $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ning vektori $\vec{a}$ ruumi suvalisest punktist P .

Projekteerime vektori $\vec{a}$ lõpp-punkti R tasandile, mille määravad baasivektorid $\vec{e}_1$ ja $\vec{e}_2$, paralleelselt kolmanda baasivektoriga $\vec{e}_3$. Tähistame saadud projektsioonipunkti tähega Q . Vektorkolmnurga reegli kohaselt kehtib seos

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}. \quad (2.5)$$

Kuna vektorid $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ja $\overrightarrow{PQ}$ paiknevad ühes ja samas tasandis, on nad komplaneaarsed. Märkime, et vektorid $\vec{e}_1$ ja $\vec{e}_2$ ei saa olla kollineaarsed, sest sel juhul oleksid kolm vektorit $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ja $\vec{e}_3$ komplaneaarsed, mis on vastuolus baasi tingimusega. Järelikult määravad vektorid $\vec{e}_1$ ja $\vec{e}_2$ tasandi ning neid võib käsitleda selle tasandi baasivektoritena. Teoreemi 2 põhjal saab tasandi vektori $\overrightarrow{PQ}$ avaldada baasivektorite kaudu.

$$\overrightarrow{PQ} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2.$$

Vektor $\overrightarrow{QR}$ on konstruktsiooni tõttu kollineaarne vektoriga $\vec{e}_3$, mistõttu Teoreemi 1 põhjal $\overrightarrow{QR} = \alpha_3 \vec{e}_3$. Asendades need avaldised võrrandisse (2.5), saame vektori $\vec{a}$ arenduse

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3. \quad (2.6)$$

Sarnaselt tasandi juhuga on kordajad α_i määratud vektori projektsioonidega. Ruumi kontekstis tähendab näiteks $\text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}$ vektori $\vec{a}$ projektsiooni sirgele $\vec{e}_1$ paralleelselt tasandiga, mille moodustavad $\vec{e}_2$ ja $\vec{e}_3$. Kordajad avalduvad järgmiselt:

$$\alpha_1 = \frac{\text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}}{|\vec{e}_1|}, \quad \alpha_2 = \frac{\text{pr}_{\vec{e}_2} \vec{a}}{|\vec{e}_2|}, \quad \alpha_3 = \frac{\text{pr}_{\vec{e}_3} \vec{a}}{|\vec{e}_3|}. \quad (2.7)$$

Näitame, et kordajad α_i on määratud üheselt. Oletame vastuväiteliselt, et vektoril $\vec{a}$ leidub teinegi esitus samal baasil

$$\vec{a} = \alpha'_1 \vec{e}_1 + \alpha'_2 \vec{e}_2 + \alpha'_3 \vec{e}_3.$$

Lahutades sellest võrrandist varem saadud avaldise (2.6), saame

$$(\alpha'_1 - \alpha_1) \vec{e}_1 + (\alpha'_2 - \alpha_2) \vec{e}_2 + (\alpha'_3 - \alpha_3) \vec{e}_3 = \vec{0}. \quad (2.8)$$

Kui vähemalt üks vahedest ei võrdu nulliga, eeldame üldsust kitsendamata näiteks $\alpha'_1 - \alpha_1 \neq 0$, saaksime vektori $\vec{e}_1$ avaldada ülejäänud baasivektorite kaudu

$$\vec{e}_1 = -\frac{\alpha'_2 - \alpha_2}{\alpha'_1 - \alpha_1} \vec{e}_2 - \frac{\alpha'_3 - \alpha_3}{\alpha'_1 - \alpha_1} \vec{e}_3.$$

See tähendaks, et vektor $\vec{e}_1$ on vektorite $\vec{e}_2$ ja $\vec{e}_3$ lineaarkombinatsioon, mis muudaks süsteemi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ komplanaarseks. See on aga vastuolus baasi definitsiooniga, mis nõuab mittekomplanaarsust. Järelikult peavad kõik kordajate vahed võrduma nulliga ehk $\alpha_i = \alpha'_i$ iga $i \in \{1, 2, 3\}$ korral. $\square$

Tõestatud teoreem on analüütilises geomeetrias fundamentaalse tähtsusega. See näitab, et suvalist vektori on võimalik avaldada baasivektorite kaudu ning selle avaldise kordajad on üheselt määratud. Neid baasivektorite lineaarkombinatsiooni kordajaid nimetatakse **vektori koordinaatideks** antud baasil.

Kui $\{\vec{e}\}$ on ühedimensionaalse eukleidilise ruumi (sirge) baas ja $\vec{a}$ on selle ruumi suvaline vektor, siis

$$\vec{a} = x \vec{e},$$

kus reaalarvu x nimetatakse sirge vektori koordinaadiks. Kui $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on kahe mõõtmelise eukleidilise ruumi (tasand) baas ja $\vec{a}$ on selle ruumi suvaline vektor, siis

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2,$$

kus reaalarve x_1, x_2 nimetatakse vektori koordinaatideks ning märgitakse kujul $\vec{a} = (x_1, x_2)$.

Analoogiliselt, kui $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ on kolmemõõtmelise eukleidilise ruumi baas, siis ruumi suvalise vektori $\vec{a}$ korral kehtib esitus

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3,$$

kus kordajad x_1, x_2, x_3 on vektori koordinaadid ruumis. Seda asjaolu tähistatakse $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$.

Analüütilise geomeetria aluseks on koordinaatide meetod. Igale vektorile vastab üheselt määratud järjestatud reaalarvude jada. Koordinaatide arv sõltub ruumi

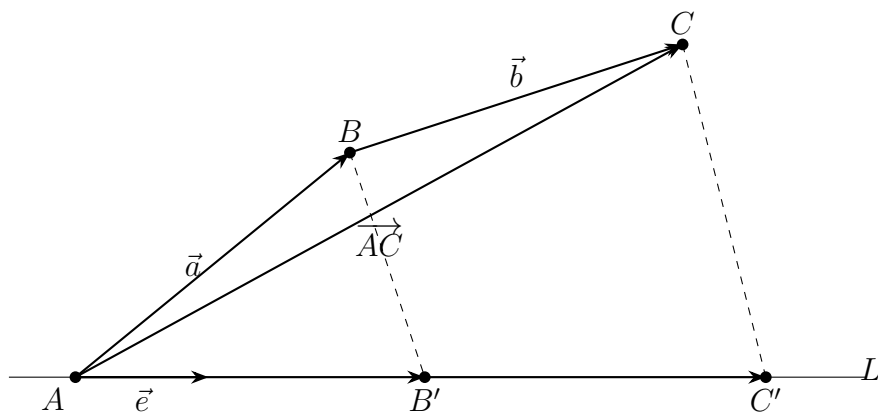
mõõtmest. Vektor on geomeetriline objekt, tema koordinaadid aga arvud. Seega võimaldab analüütilise geomeetria koordinaatide meetod uurida sirgete ja tasandite geomeetrilisi omadusi algebraliste meetoditega, opereerides koordinaatidega, st arvudega.

Eelmises paragrahvis nägime, et vektori koordinaadid määratakse baasi ja vektori projekteerimise abil baasivektorite sihtidele. Olgu eukleidilises ruumis valitud baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$. Siin peame silmas, et n omandab väärtused 2 ja 3, mis vastavad vastavalt tasandile ja kolmemõõtmelisele ruumile. Olgu $\vec{a}$ ruumi suvaline vektor, st $\vec{a} \in \mathcal{V}$. Projekteerimine seab sellele vektorile vastavusse projektsiooni-vektori $\text{Pr}_{\vec{e}_i} \vec{a} \in \mathcal{V}$ ja projektsiooni $\text{pr}_{\vec{e}_i} \vec{a} \in \mathbb{R}$. Hulkade teooria seisukohalt määrab projekteerimine kaks kujutust

$$\text{Pr}_{\vec{e}_i} : \vec{a} \in \mathcal{V} \mapsto \text{Pr}_{\vec{e}_i} \vec{a} \in \mathcal{V}, \quad \text{pr}_{\vec{e}_i} : \vec{a} \in \mathcal{V} \mapsto \text{pr}_{\vec{e}_i} \vec{a} \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Lause 2. (*Projekteerimise lineaarsus*) Kujutused (2.9) omavad lineaarsuse omadust, st suvalise vektori $\vec{e} \neq \vec{0}$, suvaliste vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ ja reaalarvu α korral kehtib

$$\begin{aligned} \text{Pr}_{\vec{e}}(\vec{a} + \vec{b}) &= \text{Pr}_{\vec{e}}\vec{a} + \text{Pr}_{\vec{e}}\vec{b}, & \text{Pr}_{\vec{e}}(\alpha\vec{a}) &= \alpha\text{Pr}_{\vec{e}}\vec{a}, \\ \text{pr}_{\vec{e}}(\vec{a} + \vec{b}) &= \text{pr}_{\vec{e}}\vec{a} + \text{pr}_{\vec{e}}\vec{b}, & \text{pr}_{\vec{e}}(\alpha\vec{a}) &= \alpha\text{pr}_{\vec{e}}\vec{a}. \end{aligned}$$



Joonis 11: Projekteerimise lineaarsus

Tõestus. Tõestame kujutuse $\text{Pr}_{\vec{e}}$ lineaarsuse omaduse vektorite liitmise suhtes. Jooniselt (11) näeme, et kehtib

$$\text{Pr}_{\vec{e}}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{Pr}_{\vec{e}}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} = \text{Pr}_{\vec{e}}\vec{a} + \text{Pr}_{\vec{e}}\vec{b}.$$

Analoogiliselt tõestatakse kujutuse $\text{Pr}_{\vec{e}}$ lineaarsus vektorite korrutamise reaalarvudega suhtes ning kujutuse $\text{pr}_{\vec{e}}$ lineaarsus. $\square$

Kujutuse $\text{pr}_{\vec{e}}$ lineaarsusest järelduvad valemid vektorite summa koordinaatide ning vektorite reaalarvudega korrutiste koordinaatide arvutamiseks.

Lause 3. (*Vektorite summa ja arvuga korrutise koordinaatide arvutamine*) Olgu ruumis antud baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ ($n = 2, 3$) ja kahe vektori $\vec{a}, \vec{b}$ koordinaadid selles baasis

$$\vec{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \vec{b} = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Kehtib

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ \alpha \vec{a} &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Tõestus. Arvutame vektorite $\vec{a} + \vec{b}$ summa koordinaadid. Valemite (2.7) kohaselt on vektori $\vec{a} + \vec{b}$ i -s koordinaat võrdne

$$\frac{\text{pr}_{\vec{e}_i}(\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{e}_i|}.$$

Nüüd kasutame kujutuse $\text{pr}_{\vec{e}_i}$ lineaarsust (Lause 2)

$$\frac{\text{pr}_{\vec{e}_i}(\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{e}_i|} = \frac{\text{pr}_{\vec{e}_i} \vec{a}}{|\vec{e}_i|} + \frac{\text{pr}_{\vec{e}_i} \vec{b}}{|\vec{e}_i|} = x_i + y_i.$$

Analoogiliselt tuletatakse valem vektori koordinaatide arvutamiseks selle korrutamisel reaalarvuga. □

2.3 Ristbaas

Eelmistes punktides käsitlesime eukleidilise ruumi suvalisi baase, esitamata neile mingeid täiendavaid nõudeid. Ainsaks nõudeks oli baasi tingimus, st baasivektorite mittekollineaarsus kahemõõtmelise eukleidilise ruumi (tasandi) korral ning baasivektorite mittekompilanaarsus kolmemõõtmelise eukleidilise ruumi korral. Vektori koordinaadid baasis määratlesime ühe vektori projekteerimise abil teise vektori sihile. Projekteerimine määratleti aga geomeetriliselt ning me ei tuletanud selle arvutamiseks analüütilisi valemeid. Märkime, et projekteerimise omaduste, näiteks selle lineaarsuse, tõestus tugines projekteerimise geomeetrilisele definitsioonile. Analüütilised valemid projekteerimise kirjeldamiseks saame siiski tuletada, kui esitame baasile täiendavad nõuded. Praktiliste arvutuste seisukohalt on kõige otstarbekamad ortonormeeritud baasid ehk ristbaasid.

Definitsioon 7. Kahemõõtmelise eukleidilise ruumi (tasandi) baasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ nimetatakse ortonormeeritud baasiks ehk *ristbaasiks*, kui baasivektorid on ühikvektorid ja omavahel ortogonaalsed, st

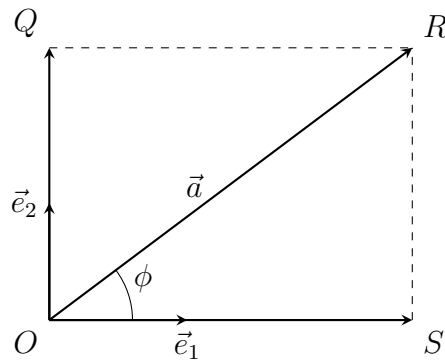
$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1, \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2.$$

Analoogiliselt nimetatakse kolmemõõtmelise eukleidilise ruumi baasi ortonormeeritud baasiks ehk *ristbaasiks*, kui baasivektorid on ühikvektorid ja paarikaupa ortogonaalsed, st

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1, \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \quad \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3, \quad \vec{e}_3 \perp \vec{e}_1.$$

Vektori koordinaate ristbaasis nimetatakse ristkoordinaatideks.

Märgime, et kahe vektori ortonormeeritus tasandil tähendab automaatselt baasi tingimuse täidetust, st kui kaks vektorit on ühikvektorid ja omavahel risti, siis ei saa nad olla kollineaarsed. Analoogiline väide kehtib ka kolmemõõtmelise ruumi korral.



Joonis 12: Tasandi ortonormeeritud baas

Jooniselt 12 on näha, et tasandi ristbaasi korral seisneb vektori $\vec{a}$ projekteerimine baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ sihtidele selles, et punktist R langetatakse ristsirged baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ määratud sirgetele, mis läbivad punkti O . Sellist projekteerimist nimetatakse *ristprojekteerimiseks*. Käesolevas paragrahvis peame projekteerimise all silmas ristprojekteerimist. Seega kehtib

$$\text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} = \overrightarrow{OS}, \quad \text{Pr}_{\vec{e}_2} \vec{a} = \overrightarrow{OQ}$$

Kuna ortonormeeritud baasi baasivektorid on ühikvektorid, siis on vektori $\vec{a}$ ristkoordinaadid võrdsed selle vektori projektsioonidega baasivektorite sihtidele, st

$$x_1 = \text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}, \quad x_2 = \text{pr}_{\vec{e}_2} \vec{a}.$$

Tasandi ortonormeeritud baasi korral saame tuletada vektori ristkoordinaatide analüütilised valemid, avaldades need eukleidilise geomeetria fundamentaalsete suuruste, st vektori pikkuse ja nurkade trigonomeetriliste funktsioonide kaudu. Tasandi vektori $\vec{a}$ *sihikoosinusteks* nimetatakse suurusi $\cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_1)$ ja $\cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_2)$.

Teoreem 4. (Tasandi vektori ristkoordinaadid) Olgu x_1, x_2 vektori $\vec{a}$ koordinaadid tasandi ortonormeeritud baasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Siis

$$x_1 = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_1), \quad x_2 = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_2),$$

ehk

$$\vec{a} = |\vec{a}| (\cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_1) \vec{e}_1 + \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_2) \vec{e}_2) \quad (2.11)$$

Tõestus. Tõestame väite kahe juhtumi jaoks: kui punkt R asub kas esimeses veerandis (joonis 12) või teises veerandis (joonis 13). Ülejäänud kaks juhtu, st kolmas ja neljas veerand, tõestatakse analoogiliselt.

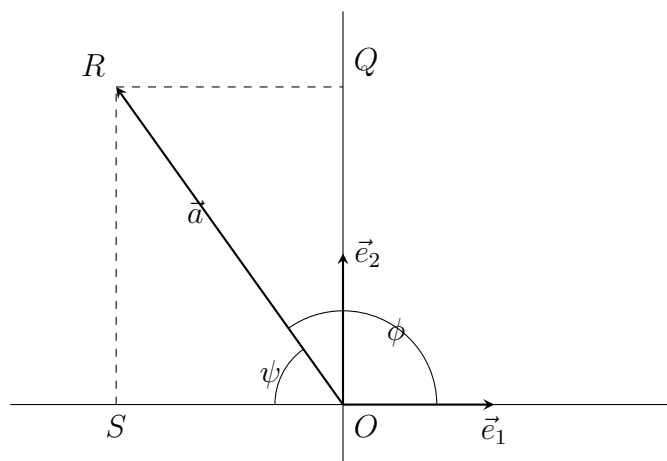
Oletame, et punkt R asub esimeses veerandis. Jooniselt 12 on näha, et kolmnurgad $\triangle OQR$ ja $\triangle OSR$ on täisnurksed ja $\vec{OS} \uparrow \vec{e}_1, \vec{OQ} \uparrow \vec{e}_2$. Sel juhul on vektori $\vec{a}$ projektsioon baasivektori $\vec{e}_1$ sihile võrdne vektori $\vec{OS}$ pikkusega. Kuna kolmnurk $\triangle OSR$ on täisnurkne, saame kergesti

$$x_1 = \text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} = |\vec{OS}| = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_1).$$

Analoogiliselt

$$x_2 = \text{pr}_{\vec{e}_2} \vec{a} = |\vec{OQ}| = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_2).$$

Märgime, et sel juhul on mõlemad nurgad $\angle(\vec{a}, \vec{e}_1)$ ja $\angle(\vec{a}, \vec{e}_2)$ teravnurgad ning nende koosinused on positiivsed.



Joonis 13: Tasandi ortonormeeritud baas

Oletame nüüd, et punkt R asub teises veerandis, nagu on kujutatud joonisel 13. Sel juhul $\text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} = \vec{OS} \uparrow \downarrow \vec{e}_1$ ning vektori $\vec{a}$ projektsioon vektori $\vec{e}_1$ sihile on vektori $\vec{OS}$ pikkus negatiivse märgiga. Täisnurkse kolmnurga $\triangle ORS$ põhjal saame

$$x_1 = \text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} = -|\vec{OS}| = -|\vec{a}| \cos \psi = -|\vec{a}| \cos(\pi - \phi) = |\vec{a}| \cos \phi = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_1).$$

Eelmise valemi tuletamisel kasutasime trigonomeetrias tuntud valemit

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

ning seoseid $\cos \pi = -1$ ja $\sin \pi = 0$. Nagu eelmiselgi juhul, kui punkt R asus esimeses veerandis, on vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{e}_2$ vaheline nurk teravnurk. Seetõttu

$$x_2 = |\vec{OQ}| = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_2).$$

Ülejäänud kaks juhtu, st kui punkt R asub kolmandas veerandis (mõlemad nurgad $\angle(\vec{a}, \vec{e}_1)$ ja $\angle(\vec{a}, \vec{e}_2)$ on nürinurgad) ning kui punkt R asub neljandas veerandis (nurk $\angle(\vec{a}, \vec{e}_1)$ on teravnurk, nurk $\angle(\vec{a}, \vec{e}_2)$ on nürinurk), jätame lugejale iseseisvaks lahendamiseks. $\square$

Tõestatud teoreem on eukleidilise tasandigeomeetria jaoks väga oluline. Seetõttu teeme mõned olulised märkused, mis puudutavad tõestatud teoreemi.

Esiteks järeldub tõestatud teoreemist, et kui on antud kaks tasandi vektorit $\vec{a}, \vec{b}$, kusjuures $\vec{a} \neq \vec{0}$, siis saab vektori $\vec{b}$ ortogonaalprojektsiooni vektori $\vec{a}$ sihile esitada kujul

$$\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}). \quad (2.12)$$

Teine märkus puudutab vektori $\vec{a}$ pikkust. Jooniselt 12 näeme, et kehtib võrdus

$$x_1^2 + x_2^2 = (\text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a})^2 + (\text{pr}_{\vec{e}_2} \vec{a})^2 = |\vec{OS}|^2 + |\vec{OQ}|^2.$$

Kuna $|\vec{OQ}| = |\vec{SR}|$ ja kolmnurk $\triangle OSR$ on täisnurkne, siis Pythagorase teoreemi järgi on kaatetite ruutude summa võrdne hüpotenuusi ruuduga, so

$$|\vec{OS}|^2 + |\vec{OQ}|^2 = |\vec{OR}|^2 = |\vec{a}|^2.$$

Järelikult avaldub vektori pikkus ristkoordinaatides valemiga

$$|\vec{a}| = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (2.13)$$

kus plussmärk juure ees rõhutab, et võtame positiivse väärtuse, kuna tegemist on vektori pikkusega. Tuletasime selle valemi täisnurkse kolmnurga abil selleks, et

lugeja mõistaks selle valemi geomeetrilist tähendust. See seisneb selles, et koordinaatides pikkuste arvutamise aluseks on eukleidilise geomeetria fundamentaalne teoreem, so Pythagorase teoreem.

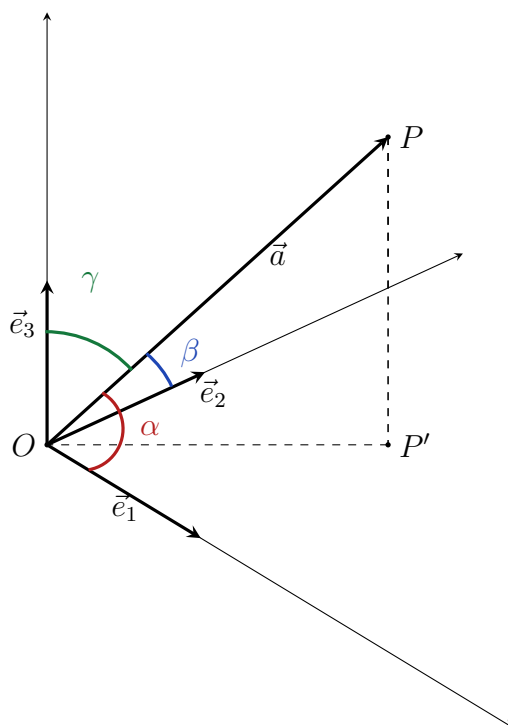
Kui $\vec{a}$ on ühikvektor, siis valemist 2.11 järeldeb, et

$$\vec{a} = \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_1) \vec{e}_1 + \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_2) \vec{e}_2.$$

Teiselt poolt järeldeb pikkuse valemist (2.13), et sel juhul on koordinaatide ruutude summa võrdne arvuga 1, so

$$\cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{e}_1) + \cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{e}_2) = \sum_{i=1}^2 \cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{e}_i) = 1. \quad (2.14)$$

See valem näitab, et tasandi vektori sihikoosinuste vahel kehtib seos, millest järeldeb, et need ei ole sõltumatud suurused.



Joonis 14: Ruumi ortonormeeritud baas

Vaatleme nüüd kolmemõõtmelise ruumi juhtu. Eeldame, et kolmemõõtmelises vektorruumis $\mathcal{V}^3$ on antud ortonormeeritud baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Olgu antud vektor $\vec{a}$. Analoogiliselt tasandi juhuga vaatleme nurki, mida vektor $\vec{a}$ moodustab baasivektoritega. Joonisel 14 on need nurgad tähistatud sümbolitega α, β, γ , st

$$\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{e}_1), \quad \beta = \angle(\vec{a}, \vec{e}_2), \quad \gamma = \angle(\vec{a}, \vec{e}_3).$$

Nende nurkade koosinuseid nimetatakse vektori $\vec{a}$ sihikoosinusteks. Samuti nagu tasandi puhul on vektori $\vec{a}$ ristprojektsioonid baasivektorite sihtidele võrdsed vektori koordinaatidega x_1, x_2, x_3 ortonormeeritud baasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, st

$$x_1 = \text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}, \quad x_2 = \text{pr}_{\vec{e}_2} \vec{a}, \quad x_3 = \text{pr}_{\vec{e}_3} \vec{a}.$$

Teoreem 5. (*Ruumivektori ristkoordinaadid*) Olgu x_1, x_2, x_3 vektori $\vec{a}$ koordinaadid ortonormeeritud baasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Siis

$$x_1 = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_1), \quad x_2 = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_2), \quad x_3 = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_3),$$

ehk

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_1) \vec{e}_1 + |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_2) \vec{e}_2 + |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_3) \vec{e}_3. \quad (2.15)$$

Selle teoreemi tõestus on analoogiline teoreemi 4 tõestusega, st kui paigutada kõik neli vektorit $\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ suvalisse ruumi punkti O , siis langetame punktist P ristsirged sirgetele, mis läbivad punkti O baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sihtides, ning avaldame saadud täisnurksete kolmnurkade kaatetid hüpotenuusi ja vastava nurga koosinuse kaudu.

Ilmselt kehtib valem (2.12) ühe vektori $\vec{b}$ ristprojektsiooni kohta teise vektori $\vec{a} \neq \vec{0}$ sihile ka ruumivektorite puhul. Ruumivektori pikkuse valem ristkoordinaatides on analoogiline valemiga (2.13) ja selle kuju on

$$|\vec{a}| = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Analoogiliselt tasandi puhul esitatud arutlusele on lihtne näidata, et ruumivektori sihikoosinused ei ole sõltumatud ning nende vahel kehtib seos

$$\cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{e}_1) + \cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{e}_2) + \cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{e}_3) = 1.$$

Märgime ära tähtsa asjaolu, et valemid (2.11), (2.15) on sama struktuuriga, erineades ainult liidetavate arvu poolest, mis sõltub ruumi dimensioonist. Seetõttu on otstarbekas käsitleda neid kahte valemit üldisema valemi erijuhtudena

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_i) \vec{e}_i,$$

kus $n = 2, 3$. Analoogiliselt võib vektori pikkuse ja sihikoosinuste vahelise seose kirjutada kujul

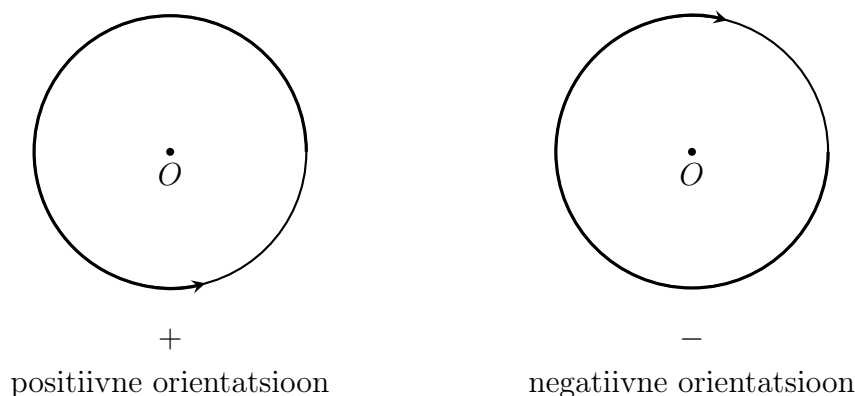
$$|\vec{a}| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}, \quad \sum_{i=1}^n \cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{e}_i) = 1.$$

2.4 Tasandi orientatsioon

Eelmises paragrahvis nägime, et tasandi vektori sihikoosinused ei ole sõltumatud. Rõhutame, et sihikoosinustest ja ristkoordinaatidest rääkides eeldame ka käesolevas paragrahvis — nagu eelmiseski — et baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on ortonormeeritud. Ilmselt peitub selle põhjus selles, et nurgad, mille vektor moodustab baasivektoritega, ei ole sõltumatud, vaid nende vahel kehtib teatav seos. Juhul, kui vektori lõpp-punkt asub esimeses veerandis, on sellel seosel kuju

$$\angle(\vec{a}, \vec{e}_1) + \angle(\vec{a}, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{2}.$$

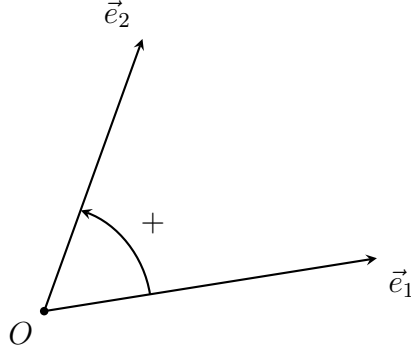
Teistes veerandites on see seos küll teistsugune, kuid igal juhul saab ühe nurga avaldada teise kaudu. Geomeetrias püütakse võimaluse korral kasutada sõltumatuid parameetreid. See muudab käsitlemise selgemaks ja arusaadavamaks. Käesoleval juhul saavutatakse see üleminekuga vektoritevaheliselt nurgalt tasandi orienteeritud nurgale.



Joonis 15: Tasandi orientatsioon

Vaatleme tasandil suvalise raadiusega ringjoont, mille keskpunkt on tasandi suvalises punktis (vt joonis 15). Valime ringjoonel suvalise punkti, hakkame sellest punktist mööda ringjoont liikuma ning teeme ringjoonele täisringi peale, jõudes tagasi lähtepunkti. Ilmselt on ringjoone selliseks läbimiseks kaks võimalust: liikuda kas vastupäeva või päripäeva. Ühe neist ringjoone läbimise suundadest valimist nimetatakse tasandi orientatsiooniks. Määratluse ühesuse huvides nimetame vastupäeva liikumisele vastavat tasandi orientatsiooni positiivseks ning päripäeva liikumisele vastavat orientatsiooni negatiivseks. Käesolevas paragrahvis eeldame, et tasandil on valitud positiivne orientatsioon.

Definitsioon 8. Olgu tasandil antud suvaline baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Öeldakse, et baas on tasandi *orientatsiooniga kooskõlas*, kui vektori $\vec{e}_1$ pööramine vektori $\vec{e}_2$ **lühimat teed** mööda toimub vastupäeva. Siin eeldame, et mõlemad baasivektorid on paigutatud tasandi samasse punkti.



Joonis 16: Tasandi orientatsiooniga kooskõlas olev baas

Käesolevas punktis on kõik vaadeldavad baasid ortonormeeritud ja tasandi orientatsiooniga kooskõlas. Olgu antud tasandi vektor $\vec{a}$. Rakendame selle ja baasivektorid alguspunktile O , nagu on näidatud joonisel 12.

Definitsioon 9. Siis nimetatakse esimese baasivektori $\vec{e}_1$ ja vektori $\vec{a}$ vaheliseks **orienteeritud nurgaks** nurka, mis saadakse vektori $\vec{e}_1$ pööramisel tasandi positiivses suunas (vastupäeva) kuni selle kokkulangemiseni vektoriga $\vec{a}$.

Tähistame vektorite $\vec{e}_1$ ja $\vec{a}$ vahelist orienteeritud nurka sümboliga θ . Orienteeritud nurga definitsioonist järeldub, et see on määratud täpsusega 2π . Määratluse ühesuse huvides eeldame, et $\theta \in [0, 2\pi)$. Siis saame nurgad $\angle(\vec{a}, \vec{e}_1)$ ja $\angle(\vec{a}, \vec{e}_2)$ avaldada orienteeritud nurga θ kaudu järgmiselt:

$$\begin{aligned} \angle(\vec{a}, \vec{e}_1) &= \theta, \quad \angle(\vec{a}, \vec{e}_2) = \frac{\pi}{2} - \theta \text{ (esimene veerand),} \\ \angle(\vec{a}, \vec{e}_1) &= \theta, \quad \angle(\vec{a}, \vec{e}_2) = \theta - \frac{\pi}{2} \text{ (teine veerand),} \\ \angle(\vec{a}, \vec{e}_1) &= 2\pi - \theta, \quad \angle(\vec{a}, \vec{e}_2) = \theta - \frac{\pi}{2} \text{ (kolmas veerand),} \\ \angle(\vec{a}, \vec{e}_1) &= 2\pi - \theta, \quad \angle(\vec{a}, \vec{e}_2) = \frac{5\pi}{2} - \theta \text{ (neljas veerand).} \end{aligned}$$

Jätame lugejale iseseisvaks harjutuseks veenduda, et nendest seostest järeldub

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_1) = \cos \theta, \quad \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_2) = \sin \theta.$$

Nüüd saame valemi (2.11) kirjutada orienteeritud nurga abil järgmiselt:

$$\vec{a} = |\vec{a}| (\cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2). \quad (2.16)$$

2.5 Vektorite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Käesolevas paragrahvis käsitleme vektorite lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse mõistet. See mõiste mängib olulist rolli lineaaralgebras, vektorruumide teoorias ja lineaarvõrrandisüsteemide teoorias. Selgitame välja vektorite lineaarse sõltuvuse mõiste geomeetrilise tähenduse eukleidilise tasandi ja kolmemõõtmelise ruumi korral.

Olgu $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$, kus $k \geq 1$, vektorruumi $\mathcal{V}^n$ vektorite hulk, kus $n = 2$ (tasand) või $n = 3$ (kolmemõõtmeline ruum).

Definitsioon 10. Vektoreid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ nimetatakse **lineaarselt sõltuvateks**, kui leiduvad reaalarvud $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, mis ei ole kõik korraga võrdsed nulliga, nii et vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ lineaarkombinatsioon kordajatega $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ on võrdne nullvektoriga, st

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0}, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_k^2 > 0.$$

Vektoreid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ nimetatakse **lineaarselt sõltumatuteks**, kui võrrandist

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0},$$

(kus kordajaid $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ käsitletakse tundmatutena) järeldub, et

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Vektorite lineaarse sõltuvuse (sõltumatuse) mõiste on algebraline mõiste, kuna selle aluseks on vektoritega tehtavad algebralised tehted, st vektorite liitmine ja nende korrutamine reaalarvudega. Näitame, et vektorite lineaarse sõltuvuse mõiste on samaväärne vektorite kollineaarsuse geomeetrilise mõistega ning vektorite komplanaarsuse mõistega.

Teoreem 6. *Kaks vektorit on lineaarselt sõltuvad parajasti siis, kui nad on kollineaarsed.*

Tõestus. Tähistame vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2$. Kui mõlemad vektorid on nullvektorid, st $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{0}$, siis on nad lineaarselt sõltuvad. Tõepoolest, korrutades nullvektoreid suvaliste nullist erinevate arvudega ja liites saadud korrutised, saame nullvektori ning definitsiooni 10 kohaselt on vektorid lineaarselt sõltuvad. Teiselt poolt on nullvektor kollineaarne iga teise vektoriga. Järelikult on kaks nullvektorit kollineaarsed. Seega on lineaarse sõltuvuse ja kollineaarsuse mõistete samaväärsus juhul, kui mõlemad vektorid on nullvektorid, tõestatud.

Oletame nüüd, et vähemalt üks vektoritest, näiteks $\vec{a}_1$, ei ole nullvektor. Näitame, et vektorite lineaarsest sõltuvusest järeldub nende kollineaarsus. Kuna vektorid on lineaarselt sõltuvad, siis

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = \vec{0}, \tag{2.17}$$

kus arvud α_1, α_2 ei ole korraga võrdsed nulliga, st vähemalt üks neist erineb nullist. Näitame, et α_2 ei saa olla null. Oletame vastuväiteliselt, et $\alpha_2 = 0$. Siis järeldub valemist (2.17), et $\alpha_1 \vec{a}_1 = \vec{0}$. Eelduse kohaselt $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$, järelikult $\alpha_1 = 0$. See on vastuolus eeldusega, et arvud α_1, α_2 ei ole korraga võrdsed nulliga. Seega $\alpha_2 \neq 0$. Võrrandist (2.17) saame nüüd avaldada vektori $\vec{a}_2$ vektori $\vec{a}_1$ kaudu järgmiselt:

$$\vec{a}_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \vec{a}_1.$$

Seega on vektor $\vec{a}_2$ vektori $\vec{a}_1$ reaalarvuga korrutis. Vektori arvuga korrutamise definitsioonist (vt paragrahvi 1.3) järeldub, et vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ on kollineaarsed.

Näitame nüüd, et vektorite kollineaarsusest järeldub nende lineaarne sõltuvus. Olgu vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ kollineaarsed. Kui nad mõlemad on nullvektorid, siis, nagu tõestuse esimeses osas näidati, on nad lineaarselt sõltuvad. Seega võime üldisust kitsendamata eeldada, et üks neist, näiteks $\vec{a}_1$, ei ole nullvektor. Vektorite kollineaarsusest järeldub

$$\vec{a}_2 = \begin{cases} \frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|} \vec{a}_1, & \vec{a}_1 \uparrow\uparrow \vec{a}_2, \\ -\frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|} \vec{a}_1, & \vec{a}_1 \uparrow\downarrow \vec{a}_2. \end{cases} \quad (2.18)$$

Siit järeldub, et

$$\alpha \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{0},$$

kus

$$\alpha = \pm \frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|},$$

ning märk valitakse sõltuvalt vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ sihtidest. Seega oleme saanud vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ lineaarse kombinatsiooni, milles kõik kordajad ei ole võrdsed nulliga (vektori $\vec{a}_2$ kordaja on võrdne ühega). Järelikult on vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ lineaarselt sõltuvad. Teoreem on tõestatud. $\square$

Märkus 1. Tõestatud teoreemi kehtivus ei sõltu ruumi mõõtmest. Teiste sõnadega kehtib see teoreem nii ühemõõtmelises eukleidilises ruumis (sirkel), kahemõõtmelises eukleidilises ruumis (tasandil) kui ka kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis. Sirge korral on tõestatud teoreemi väide triviaalne, sest sirge mis tahes kaks vektorit on kollineaarsed (ja lineaarselt sõltuvad).

Teoreem 6 annab kahe vektori kollineaarsuse tarviliku ja piisava tingimuse: kaks vektorit on kollineaarsed parajasti siis, kui leidub nende vektorite mittetriviaalne lineaarne kombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga. Sellisel kujul sõnastatud tingimuse eeliseks on asjaolu, et selles ei kasutata mingit koordinaadisüsteemi, st ruumi baasi. Kasutatakse ainult geomeetriliselt invariantseid (baasi valikust sõltumatuid) mõisteid: vektori mõistet ja algebralisi tehteid vektoritega. Märgime, et

see on üks tänapäeva geomeetria põhiprintsiipe: kasutada meetodeid ja struktuure, mis ei sõltu koordinaadisüsteemi valikust.

Praktilistes arvutustes on aga mugavam töötada vektorite koordinaatidega. Seetõttu tekib loomulik küsimus, milline on eespool toodud tingimuse analoog juhul, kui baas on valitud ja vektorite koordinaadid selles baasis on teada.

Vastame sellele küsimusele tasandi korral. Olgu antud tasandi mingi baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ (me ei eelda, et see on ortonormeeritud) ja kaks tasandi vektorit $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, kus

$$\vec{a}_1 = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2, \quad \vec{a}_2 = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2, \quad (2.19)$$

st x_1, x_2 on vektori $\vec{a}_1$ koordinaadid ning y_1, y_2 on vektori $\vec{a}_2$ koordinaadid.

Lause 4. *Tasandi vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ ei ole kollineaarsed parajasti siis, kui nende vektorite koordinaatidest moodustatud matriksi determinant ei ole võrdne nulliga, st*

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0.$$

Tõestus. Vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ ei ole kollineaarsed (on lineaarselt sõltumatud) parajasti siis, kui vektorvõrrandist

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = \vec{0}, \quad (2.20)$$

järeldub, et

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Asendame vektorvõrrandi (2.20) vasakusse poolde avaldised (2.19) ja kirjutame saadud vektorvõrrandi kujul

$$(x_1 \alpha_1 + y_1 \alpha_2) \vec{e}_1 + (x_2 \alpha_1 + y_2 \alpha_2) \vec{e}_2 = \vec{0}.$$

Kuna baasivektorid on lineaarselt sõltumatud (mittekollineaarsed), siis järeldub siit, et

$$\begin{cases} x_1 \alpha_1 + y_1 \alpha_2 = 0, \\ x_2 \alpha_1 + y_2 \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Saadud seoseid käsitleme kahe võrrandiga lineaarvõrrandisüsteemina, mille tundmatuteks on α_1, α_2 , eeldades, et vektorite $\vec{a}_1 = (x_1, x_2), \vec{a}_2 = (y_1, y_2)$ koordinaadid on antud. Saadud võrrandisüsteem on homogeenne lineaarvõrrandisüsteem (võrrandite paremad pooled on võrdsed nulliga). Sellisel võrrandisüsteemil on alati triviaalne lahend $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ning lineaarvõrrandisüsteemide teoorias tõestatakse, et see lahend on ainus parajasti siis, kui süsteemi peadeterminant ei ole võrdne nulliga, st

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0.$$

Seega on lause tõestatud. □

Järeldus 1. *Kaks tasandi vektorit on kollineaarsed parajasti siis, kui nende vektorite mingis baasis antud koordinaatidest moodustatud matriksi determinant on võrdne nulliga.*

Vaatleme nüüd kolme vektori komplanaarsuse ja nende lineaarse sõltuvuse vahelist seost. Kuna komplanaarsuse mõistel on tähendus ainult kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis, siis eeldame edaspidi, et vaadeldavad vektorid on ruumivektorid. Enne kui sõnastame kolmemõõtmelise ruumi vektorite lineaarset sõltuvust käsitleva teoreemi, märgime mõned vektorite lineaarse sõltuvuse elementaarsed omadused, mida kasutame tõestuses. Nende omaduste tõestused on lihtsad ning jätame need lugejale iseseisvateks harjutusteks.

LS1. Kui vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ hulk sisaldab nullvektorit, siis on need vektorid lineaarselt sõltuvad.

LS2. Kui vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ hulk sisaldab lineaarselt sõltuvate vektorite alamhulka, siis on ka kogu vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ hulk lineaarselt sõltuv.

Teoreem 7. *Kolm kolmemõõtmelise eukleidilise ruumi vektorit on lineaarselt sõltuvad parajasti siis, kui nad on komplanaarsed.*

Tõestus. Näitame, et kolme vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ lineaarsest sõltuvusest järeldub nende komplanaarsus. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et kõik kolm vektorit $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ei ole nullvektorid. Tõepoolest, kui vähemalt üks neist on nullvektor, siis on vektorid komplanaarsed. Samuti võime kõrvale jätta juhu, kui mõni kaks neist on kollineaarsed, sest ka sel juhul on kõik kolm vektorit komplanaarsed.

Vektorite lineaarne sõltuvus tähendab, et leiduvad kolm arvu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, mis ei ole kõik korraga võrdsed nulliga, nii et kehtib võrdus

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = \vec{0}.$$

Olgu $\alpha_3 \neq 0$. Siis saame vektori $\vec{a}_3$ avaldada vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ kaudu järgmiselt:

$$\vec{a}_3 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \vec{a}_2.$$

Saadud võrdusest järeldub, et vektor $\vec{a}_3$ on vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ lineaarne kombinatsioon. See tähendab, et kõik kolm vektorit on komplanaarsed. Tõepoolest, vektorite summa on vektor, mis paikneb nende vektorite poolt moodustatud rööpküliku diagonaalil (vt paragrahvi 1.2). Kuid vektorite poolt moodustatud rööpkülik, sealhulgas selle diagonaal, paikneb samas tasandis, kus asuvad vektorid ise. Seega on teoreemi esimene osa tõestatud.

Oletame nüüd, et vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ on komplanaarsed, ja tõestame, et sellest eeldusest järeldub vektorite lineaarne sõltuvus. Võime välja jätta juhu, kui üks

vektoritest on nullvektor, sest sel juhul on meie väide kergesti tõestatav. Tõepoolest, kui üks vektoritest on nullvektor, siis on kõik kolm vektorit kollineaarsed. Samal ajal on nad ka lineaarselt sõltuvad (omadus LS1).

Samuti võime välja jätta juhu, kui kaks vektorit kolmest on kollineaarsed. Tõepoolest, sel juhul on kõik kolm vektorit kollineaarsed. Kuid nad on ka lineaarselt sõltuvad, mis järeldub teoreemist 6 ja omadusest LS2.

Seega võime üldisust kitsendamata eeldada, et vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ on kollineaarsed, kuid ükski kaks neist ei ole kollineaarsed. Kuna vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ ei ole kollineaarsed, siis määravad nad suvalisse ruumi punkti paigutatuna tasandi. Ilmselt võime süsteemi $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ käsitleda selle tasandi baasina. Kollineaarsuse tõttu asub vektor $\vec{a}_3$ samas tasandis ning teoreemi 2 kohaselt saab seda vektorit avaldada baasivektorite kaudu:

$$\vec{a}_3 = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2.$$

Kirjutame selle võrduse kujul

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 - \vec{a}_3 = \vec{0}.$$

Saime kolme vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ mittetriviaalse lineaarse kombinatsiooni (vektori $\vec{a}_3$ kordaja on -1), mis on võrdne nullvektoriga. Järelikult on vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ lineaarselt sõltuvad. $\square$

Vektorite lineaarse sõltumatuse ja baasi mõisted on kõige otsesemalt seotud ruumi mõõtmega. Alustame kahemõõtmelisest eukleidilisest ruumist, st tasandist. Tõestatud teoreemidest järeldub, et tasandi mis tahes kolm vektorit on alati lineaarselt sõltuvad. Teiselt poolt on tasandi kaks mittekollineaarset vektorit lineaarselt sõltumatud. Seega on kaks suurim võimalik lineaarselt sõltumatute vektorite arv tasandil.

Ruumi lineaarselt sõltumatute vektorite maksimaalset arvu nimetatakse selle ruumi mõõtmeks ning neid vektoreid endid nimetatakse ruumi baasiks. Sügav tulemus, mille tõestus on küllaltki keeruline, on teoreem, mille kohaselt sisaldavad kõik ruumi baasid ühepalju vektoreid (nende arv on võrdne ruumi mõõtmega). Seetõttu nimetatakse tasandit kahemõõtmeliseks eukleidiliseks ruumiks.

Jätame lugejale iseseisvalt tõestada (kasutades käesolevas paragrahvis tõestatud teoreeme), et kolmemõõtmelise ruumi mis tahes neli vektorit on lineaarselt sõltuvad. Seega on kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis lineaarselt sõltumatute vektorite maksimaalne arv kolm ning just seetõttu räägime kolmemõõtmelisest ruumist.

2.6 Reeper, koordinaadisüsteem

Sirgjoonelise koordinaadisüsteemi konstrueerimiseks tasandil või ruumis võetakse kasutusele **reeperi** mõiste.

Tasandi reeper koosneb punktist O ja tasandi baasist $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ning seda tähistatakse $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Reeper määrab tasandi sirgjoonelise koordinaadisüsteemi järgmiselt: läbi punkti O tõmmatakse kaks sirget nii, et esimese sirge sihivektoriks on $\vec{e}_1$ ja teise sirge sihivektoriks $\vec{e}_2$. Esimest sirget nimetatakse **abstsissteljeks** (x -telg) ja teist **ordinaatteljeks** (y -telg). Telgede positiivsed suunad ühtivad vastavate baasivektorite suundadega.

Olgu P tasandi suvaline punkt. Vektorit $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ nimetatakse punkti P **kohavektoriks**. Vastavalt baasi omadustele on kohavektor üheselt esitatav kujul:

$$\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2.$$

Kordajaid x_1, x_2 nimetatakse punkti P **koordinaatideks** ning neid märgitakse kujul $P(x_1, x_2)$.

Geomeetriliselt vastavad punkti koordinaadid tema kohavektori projektsioonidele baasivektorite sihtidele. Kui baasivektoriteks on valitud ühikvektorid, see tähendab $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$, siis on punkti koordinaadid võrdsed kohavektori projektsioonidega vastavatele telgedele.

Koordinaadisüsteem ruumis konstrueeritakse analoogiliselt. Ruumi reeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ koosneb algpunktist O ja ruumi baasist $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Läbi reeperi alguspunkti O kulgevaid sirgeid baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ suundades nimetatakse koordinaattelgedeks:

- $\vec{e}_1$ suunaline sirge — **abstsisstelg** (x -telg),
- $\vec{e}_2$ suunaline sirge — **ordinaattelg** (y -telg),
- $\vec{e}_3$ suunaline sirge — **aplikaattelg** (z -telg).

Ruumipunkti P koordinaadid (x_1, x_2, x_3) saadakse tema kohavektori $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ arendisest ruumi baasil:

$$\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3.$$

Vektori ja punkti koordinaatide seos

Olgu antud punktid $P(x_1, x_2, x_3)$ ja $Q(y_1, y_2, y_3)$. Vektori $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ leidmiseks rakendame vektorite lahutamise eeskirja kohavektorite kaudu:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3).$$

Seega, vektori koordinaatide leidmiseks tuleb lõpp-punkti koordinaatidest lahutada alguspunkti vastavad koordinaadid. Vastupidi, kui me rakendame vektori $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ punktist $P(x_1, x_2, x_3)$, siis lõpp-punkti Q koordinaadid on:

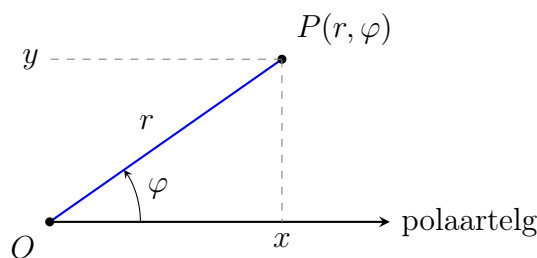
$$Q(x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3 + a_3).$$

2.7 Polaarkoordinaadid

Tasandil on üheks enimkasutatavaks kõverjooneliseks koordinaadisüsteemiks polaarkoordinaadisüsteem. Selle konstrueerimiseks fikseerime tasandil punkti O , mida nimetame **pooluseks** ja mis on polaarkoordinaadisüsteemi alguspunkt. Seejärel viime läbi pooluse O kiire, mida nimetame **polaarteljeks**, ning valime sellel kiirel ühikühikvektori $\vec{e}$, mis määrab polaatelje positiivse suuna.

Olgu P tasandi suvaline punkt. Punkti P polaarkoordinaatide leidmiseks moodustame kohavektori $\vec{OP}$. Selle kohavektori pikkust tähistame sümboliga r , st $r = |\vec{OP}|$. Arv r on punkti P esimene koordinaat polaarkoordinaatides. Teisiti on punkti P esimeseks koordinaadiks selle kaugus poolusest O . Punkti P teiseks koordinaadiks on orienteeritud nurk, mida loetakse polaatelje positiivsest suunast (mille määrab ühikvektor $\vec{e}$) vastupäeva lõiguni OP . Seda nurka tähistame sümboliga φ .

Seega on punkti P polaarkoordinaatideks arvupaar (r, φ) . Arvu r nimetatakse punkti P polaarraadiuseks ning nurka φ punkti P polaarnurgaks. Asjaolu, et arvupaar (r, φ) on punkti P polaarkoordinaadid, tähistame kirjutades need arvud punkti taha sulgudes kujul $P(r, \varphi)$.



Joonis 17: Polaarkoordinaadid tasandil

Märgime ära polaarkoordinaadisüsteemi ühe iseärasuse. Kui punkti esimene koordinaat on null, st punkt langeb kokku poolusega O , siis nurk φ ei ole rangelt võttes määratud. Polaarkoordinaatide muutumiskiirdeks valitakse

$$\mathcal{D} = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi\}.$$

Praktilistel kaalutlustel lepitakse tavaliselt kokku, et kui $r = 0$, siis $\varphi = 0$.

Eeldades, et tasandil on antud polaarkoordinaadisüsteem eespool kirjeldatud viisil, määratleme nüüd tasandil ristkoordinaadid. Ristkoordinaatide alguspunktiks valime pooluse O . Seega langeb polaarkoordinaadisüsteemi alguspunkt kokku ristkoordinaatide alguspunktiga.

Ristkoordinaatide esimeseks baasivektoriks $\vec{e}_1$ valime ühikvektori $\vec{e}$. Ristkoordinaatide teiseks baasivektoriks valime ühikvektori $\vec{e}_2$, mis on risti vektoriga $\vec{e}_1$ ning

suunatud nii, et pööre vektorilt $\vec{e}_1$ vektorile $\vec{e}_2$ toimub vastu päeva (positiivses suunas).

On ilmne, et vektorite paar $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ moodustab tasandi ortonormeeritud baasi. Seega on tasandil määratud ristkoordinaadisüsteem. Kui vastavaid koordinaate tähistada sümbolitega x, y , siis saab need polaarkoordinaatide r, φ kaudu avaldada järgmiselt:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (2.21)$$

Esitatud valemid nimetatakse polaarkoordinaatidelt ristkoordinaatidele ülemineku valemiteks, sest punkti polaarkoordinaate teades saame need asendada valemitesse (2.21) ja arvutada punkti ristkoordinaadid. Paneme tähele, et hulgateoreetiliselt määravad valemid (2.21) kujutuse $D \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, mis on üks-ühene ning pealekujutus ehk bijektsioon. Seega on kujutus (2.21) pööratav.

Seega on tasandil määratud kaks koordinaadisüsteemi, st ristkoordinaadid (x, y) ja polaarkoordinaadid (r, φ) . Oleme leidnud valemid, mis avaldavad ristkoordinaadid polaarkoordinaatide kaudu. Nagu käesoleva peatüki alguses rõhutatud, on kõik koordinaadisüsteemid võrdväärased ning ühe või teise kasutamine sõltub lahendatavate ülesannete iseloomust. Sellest järeldub, et meil peavad olema ka valemid, mis väljendavad polaarkoordinaate ristkoordinaatide kaudu. Teisisõnu tuleb meil leida kujutuse (2.21) pöördkujutus.

Selleks kasutame ilmseid seoseid

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (2.22)$$

Neid seoseid saab polaarkoordinaatide suhtes korrektselt lahendada, kui keh-testada ristkoordinaatide muutumispiirkonnale teatav piirang. Nõuame, et

$$x^2 + y^2 > 0.$$

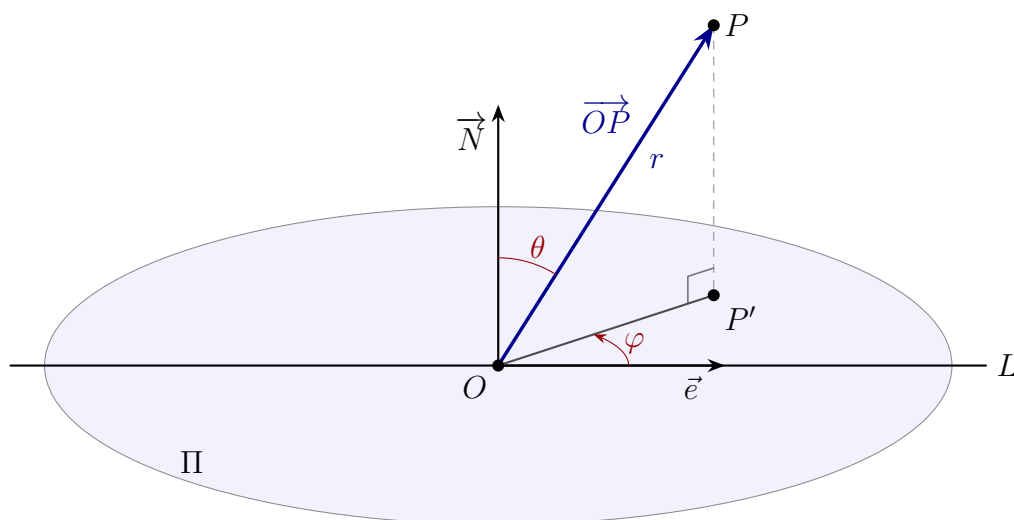
See tähendab, et jätame välja pooluse O ehk ristkoordinaatide alguspunkti, mis on ainus punkt, mille korral mõlemad koordinaadid x ja y on samaaegselt võrdsed nulliga, ning mille jaoks nurk φ pole üheselt määratud. Nüüd saame seosed (2.22) polaarkoordinaatide suhtes lahendada. Polaarraadiuse r määrab esimene seos üheselt. Polaarnurga φ korral koosinusest üksi ei piisa, kuna lõigus $[0, 2\pi)$ vastavad ühele ja samale koosinuse väärtusele kaks nurka, φ ja $2\pi - \varphi$; õige haru valime siinuse $\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ märgi ehk koordinaadi y märgi järgi. Nõnda avaldame

polaarkoordinaadid ristkoordinaatide kaudu:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{kui } y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{kui } y < 0. \end{cases} \end{cases}$$

2.8 Sfäärilised koordinaadid

Kolmemõõtmelises ruumis on üheks enimkasutatavaks kõverjooneliseks koordinaadisüsteemiks sfääriline koordinaadisüsteem. Sfäärilise koordinaadisüsteemi konstrueerimiseks fikseerime punkti O , mis on sfäärilise koordinaadisüsteemi alguspunktiks. Seejärel viime läbi punkti O tasandi Π ning fikseerime selle tasandi ühiknormaalvektori $\vec{N}$. Lisaks viime läbi punkti O sirge $L \subset \Pi$ ja valime sellel sirgel ühiksihiv vektori $\vec{e}$, mis määrab sirge L positiivse suuna.



Joonis 18: Sfääriline koordinaadisüsteem

Olgu P ruumi suvaline punkt. Punkti P sfääriliste koordinaatide leidmiseks ühendame selle koordinaatide alguspunktiga O ning moodustame selle kohavektori $\vec{OP}$. Selle kohavektori pikkust tähistame sümboliga r , st $r = |\vec{OP}|$. Arv r on punkti P esimene koordinaat sfäärilises koordinaadisüsteemis. Teisisõnu on punkti P esimeseks koordinaadiks selle kaugus sfäärilise koordinaadisüsteemi alguspunktist O . Tasandi Π normaalvektori $\vec{N}$ ja punkti P kohavektori $\vec{OP}$ vaheline nurk θ on punkti P teine koordinaat sfäärilises koordinaadisüsteemis.

Punkti P kolmanda koordinaadi leidmiseks vaatleme punkti P ristprojektsiooni tasandile Π , mida tähistame sümboliga P' . Siis on punkti P kolmandaks koordinaadiks orienteeritud nurk, mida loetakse sirge L positiivsest suunast (mille määrab ühikvektor $\vec{e}$) vastu päeva löiguni OP' . Seda nurka tähistame sümboliga φ .

Seega on punkti P sfäärilisteks koordinaatideks arvukolmik (r, θ, φ) . Nurka θ nimetatakse punkti P polaarnurgaks ning nurka φ punkti P asimuutnurgaks.

Märgime ära mõned sfäärilise koordinaadisüsteemi iseärasused. Kui punkti esimene koordinaat on null, st punkt langeb kokku sfäärilise koordinaadisüsteemi alguspunktiga O , siis nurgad θ ja φ ei ole rangelt võttes määratud. Analoogiliselt ei ole nurk φ määratud nende ruumi punktide jaoks, mis asuvad sirgel, mis läbib alguspunkti O ja on risti tasandiga Π ; sellise punkti korral on nurga θ väärtus kas 0 või π . Sfääriliste koordinaatide muutumispiirkonnaks valitakse

$$\mathcal{D} = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 < r < \infty, 0 < \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}.$$

Praktilistel kaalutlustel lepitakse tavaliselt kokku, et kui $r = 0$, siis $\theta = \varphi = 0$, ning kui $r > 0$ ja $\theta = 0$ või $\theta = \pi$, siis $\varphi = 0$.

Eeldades, et ruumis on antud sfääriline koordinaadisüsteem eespool kirjeldatud viisil, määratleme nüüd ruumis ristkoordinaadid. Ristkoordinaatide alguspunktiks valime punkti O . Seega langeb sfäärilise koordinaadisüsteemi alguspunkt kokku ristkoordinaatide alguspunktiga.

Ristkoordinaatide esimeseks baasivektoriks $\vec{e}_1$ valime ühikvektori $\vec{e}$. Ristkoordinaatide teiseks baasivektoriks valime ühikvektori $\vec{e}_2$, mis asub tasandil Π , on risti vektoriga $\vec{e}_1$ ning vektorite kolmik $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{N}\}$ on paremakäe orientatsiooniga. Lõpuks võtame ristkoordinaatide kolmandaks baasivektoriks $\vec{e}_3$ vektori $\vec{N}$.

On ilmne, et vektorite kolmik $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ moodustab kolmemõõtmelise ruumi ortonormeeritud baasi. Seega on ruumis määratud ristkoordinaadisüsteem. Kui vastavaid koordinaate tähistada sümbolitega x, y, z , siis saab need sfääriliste koordinaatide r, θ, φ kaudu avaldada järgmiselt:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \quad (2.23)$$

Esitatud valemeid nimetatakse sageli sfäärilistelt koordinaatidelt ristkoordinaatidele ülemineku valemiteks, sest punkti sfäärilisi koordinaate teades saame need asendada valemitesse (2.23) ja arvutada punkti ristkoordinaadid. Paneme tähele, et hulgateoreetiliselt määravad valemid (2.23) kujutuse $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$, mis on üks-ühene ning pealekujutus ehk bijektsioon. Väljajäetud hulk $\{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ on parajasti z -telg, st sirge, mis läbib alguspunkti O ja on risti tasandiga Π . Seega on kujutus (2.23) pööratav.

Seega on kolmemõõtmelises ruumis määratud kaks koordinaadisüsteemi, st ristkoordinaadid (x, y, z) ja sfäärilised koordinaadid (r, θ, φ) . Oleme leidnud valemid, mis avalduvad ristkoordinaadid sfääriliste koordinaatide kaudu. Siinkohal tuleb rõhutada üht nüüdisaegse geomeetria väga olulist põhimõtet, mis seisneb selles, et ruumis ei ole olemas eelistatud koordinaadisüsteemi, millel oleks teiste süsteemidega võrreldes mingid eelised. Seega on kõik koordinaadisüsteemid võrdväärsed ning ühe või teise koordinaadisüsteemi kasutamine sõltub lahendatavate geomeetriliste ülesannete iseloomust. Sellest järeldub, et meil peavad olema ka valemid, mis väljendavad sfäärilised koordinaadid ristkoordinaatide kaudu. Teisisõnu tuleb meil leida kujutus, mis on pöördkujutus kujutusele (2.23).

Selleks kasutame ilmseid seoseid

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \cos \theta = \frac{z}{r}, \\ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (2.24)$$

Neid seoseid saab sfääriliste koordinaatide suhtes korrektselt lahendada, kui kehtestada ristkoordinaatide muutumiskiirgusele teatavad piirangud. Nõuame, et

$$x^2 + y^2 > 0.$$

See tähendab, et jätame välja kõik need ruumi punktid, mille korral mõlemad koordinaadid x ja y on samaaegselt võrdsed nulliga. Kõik sellised punktid paiknevad sirgel, mis läbib alguspunkti O ja on risti tasandiga Π , st ristkoordinaadisüsteemi z -teljel. Nüüd saame seosed (2.24) sfääriliste koordinaatide suhtes lahendada. Polaarnurga θ määrab tingimus $\cos \theta = \frac{z}{r}$ üheselt, sest $\theta \in (0, \pi)$ ja koosinus on lõigul $[0, \pi]$ rangelt kahanev. Asimuutnurga φ korral koosinusest üksi ei piisa, kuna lõigus $[0, 2\pi)$ vastavad ühele ja samale koosinuse väärtusele kaks nurka, φ ja $2\pi - \varphi$; õige haru valime siinuse $\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ märgi ehk koordinaadi y märgi järgi. Nõnda avaldame sfäärilised koordinaadid ristkoordinaatide kaudu:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{kui } y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{kui } y < 0. \end{cases} \end{cases}$$

3 Skalaarkorrutis

Eelmistes peatükkides käsitlesime vektorite lineaarseid tehteid: vektorite liitmist ja reaalarvuga korrutamist. Need tehted võimaldasid meil kirjeldada geomeetrilisi struktuure ning uurida vektorite kollineaarsust ja komplanaarsust. Siiski ei piisa vaid nendest tehetest meetriliste probleemide lahendamiseks — näiteks vektorite pikkuste või nendevaheliste nurkade leidmiseks. Selles peatükis defineerime uue algebralise tehte, *skalaarkorrutise*, mis seab igale kahele vektorile vastavusse reaalarvu (skalaari). Skalaarkorrutis mängib analüütilises geomeetrias fundamentaalset rolli, kuna see loob silla vektorite algebraliste omaduste ja ruumi eukleidilise geomeetria – pikkused, nurgad ja ristumine – vahel.

3.1 Skalaarkorrutise definitsioon

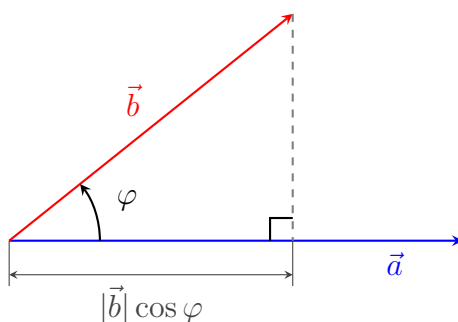
Olgu antud kaks nullvektorist erinevat vektorit $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}^n$. Rakendame vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ühest ja samast punktist O ning olgu $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ja $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk on nurk, mis tekib vektori $\overrightarrow{OA}$ pööramisel ümber punkti O **lühemat teed pidi** kokkulangemiseni vektoriga $\overrightarrow{OB}$. Teisisõnu, kahest nurgast, mille moodustavad kiired OA ja OB , loeme vektorite $\overrightarrow{OA}$ ja $\overrightarrow{OB}$ vaheliseks nurgaks selle, mis ei ületa nurka π . Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vahelist nurka tähistame $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, kusjuures $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Kui $\varphi = \frac{\pi}{2}$, siis öeldakse, et vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on teineteisega *risti* ehk *ortogonaalsed*, mida tähistatakse $\vec{a} \perp \vec{b}$. Nullvektorit loetakse risti olevaks mistahes vektoriga.

Definitsioon 11. Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ **skalaarkorrutiseks** nimetatakse reaalarvu

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}). \quad (3.1)$$

kus $|\vec{a}|$ ja $|\vec{b}|$ on vektorite pikkused ning $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ nende vektorite vaheline nurk.



Joonis 19: Skalaarkorrutise geomeetriline sisu. Komponent $|\vec{b}| \cos \varphi$ kujutab endast vektori $\vec{b}$ projektsiooni vektori $\vec{a}$ sihile.

3.2 Skalaarkorrutise omadused

Loetleme skalaarkorrutise olulisemad omadused:

Teoreem 8 (Skalaarkorrutise omadused). *Suvaliste vektorite $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ja suvaliste arvude $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ korral kehtivad järgmised omadused:*

1. *Kommutatiivsus:* $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$.
2. $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2 \geq 0$, kusjuures $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ parajasti siis, kui $\vec{a} = \vec{0}$.
3. $\vec{a} \perp \vec{b}$ parajasti siis, kui $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$.
4. *Lineaarsus:* $\langle \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c} \rangle = \alpha \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \beta \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$.
5. *Kui $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on tasandi ristreeper, siis kehtivad võrdused:*

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = 1, \quad \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0. \quad (3.2)$$

Kui $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ on ruumi ristreeper, siis kehtivad võrdused:

$$\begin{aligned} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle &= \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \rangle = 1, \\ \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle &= \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Tõestus. Esimene ja teine omadus tulenevad otseselt skalaarkorrutise definitsioonist.

Tõestame kolmanda omaduse. Tarvilikkuse tõestamiseks eeldame, et vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on risti. Tahame näidata, et sel juhul on nende skalaarkorrutis null. Mee-nutame, et nullvektor on risti suvalise vektoriga. Kui üks nendest vektoritest on nullvektor, siis skalaarkorrutis võrdub nulliga definitsiooni kohaselt (sest nullvek-tori pikkus on null). Oletame, et $\vec{a} \neq \vec{0}$ ja $\vec{b} \neq \vec{0}$. Siis $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ (ristuvad vektorid) ja skalaarkorrutise definitsiooni kohaselt saame, et

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

sest $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Piisavuse tõestame järgmiselt. Eeldame, et vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis on null. Näitame, et need vektorid on risti. Kirjutame välja skalaarkorrutise definit-siooni:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0.$$

Kolme reaalarvu korrutis on null parajasti siis, kui vähemalt üks neist on null. Kui vektori $\vec{a}$ või vektori $\vec{b}$ pikkus on null, siis on tegemist nullvektoriga, mis on risti

suvalise vektoriga. Kui $|\vec{a}| \neq 0$ ja $|\vec{b}| \neq 0$, siis $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, millest järeldub, et $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ ehk vektorid on risti.

Tõestame neljanda omaduse. Kui vektor $\vec{c}$ on nullvektor, siis teoreemi neljas väide on ilmne. Seetõttu eeldame, et $\vec{c} \neq \vec{0}$. Konstrueerime ortogonaalse baasi — tasandi juhul $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ja ruumi juhul $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ —, võttes esimeseks baasivektori $\vec{c}$, st $\vec{e}_1 = \vec{c}$. Ülejäänud baasivektorid valime nii, et nad oleksid ortogonaalsed vektoriga $\vec{e}_1$ ning ruumis ka omavahel ortogonaalsed. Edaspidine arutlus kasutab üksnes esimese koordinaadi leidmist, mistõttu käsitleme mõlemat juhtu ühise arutlusega. Arvutame vektori $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ esimese koordinaadi selles baasis. Selleks kasutame eelmise paragrahvi valemit (2.7), st

$$x_1 = \frac{\text{pr}_{\vec{e}_1}(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b})}{|\vec{e}_1|}. \quad (3.4)$$

Märkame, et baasivektorite paarikaupa ortogonaalsuse tõttu on projektsioon ortogonaalne. Seega

$$\text{pr}_{\vec{e}_1}(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = |\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}| \cos \varphi,$$

kus φ on nurk vektorite $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ ja $\vec{e}_1$ vahel. Niisiis saame projektsiooni avaldada skalaarkorrutise kaudu järgmiselt:

$$\text{pr}_{\vec{e}_1}(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \frac{\langle \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{e}_1|}.$$

Vektori $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ esimene koordinaat on nüüd esitatav kujul:

$$x_1 = \frac{\langle \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{e}_1|^2}.$$

Sarnaselt arvutame vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ esimese koordinaadi. Saame:

$$\frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{e}_1|^2}, \quad \frac{\langle \vec{b}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{e}_1|^2}.$$

Eelmise paragrahvi valemi (2.10) kohaselt tuleb vektorite liitmisel ja arvudega korrutamisel sooritada samad tehteid nende koordinaatidega. Sellest järeldub, et

$$\frac{\langle \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{e}_1|^2} = \alpha \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{e}_1|^2} + \beta \frac{\langle \vec{b}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{e}_1|^2}.$$

Korrutades mõlemad pooled arvuga $|\vec{e}_1|^2$ ja asendades $\vec{e}_1$ vektoriga $\vec{c}$, saame:

$$\langle \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c} \rangle = \alpha \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \beta \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle.$$

□

3.3 Skalaarkorrutis koordinaatides

Teoreemi 8 teisest omadusest järeldub, et vektori pikkuse võime arvutada, kasutades valemit $|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$. Viimase omaduse võrdused võime kirjutada kompaktsel kujul, kui defineerime kahe alaindeksiga suuruse (nn Kroneckeri sümbol):

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{kui } i = j, \\ 0 & \text{kui } i \neq j. \end{cases} \quad (3.5)$$

Sellega saame kirjutada viimase omaduse võrdused kujul $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$, kusjuures tasandi ristreeperi korral jooksevad indeksid i, j hulgas $\{1, 2\}$ ja ruumi ristreeperi korral hulgas $\{1, 2, 3\}$.

Tuletame meelde, et ortonormeeritud baasi korral avaldub iga vektor baasivektorite lineaarkombinatsioonina, mille kordajateks on vektori projektsioonid baasivektorite sihtidele. Ruumis, kui $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ on ortonormeeritud baas, kehtib valem:

$$\vec{r} = |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 + |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2 + |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3.$$

Analoogiliselt tasandil, kui $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on ortonormeeritud baas, siis kehtib:

$$\vec{r} = |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 + |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2.$$

Paneme tähele, et $|\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_i) = \langle \vec{r}, \vec{e}_i \rangle$ iga i korral. Seega võib mõlemal juhul vektori esitada kujul

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{r}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i,$$

kus $n = 2$ tasandi ja $n = 3$ ruumi juhul. Järelikult avalduvad vektori koordinaadid ortonormeeritud baasi suhtes skalaarkorrutise abil järgmiselt:

- tasandil, kui $\vec{r} = (x, y)$:

$$x = \langle \vec{r}, \vec{e}_1 \rangle, \quad y = \langle \vec{r}, \vec{e}_2 \rangle; \quad (3.6)$$

- ruumis, kui $\vec{r} = (x, y, z)$:

$$x = \langle \vec{r}, \vec{e}_1 \rangle, \quad y = \langle \vec{r}, \vec{e}_2 \rangle, \quad z = \langle \vec{r}, \vec{e}_3 \rangle. \quad (3.7)$$

Olgu edaspidi antud ristreeper — tasandil kujul $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ või ruumis kujul $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ — ning selle suhtes kaks vektorit, mille koordinaate nimetame *ristkoordinaatideks*.

Teoreem 9 (Skalaarkorrutise arvutusvalem koordinaatides). *Kahe vektori skalaarkorrutis on võrdne vastavate ristkoordinaatide korrutiste summaga: tasandi vektorite $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$ ja $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$ korral kehtib*

$$\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 \rangle = x_1x_2 + y_1y_2, \quad (3.8)$$

ning ruumi vektorite $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ja $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ korral

$$\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \quad (3.9)$$

Tõestus. Tõestame ruumilise juhu; tasandi juhu tõestus on täiesti analoogiline, jättes kolmanda koordinaadiga seotud liikmed välja. Tänu koordinaatide definitsioonile kehtib võrdus $\vec{r}_1 = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$. Kasutades skalaarkorrutise lineaarsust ja kommutatiivsust, leiame:

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 \rangle &= \langle x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3, \vec{r}_2 \rangle \\ &= x_1 \langle \vec{r}_2, \vec{e}_1 \rangle + y_1 \langle \vec{r}_2, \vec{e}_2 \rangle + z_1 \langle \vec{r}_2, \vec{e}_3 \rangle. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Eespool tõestatud valemist (3.7) järeldub, et $\langle \vec{r}_2, \vec{e}_1 \rangle = x_2$, $\langle \vec{r}_2, \vec{e}_2 \rangle = y_2$ ja $\langle \vec{r}_2, \vec{e}_3 \rangle = z_2$. Seega on võrdus (3.9) tõestatud. $\square$

Tõestatud teoreemist järeldub, et vektori pikkus avaldub ristkoordinaatides järgmiselt:

- tasandil, kui $\vec{r} = (x, y)$:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (3.11)$$

- ruumis, kui $\vec{r} = (x, y, z)$:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.12)$$

Kahe vektori vahelise nurga koosinuse arvutame järgmiste valemite abil:

- tasandil, kui $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$ ja $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$:

$$\cos \angle(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}; \quad (3.13)$$

- ruumis, kui $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ja $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\cos \angle(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (3.14)$$

Kahe punkti vahelise kauguse arvutame:

- tasandil, kui $P(x_1, y_1)$ ja $Q(x_2, y_2)$:

$$|PQ| = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \quad (3.15)$$

- ruumis, kui $P(x_1, y_1, z_1)$ ja $Q(x_2, y_2, z_2)$:

$$|PQ| = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (3.16)$$

NB! Valemid (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), (3.15) ja (3.16) kehtivad ainult rist-koordinaatides!

4 Vektorkorrutis

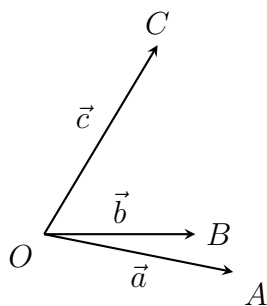
Eelmises peatükis tutvusime skalaarkorrutisega, mis seab kahele vektorile vastavusse reaalarvu. Ruumigeomeetrias ja füüsikas on aga sageli tarvis konstrueerida vektorit, mis oleks risti kahe etteantud vektoriga. Selleks defineerime uue algebralise tehte — *vektorkorrutise*. Erinevalt skalaarkorrutisest on vektorkorrutise tulemuseks uus vektor. Selles peatükis uurime vektorkorrutise definitsiooni, selle geomeetrilist tähendust ja algebralisi omadusi ning tuletame valemi vektorkorrutise arvutamiseks ristkoordinaatides.

4.1 Vektorkorrutise definitsioon ja omadused

Vektorkorrutamine on algebraline operatsioon, mis seab kahele ruumivektorile vastavusse kolmanda vektori. Enne, kui saame anda vektorkorrutise definitsiooni, vajame mõningaid abimõisteid.

Definitsioon 12. Olgu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathcal{V}^3$ ruumivektorid. Fikseerime ruumis punkti O ning valime punktid A, B, C selliselt, et $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ja $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ (ehk rakendame vektorid $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ punktist O). Me nimetame kolmikut $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ **komp-lanaarseks**, kui lõigud OA, OB ja OC asuvad ühel ja samal tasandil. Vastasel korral ütleme, et kolmik $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ on **mittekomplanaarne**.

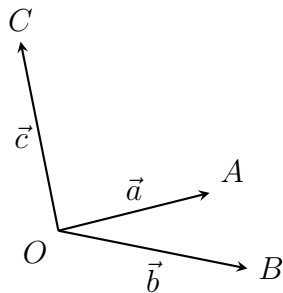
Definitsioon 13. Olgu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathcal{V}^3$ mittekomplanaarsed ruumivektorid. Kolmikut $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ nimetatakse **parema käe kolmikuks** (vasaku käe kolmikuks), kui punktist C vaadelduna toimub vektori $\overrightarrow{OA}$ pööre lühimat teed pidi vektori $\overrightarrow{OB}$ kellaosuti liikumise suunale vastupidises suunas ehk vastupäeva (kellaosuti liikumise suunas ehk päripäeva).



Joonis 20: Parema käe kolmik $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$

Paneme tähele, et suunates parema käe nimetis- ja keskmise sõrme vastavalt vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ suunas, näitab parema käe pöial meie vektori $\vec{c}$ suunda juhul, kui kolmik $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ moodustab parema käe kolmiku.

Analoogiliselt, suunates vasaku käe nimetis- ja keskmise sõrme $\vec{a}$ ning $\vec{b}$ suunas, osutab vasaku käe pöial $\vec{c}$ suunas, kui $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ on vasaku käe kolmik.

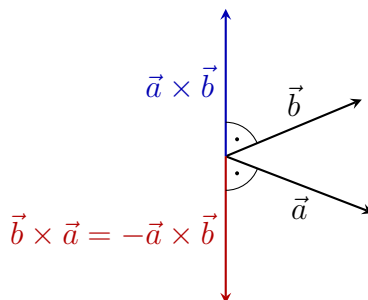


Joonis 21: Vasaku käe kolmik $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$

Definitsioon 14 (Vektorkorrutis). Ruumivektorite $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}^3$ **vektorkorrutiseks** nimetatakse vektorit $\vec{a} \times \vec{b} \in \mathcal{V}^3$, mis on määratud kolme tingimusega:

1. (pikkus) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$,
2. (siht) $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ ja $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$,
3. (suund) kui vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on mittekollineaarsed, siis $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ on parema käe kolmik.

Paneme tähele, et vektori $\vec{a} \times \vec{b}$ suuna määramiseks saame kasutada parema käe reeglit.



Joonis 22: Vektorkorrutis

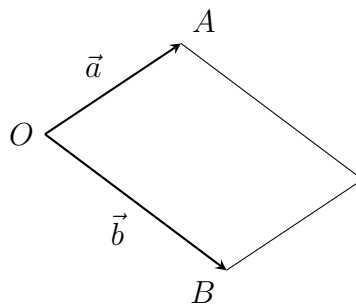
Definitsiooni esimesest tingimusest näeme, et kui $\vec{a} = \vec{0}$, siis $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$. Selge, et ainus vektor, mille pikkus on 0, on nullvektor ehk $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Niisiis nullvektori vektorkorrutis mistahes vektoriga on taaskord nullvektor. Osutub, et tegelikult kehtib isegi tugevam seos.

Teoreem 10 (Kollineaarsuse tarvilik ja piisav tingimus). *Vektorid $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}^3$ on kollineaarsed parajasti siis, kui $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$.*

Tõestus. Eeldame esiteks, et vektorid $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ on kollineaarsed, st $\vec{x} \parallel \vec{y}$. Siis $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ või $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \pi$ ja mõlemal juhul $\sin \angle(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Siis aga $|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot 0 = 0$ ehk $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$.

Teisalt, kui $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$, siis vektorkorrutise definitsiooni 14 tingimuse 1 järgi on kas $|\vec{x}| = 0$, $|\vec{y}| = 0$ või $\sin \angle(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Selge, et esimese kahe variandi korral on üks vektoritest nullvektor ja seega kollineaarsuse tingimus on täidetud. Kolmanda tingimuse korral $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ või $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \pi$ ehk vektorid $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ on kollineaarsed. $\square$

Järeldus 2. *Mistahes ruumivektori $\vec{x} \in \mathcal{V}^3$ korral $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$.*



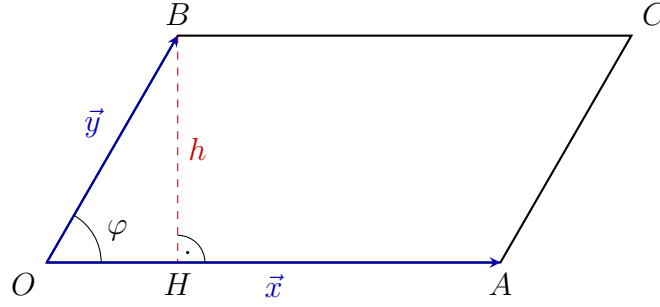
Joonis 23: Vektoritele $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ehitatud rööpkülik

Olgu vektorid $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}^3$ mittekollineaarsed vektorid. Fikseerime punkti O ning leiame punktid A ja B nii, et $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ja $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Konstrueerides rööpküliku, mille lähiskülgedeks on lõigud OA ja OB , ütleme, et saadud rööpkülik on ehitatud vektoritele $\vec{a}$ ning $\vec{b}$.

Teoreem 11 (Rööpküliku pindala). *Kui $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}^3$ on mittekollineaarsed vektorid, siis vektoritele $\vec{x}, \vec{y}$ ehitatud rööpküliku pindala on võrdne servavektorite vektorkorrutise $\vec{x} \times \vec{y}$ pikkusega, st*

$$S = |\vec{x} \times \vec{y}|.$$

Tõestus. Olgu φ mittekollineaarsete vektorite $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}^3$ vaheline nurk. Ehitame nendele vektoritele rööpküliku $OABC$ (vt joonis 24). Teame, et rööpküliku $OABC$



Joonis 24: Vektoritele $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ ehitatud rööpküliku pindala

pindala S on võrdne rööpküliku aluse OA pikkuse ja kõrguse h korrutisega

$$S = |OA|h.$$

Kuna $|OA| = |\vec{x}|$, siis $S = |\vec{x}|h$. Kolmnurk $\triangle OHB$ on täisnurkne ning $h = |BH|$, seega

$$h = |BH| = |OB| \sin \varphi = |\vec{y}| \sin \varphi.$$

Kokkuvõttes oleme saanud

$$S = |\vec{x}|h = |\vec{x}||\vec{y}| \sin \varphi = |\vec{x} \times \vec{y}|.$$

□

Eelnevas nägime, et vektorkorrutise pikkuse geomeetriline tähendus on rööpküliku pindala. Kuid lisaks geomeetrilistele rakendustele on vektorkorrutis ka matemaatiline tehe, millel on kindlad algebralised omadused. Nende omaduste tundmine on oluline, et vektorkorrutisega efektiivselt arvutusi teostada, ilma et peaks iga kord geomeetrilist tõlgendust rakendama.

Lause 5 (Vektorkorrutise algebralised omadused). *Olgu $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{V}^3$ ruumivektorid ning $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ arvud. Vektorite vektorkorrutamisel on järgmised algebralised omadused:*

1. $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$, vektorkorrutis on kaldsümmeetriline,
2. $(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \times \vec{z} = \alpha\vec{x} \times \vec{z} + \beta\vec{y} \times \vec{z}$, vektorkorrutis on lineaarne.

Tõestus. Tõestame ainult esimese omaduse, teine omadus jääb iseseisvaks ülesandeks. Esiteks märgime, et kui vektorid $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ on kollineaarsed, siis teoreemist 10 järeldub, et vektorkorrutised $\vec{x} \times \vec{y}$ ja $\vec{y} \times \vec{x}$ on nullvektorid, seega omadus kehtib. Eeldame nüüd, et vektorid on mittekollineaarsed, st $\vec{x} \nparallel \vec{y}$. Peame näitama, et vektorid $\vec{x} \times \vec{y}$ ja $-\vec{y} \times \vec{x}$ on võrdsed vektorid, st peame näitama, et nende pikkused on võrdsed ja nad on samasuunalised.

- a) **Pikkus.** Teoreemis 11 tõestasime, et vektorite vektorkorrutise pikkus on võrdne nendele vektoritele ehitatud rööpküliku pindalaga. On ilmne, et vektoritele $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ ning vektoritele $\vec{y}$ ja $\vec{x}$ ehitatud rööpkülikud ühtivad, st tegemist on ühe ja sama rööpkülikuga. Järelikult vektorite $\vec{x} \times \vec{y}$ ja $-\vec{y} \times \vec{x}$ pikkused on võrdsed.
- b) **Siht.** Vektorkorrutise definitsiooni kohaselt on vektorid $\vec{x} \times \vec{y}$ ja $\vec{y} \times \vec{x}$ risti vektoritega $\vec{x}$ ning $\vec{y}$. Seega kehtib $\vec{x} \times \vec{y} \parallel \vec{y} \times \vec{x}$ ehk vektorid on kollineaarsed.
- c) **Suund.** Parema käe reeglist (vt joonis 20) järeldeb, et vektorid $\vec{x} \times \vec{y}$ ja $\vec{y} \times \vec{x}$ on vastassuunalised.

Järelikult kehtib $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$. □

Vektorkorrutise algebralisi omadusi kasutades saame sageli olulisel määral arvutuskäike lihtsustada.

Näide 1. Olgu antud vektorid $\vec{a}, \vec{b}$, kus $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ ning $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$. Leiame $|(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})|^2$. Kasutades vektorkorrutise lineaarsuse omadust, teisendame järgmiselt:

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}) = 2\vec{a} \times \vec{a} + 4\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} + 2\vec{b} \times \vec{b}.$$

Nüüd arvestame, et vektorkorrutis on kaldsümmeetriline:

$$2\vec{a} \times \vec{a} + 4\vec{a} \times \vec{b} + (-\vec{a} \times \vec{b}) + 2\vec{b} \times \vec{b} = 2\vec{a} \times \vec{a} + 3\vec{a} \times \vec{b} + 2\vec{b} \times \vec{b}.$$

Seejärel kasutame järeldest 2, mis ütleb, et suvalise vektori korral kehtib $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$. Seega

$$2\vec{a} \times \vec{a} + 3\vec{a} \times \vec{b} + 2\vec{b} \times \vec{b} = \vec{0} + 3\vec{a} \times \vec{b} + \vec{0} = 3\vec{a} \times \vec{b}.$$

Järelikult

$$|(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})|^2 = |3\vec{a} \times \vec{b}|^2 = 9|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \sin^2 \frac{2\pi}{3} = 9 \cdot 1 \cdot 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 27.$$

Skalaarkorrutis ja vektorkorrutis annavad meile kaks erinevat algebralist tehet, mille tulemused kannavad eri geomeetrilist tähendust: esimene seob omavahel vektorite pikkused ja nendevahelise nurga koosinuse, teine aga sama nurga siinuse. Pole seega üllatav, et need kaks korrutist on omavahel tihedalt seotud. Järgnev teoreem fikseerib selle seose ühe lihtsa ja kompaktse samasusena.

Teoreem 12. Suvaliste vektorite $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}^3$ korral kehtib samasus

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2. \quad (4.1)$$

Tõestus. Tähistame $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Skalaarkorrutise definitsiooni järgi

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 = (|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi)^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \varphi.$$

Vektorkorrutise definitsiooni 14 tingimusest 1 saame, arvestades et $\sin \varphi \geq 0$ iga $\varphi \in [0, \pi]$ korral,

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (|\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi)^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \varphi.$$

Liites need võrdused ja kasutades trigonomeetria põhisamasust $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, saame

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2,$$

millest järeldub väide vahetult. $\square$

Saadud samasuse otseseks tagajärjeks on üks matemaatika fundamentaalsemaid võrratusi — *Cauchy-Schwarzi võrratus* — mis seob omavahel kahe vektori skalaarkorrutise ja nende pikkused.

Järeldus 3 (Cauchy-Schwarzi võrratus). *Suvaliste vektorite $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}^3$ korral kehtib võrratus*

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq |\vec{a}||\vec{b}|, \quad (4.2)$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed.

Tõestus. Teoreemist 12 järeldub, et

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a} \times \vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2,$$

sest $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 \geq 0$. Mõlemast poolest ruutjuure võtmisel saame $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$. Võrdus kehtib parajasti siis, kui $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$, mis teoreemi 10 kohaselt on samaväärne vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kollineaarsusega. $\square$

Vektorkorrutamine on algebraline tehe, st vektorkorrutamine seab igale paarile $(\vec{x}, \vec{y})$ vastavusse üheselt määratud vektori $\vec{x} \times \vec{y}$. Eelnevalt tõestasime, et vektorkorrutamine on mittekommutatiivne. Teame, et algebralise tehte üheks tähtsamaks omaduseks on assotsiatiivsus. Kas vektorkorrutamisel on assotsiatiivsuse omadus, st kas kehtib

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) ?$$

Osutub, et vastus on eitav: vektorkorrutamine *ei ole* assotsiatiivne. Selle nägemiseks piisab ühest vastunäitest. Olgu $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ mitte-kollineaarsed vektorid ning võtame $\vec{x} = \vec{y} = \vec{a}$ ja $\vec{z} = \vec{b}$. Järelduse 2 põhjal on $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, mistõttu

$$(\vec{a} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Teiselt poolt on vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ mittekollineaarsed, seega teoreemi 10 kohaselt $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$. Vektorkorrutise definitsiooni 14 järgi on $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$, kusjuures mittekollineaarsuse tõttu $\vec{a} \neq \vec{0}$. Seega on $\vec{a}$ ja $\vec{a} \times \vec{b}$ kaks nullvektorist erinevat ning teineteisega risti olevat vektorit. Järelikult ei ole nad omavahel kollineaarsed. Sama teoreemi põhjal saame

$$\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) \neq \vec{0}.$$

Järelikult

$$(\vec{a} \times \vec{a}) \times \vec{b} \neq \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}),$$

st sulgude asukoht on kahekordses vektorkorrutises oluline.

Rõhutame, et see ei tähenda, nagu erineksid võrduse pooled iga vektorikolmiku korral — näiteks kollineaarsete vektorite korral on mõlemad pooled nullvektorid. Assotsiatiivsus tähendaks aga võrduse kehtimist *kõigi* vektorite korral, ja just seda omadust vektorkorrutamisel ei ole.

4.2 Vektorkorrutis koordinaatides

Järgnevas uurime, kuidas saab vektorkorrutise arvutada, kui ruumis on antud ristkoordinaadid. Selleks eeldame, et ruumis on antud ristreeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Kuna vektorkorrutamise korral on oluline ka vektorite orientatsioon, siis eeldame järgnevas, et **kõik reeperid on parema käe ristreeperid**.

Teoreem 13 (Vektorkorrutise arvutusvalem ristkoordinaatides). *Olgu meil parema käe ristreeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ning*

$$\vec{v} = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{ja} \quad \vec{w} = (x_2, y_2, z_2)$$

suvalised vektorid. Siis vektorkorrutise $\vec{v} \times \vec{w}$ koordinaadid avalduvad

$$\vec{v} \times \vec{w} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1). \quad (4.3)$$

Tõestus. Väite tõestamiseks arvutame esmalt vektorkorrutised $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1$. Paneme tähele, et

$$|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = |\vec{e}_1| |\vec{e}_2| \sin \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Vektorkorrutise definitsiooni 14 järgi on vektorkorrutis $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ risti vektoritega $\vec{e}_1$ ja $\vec{e}_2$, st $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \perp \vec{e}_1$ ning $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \perp \vec{e}_2$. Seega peab kehtima $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \parallel \vec{e}_3$. Edasi, rakendades definitsiooni kolmandat punkti, mis määrab vektorkorrutise suuna, teame, et kolmik $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_1 \times \vec{e}_2\}$ moodustab parema käe kolmiku ning järelikult $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \uparrow\uparrow \vec{e}_3$. Kuivõrd vektorite pikkused on samuti võrdsed, siis oleme näidanud, et

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3.$$

Analoogiliselt saame näidata (**iseseisvalt veenduda!**), et

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \quad \text{ja} \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2.$$

Vektorkorrutise kaldsümmeetrilisuse põhjal

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2.$$

Selle abil saame kirja panna baasivektorite korrutamistabeli:

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}, & \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, & \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2, \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3, & \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0}, & \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2, & \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, & \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}. \end{array}$$

Saadud korrutamistabeli ning vektorkorrutise lineaarsuse ja kaldsümmeetrilisuse kaudu saame arvutada otsitava vektorkorrutise $\vec{v} \times \vec{w}$ ristkoordinaatides. Kuna vektorite $\vec{v}$ ja $\vec{w}$ koordinaadid on vastavalt (x_1, y_1, z_1) ja (x_2, y_2, z_2) , siis nende vektorite esitus baasivektorite lineaarkombinatsioonidena on

$$\vec{v} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3 \quad \text{ja} \quad \vec{w} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3.$$

Saame:

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= (x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3) \times (x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3) = \\ &= x_1x_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) + x_1y_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + x_1z_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) + \\ &\quad y_1x_2(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) + y_1y_2(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) + y_1z_2(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) + \\ &\quad z_1x_2(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) + z_1y_2(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) + z_1z_2(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3) = \\ &= x_1y_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + x_1z_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) + \\ &\quad y_1x_2(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) + y_1z_2(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) + \\ &\quad z_1x_2(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) + z_1y_2(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) = \\ &= (x_1y_2 - y_1x_2)(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + \\ &\quad (y_1z_2 - y_2z_1)(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) + \\ &\quad (z_1x_2 - z_2x_1)(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) = \\ &= (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{e}_3 + (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{e}_1 + (z_1x_2 - z_2x_1)\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Niisiis koordinaatides

$$\vec{v} \times \vec{w} = (y_1z_2 - y_2z_1, z_1x_2 - z_2x_1, x_1y_2 - y_1x_2).$$

□

Tõestuses panime muuhulgas kirja ka baasivektorite vektorkorrutamise tabeli. Meenutame, et ristreeperi baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ skalaarkorrutiste valem on

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij},$$

kus $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ja δ_{ij} on Kroneckeri sümbol. Osutub, et ristreeperi baasivektorite paarikaupa vektorkorrutised on samuti võimalik kompaktselt ühe valemiga kirja panna. Selleks kasutatakse *Levi-Civita* sümbolit:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{kui } (i, j, k) \text{ on } (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ või } (3, 1, 2), \\ -1, & \text{kui } (i, j, k) \text{ on } (3, 2, 1), (2, 1, 3) \text{ või } (1, 3, 2), \\ 0, & \text{kui vähemalt kaks indeksit on võrdsed.} \end{cases}$$

Siis on ristreeperi baasivektorite vektorkorrutiste tabel esitatud valemiga

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \vec{e}_k.$$

Lisaks paneme tähele, et teoreemis esitatud valem (4.3) on võimalik samuti mõnevõrra kompaktsemalt kirja panna. Kui arvestame, et teist järku ruutmaatriksi A determinanti tähistatakse

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

siis saame valemi

$$\vec{v} \times \vec{w} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

kirjutada kujul

$$\vec{v} \times \vec{w} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

või

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3.$$

Arvestades saadud valemeid ja teoreemi 10. kollineaarsuse tarvilikkuse ja piisavuse kohta, oleme tõestanud järgmise väite.

Teoreem 14. *Kaks vektorit $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ ja $\vec{w} = (x_2, y_2, z_2)$ on kollineaarsed parajasti siis, kui*

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Meenutame, et kolmandat järku ruutmaatriksi A determinandi arvutamiseks saame kasutada valemit

$$\begin{aligned}|A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.\end{aligned}$$

Kasutades ära teist järku determinandi arvutuseeskirja, saame selle kirja panna kujul:

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Arvestades ka eelnevalt tõestatud valemit

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3,$$

saame kompaktselt valemi vektorkorrutise arvutamiseks koordinaatides, mis tugineb kolmandat järku ruutmaatriksi determinandi arvutamisele:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

4.3 Kahekordne vektorkorrutis

Varasemalt juba nägime, et sulgude paigutamine kahekordse vektorkorrutise juures on oluline ehk teisisõnu ei ole vektorkorrutise korral assotsiatiivsuse tingimus täidetud. Ent on siiski mõned omadused, mis ka kahekordse vektorkorrutise juures kehtivad.

Teoreem 15 (Kahekordne vektorkorrutis). *Suvaliste vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ korral kehtib valem*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a}.$$

Tõestus. On selge, et kui vähemalt üks vektoritest $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ on nullvektor, siis valem kehtib. Niisiis üldsust kitsendamata eeldame, et $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ ja $\vec{c} \neq \vec{0}$. Valime ruumi parema käe ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ nii, et $\vec{e}_1 \uparrow \vec{c}$. Siis $\vec{c} = |\vec{c}| \vec{e}_1$ ja järelikult $\vec{c} = (|\vec{c}|, 0, 0)$. Olgu

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{ja} \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2).$$

Leiame vektorkorrutise $\vec{a} \times \vec{b}$, kasutades vektorkorrutise arvutusvalemit koordinaatides:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Sama valemi teistkordsel rakendamisel saame:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = |\vec{c}| \left(0, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \right).$$

Teisalt paneme tähele, et koordinaatides avaldub $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a}$ järgmiselt:

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a} &= |\vec{c}| x_1 (x_2, y_2, z_2) - |\vec{c}| x_2 (x_1, y_1, z_1) = \\ &= |\vec{c}| (0, x_1 y_2 - x_2 y_1, x_1 z_2 - x_2 z_1). \end{aligned}$$

Niisiis $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a}$, nagu tarvis. $\square$

Tõestatud teoreemist järeldub vahetult klassikaline samasus, mis kannab Carl Gustav Jacobi nime ning mängib olulist rolli mitmel pool matemaatikas ja teoreetilises füüsikas, sealhulgas Lie algebrate teooria alusena.

Teoreem 16 (Jacobi samasus). *Suvaliste vektorite $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathcal{V}^3$ korral kehtib samasus*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}. \quad (4.4)$$

Tõestus. Eelmises teoreemis tõestatud valemis vektorite järjestust tsükliliselt muutes saame kolm võrdust:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a}, \\ (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} &= \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \vec{c} - \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle \vec{b}, \\ (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} &= \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle \vec{a} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c}. \end{aligned}$$

Liidame vastavate võrduste vasakud ja paremad pooled ning koondame paremal pool esinevad kuus liiget vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ järgi:

$$(\langle \vec{c}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle) \vec{a} + (\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle) \vec{b} + (\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle) \vec{c}.$$

Skalaarkorrutise kommutatiivsuse tõttu (vt teoreem 8, 1. omadus) on igas sulu-paaris olev vahe null. Järelikult

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

$\square$

5 Vektorite segakorrutis

Varasemates peatükkides oleme juba tutvunud kahe vektori korrutistega: skalaarkorrutis andis tulemuseks arvu, mis kirjeldas vektorite omavahelist nurka ja pikkusi, ning vektorkorrutis andis tulemuseks uue vektori, mis oli risti mõlema algse vektoriga ja mille pikkus võrdus nende moodustatud rööpküliku pindalaga. Järgnevas vaatleme veel üht vektorite korrutist, ent seekord on korrutatavaid vektoreid kolm. *Segakorrutamise* on matemaatiline tehe, mis ühendab endas nii skalaar- kui ka vektorkorrutise, andes tulemuseks ühe arvu. Kuid see arv pole suvaline, vaid kannab endas olulist geomeetrilist tähendust. Kolme vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ segakorrutise absoluutväärtus võrdub nimelt *rööptahuka ruumalaga*, mis on moodustatud nende kolme vektori poolt. Segakorrutis on niisiis otsekui laiendus vektorkorrutisele, mis aitas meil leida rööpküliku pindala. Segakorrutis pakub meile võimsa vahendi ruumiliste kujundite ja nende omaduste analüüsimiseks. Järgmistes alapeatükkides õpime tundma selle arvutamise meetodeid, geomeetrilist interpretatsiooni ja praktilisi rakendusi, näiteks vektorite *komplanaarsuse* (ühel tasapinnal paiknemise) tuvastamisel.

5.1 Segakorrutise definitsioon ja geomeetriline tähendus

Definitsioon 15. Ruumivektorite $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{V}^3$ **segakorrutiseks** nimetatakse reaalarvu

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} \rangle. \quad (5.1)$$

Näitame nüüd, et kasutades segakorrutise definitsiooni, on võimalik arvutada kolmele vektorile ehitatud rööptahuka ruumala.

Teoreem 17 (Rööptahuka ruumala). *Olgu vektorid $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{V}^3$ mittekomplanaarsed. Segakorrutise $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ absoluutväärtus on võrdne vektoritele $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ehitatud rööptahuka ruumalaga ehk*

$$V = |(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})|. \quad (5.2)$$

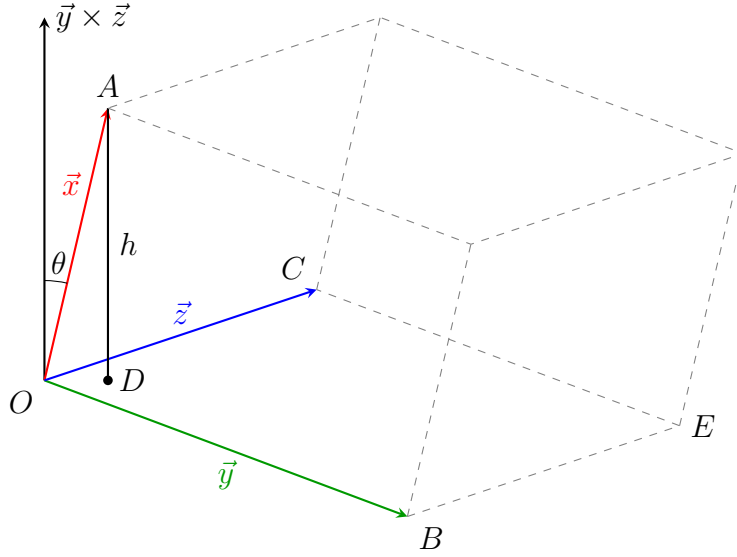
Vektorite segakorrutis on positiivne, kui $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ on parema käe kolmik, ning negatiivne, kui $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ on vasaku käe kolmik.

Tõestus. Rööptahuka ruumala V on võrdne rööptahuka põhja pindala ning kõrguse korrutisega. Seega

$$V = S_{OBEC} \cdot h.$$

Kasutades teoreemi 11 rööpküliku pindala kohta, teame, et rööpküliku *OBEC* pindala on võrdne teda moodustavate vektorite vektorkorrutise absoluutväärtusega:

$$S_{OBEC} = |\vec{y} \times \vec{z}|.$$



Joonis 25: Rööptahuka $OABC$ ruumala

Jooniselt 25 näeme, et rööptahuka kõrguse $h = |DA|$ pikkuse saame leida trigonomeetria abil:

$$h = |\vec{x}| |\cos \theta|,$$

kus θ on nurk vektori $\vec{x}$ ja vektorkorrutise $\vec{y} \times \vec{z}$ vahel. Kokkuvõttes

$$\begin{aligned} V &= S_{OBC} \cdot h = |\vec{y} \times \vec{z}| |\vec{x}| |\cos \theta| = |\vec{x}| |\vec{y} \times \vec{z}| |\cos \theta| \\ &= | \langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} \rangle | = |(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})|. \end{aligned}$$

□

Järeldus 4. Vektoritele $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{V}^3$ ehitatud tetraeedri ruumala on

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})|.$$

Järeldus 5. Vektoritele $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{V}^3$ ehitatud prisma ruumala on

$$V = \frac{1}{2} |(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})|.$$

Eelneva teoreemi alusel on meil võimas tööriist rööptahuka ruumala leidmiseks. Tuletame meelde, et rööptahuka ruumala on null ainult siis, kui selle kõrgus on null. Selleks peab vektorite $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ poolt moodustatud aluspind ning vektori $\vec{x}$ lõpp-punkti asuv tipp asetsema ühel ja samal tasandil. See tähendab, et kõik

kolm vektorit – $\vec{x}$, $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ – on samal tasapinnal. Selliseid vektoreid nimetatakse komplanaarseteks vektoriteks. Seega, kui segakorrutise $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ väärtus osutub nulliks, peab ka vastava rööptahuka ruumala olema null. See on aga võimalik ainult juhul, kui vektorid $\vec{x}$, $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ asuvad samal tasapinnal.

Teoreem 18 (Komplanaarsuse piisav ja tarvilik tingimus). *Vektorite $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{V}^3$ segakorrutis võrdub nulliga parajasti siis, kui need vektorid on komplanaarsed.*

Tõestus. Tähistame vektorite $\vec{x}$ ja $\vec{y} \times \vec{z}$ vahelise nurga $\theta = \angle(\vec{x}, \vec{y} \times \vec{z})$ ning vektorite $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ vahelise nurga $\phi = \angle(\vec{y}, \vec{z})$. Väite tõestamiseks meenutame, et kolm vektorit on komplanaarsed, kui vähemalt kaks neist on kollineaarsed (vt alapeatükk 1.1).

Tarvilikkus. Olgu $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = 0$. Seega $|\vec{x}| |\vec{y} \times \vec{z}| \cos \theta = 0$ ja järelikult kehtib üks kolmest väitest:

1. $|\vec{x}| = 0$,
2. $|\vec{y} \times \vec{z}| = 0$, või
3. $\cos \theta = 0$.

Ilmselt esimese ja teise võimaluse korral on vektorid komplanaarsed, kuna kaks neist on kollineaarsed. Kui aga $\cos \theta = 0$, siis θ on täisnurk ehk $\vec{x} \perp \vec{y} \times \vec{z}$. Viimane aga tähendabki, et vektorid on komplanaarsed.

Piisavus. Eeldame, et vektorid $\vec{x}$, $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ on komplanaarsed. Sel juhul $\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z} = \vec{0}$, kus vähemalt üks kordajatest $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ on nullist erinev. Vaatleme kõigepealt juhtu $\beta \neq 0$. Avaldame

$$\vec{y} = \alpha_1 \vec{x} + \gamma_1 \vec{z}, \quad \text{kus} \quad \alpha_1 = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad \gamma_1 = -\frac{\gamma}{\beta}.$$

Leiame $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} \rangle$. Paneme tähele, et võrduse paremal pool esinev vektorkorrutis on

$$\vec{y} \times \vec{z} = (\alpha_1 \vec{x} + \gamma_1 \vec{z}) \times \vec{z} = \alpha_1 \vec{x} \times \vec{z} + \gamma_1 \vec{z} \times \vec{z} = \alpha_1 \vec{x} \times \vec{z}.$$

Kuivõrd $\vec{x} \perp \vec{x} \times \vec{z}$, siis skalaarkorrutis $\langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} \rangle = 0$ ja kokkuvõttes oleme näidanud, et $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = 0$.

Juhtu $\gamma \neq 0$ käsitletakse samamoodi: avaldame vektori $\vec{z}$ ülejäänud kahe kaudu, misjärel $\vec{y} \times \vec{z}$ osutub vektoriga $\vec{y} \times \vec{x}$ kollineaarseks ja skalaarkorrutis vektoriga $\vec{x}$ on jälle null. Kui aga $\alpha \neq 0$, siis avaldame $\vec{x} = \beta_1 \vec{y} + \gamma_1 \vec{z}$ ning skalaarkorrutise lineaarsuse põhjal

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} \rangle = \beta_1 \langle \vec{y}, \vec{y} \times \vec{z} \rangle + \gamma_1 \langle \vec{z}, \vec{y} \times \vec{z} \rangle = 0,$$

sest vektorkorrutis $\vec{y} \times \vec{z}$ on risti nii vektoriga $\vec{y}$ kui ka vektoriga $\vec{z}$. Kuna eelduse kohaselt on vähemalt üks kordajatest nullist erinev, on kõik võimalikud juhud läbi vaadatud. $\square$

Järeldus 6. Kui segakorrutises on vähemalt kaks vektorit kollineaarsed, siis segakorrutis võrdub nulliga.

5.2 Segakorrutise omadused

Lause 6 (Segakorrutise omadused). Segakorrutisel on järgmised algebralised omadused:

1. Suvaliste vektorite $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{V}^3$ korral kehtib

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) = (\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}) = -(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}) = -(\vec{x}, \vec{z}, \vec{y}) = -(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}).$$

2. Segakorrutis on lineaarne iga argumendi suhtes, st iga $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ korral kehtivad võrdused

$$\begin{aligned}(\alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{x}_2, \vec{y}, \vec{z}) &= \alpha(\vec{x}_1, \vec{y}, \vec{z}) + \beta(\vec{x}_2, \vec{y}, \vec{z}), \\(\vec{x}, \alpha \vec{y}_1 + \beta \vec{y}_2, \vec{z}) &= \alpha(\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}) + \beta(\vec{x}, \vec{y}_2, \vec{z}), \\(\vec{x}, \vec{y}, \alpha \vec{z}_1 + \beta \vec{z}_2) &= \alpha(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_1) + \beta(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_2).\end{aligned}$$

Tõestus. 1. omaduse tõestamiseks märgime, et segakorrutise absoluutväärtus on võrdne rööptahuka ruumalaga ning järelikult ta ei sõltu vektorite järjestusest. Teisisõnu, kui vektorid segakorrutises ümber paigutada, siis segakorrutise absoluutväärtus sellest ei muutu.

Lisaks paneme tähele, et vektorite tsükliline permutatsioon ei muuda kolmiku $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ orientatsiooni, samas kui mittetsükliline permutatsioon muudab kolmiku orientatsiooni. Seega lause punktis 1. toodud võrdused kehtivad.

2. omadus. Lineaarsus esimese argumendi suhtes järeldub vahetult segakorrutise definitsioonist ja skalaarkorrutise lineaarsusest (vt teoreem 8, 4. omadus):

$$(\alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{x}_2, \vec{y}, \vec{z}) = \langle \alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{x}_2, \vec{y} \times \vec{z} \rangle = \alpha \langle \vec{x}_1, \vec{y} \times \vec{z} \rangle + \beta \langle \vec{x}_2, \vec{y} \times \vec{z} \rangle,$$

mis definitsiooni kohaselt ongi $\alpha(\vec{x}_1, \vec{y}, \vec{z}) + \beta(\vec{x}_2, \vec{y}, \vec{z})$.

Lineaarsus ülejäänud kahe argumendi suhtes järeldub siit 1. omaduse abil: viime vaadeldava argumendi tsüklilise permutatsiooniga esimesele kohale, rakendame äsja tõestatut ja toome tulemuse samamoodi tagasi. Näiteks teise argumendi korral

$$(\vec{x}, \alpha \vec{y}_1 + \beta \vec{y}_2, \vec{z}) = (\alpha \vec{y}_1 + \beta \vec{y}_2, \vec{z}, \vec{x}) = \alpha(\vec{y}_1, \vec{z}, \vec{x}) + \beta(\vec{y}_2, \vec{z}, \vec{x}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}) + \beta(\vec{x}, \vec{y}_2, \vec{z}).$$

Kolmanda argumendi juhtum on analoogiline. $\square$

Tõestatud omadused võimaldavad meil tuletada veel ühe olulise vektoralgebra samasuse, mis seob omavahel kahe vektorkorrutise skalaarkorrutise nende moodustavate vektorite paarikaupa skalaarkorrutistega.

Teoreem 19 (Lagrange'i samasus). *Suvaliste vektorite $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathcal{V}^3$ korral kehtib samasus*

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \\ \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle \end{vmatrix}. \quad (5.3)$$

Tõestus. Kasutades segakorrutise definitsiooni ja tsüklilisust ning kahekordse vektorkorrutise valemit, saame:

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle &= (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \\ &= (\vec{d}, \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \\ &= \langle \vec{d}, (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \rangle = \\ &= \langle \vec{d}, \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a} \rangle = \\ &= \begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \\ \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

□

5.3 Segakorrutis koordinaatides

Siiani oleme segakorrutise mõistet kasutanud n-ö geomeetriliselt, vaadeldes selle seoseid rööptahuka ruumalaga ja vektorite komplanaarsusega. Kuid matemaatiliste operatsioonide juures on tihti mugavam ja praktilisem kasutada koordinaatsüsteemi. Järgnevas uurime, kuidas arvutada segakorrutist, kui vektorid on antud koordinaatide kaudu. Nagu selgub, annab ka segakorrutise tehe meile kompaktse ja elegantse valemi, mis seob kokku kõik kolm vektori komponenti üheks arvuks. Nagu eelmises peatükis, on ka siin oluline vektorite orientatsioon, mistõttu eeldame järgnevas, et ruumis on antud **parema käe ristreeper** $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Teoreem 20 (Segakorrutise arvutusvalem koordinaatides). *Olgu $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ parema käe ristreeper. Vektorite*

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3, \\ \vec{a}_2 &= x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + z_2 \vec{e}_3, \\ \vec{a}_3 &= x_3 \vec{e}_1 + y_3 \vec{e}_2 + z_3 \vec{e}_3 \end{aligned}$$

segakorrutis on võrdne koordinaatidest moodustatud 3. järku determinandiga

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Tõestus. Leiame esmalt baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ segakorrutise $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Selleks märgime, et eelmises peatükis tuletatud baasivektorite korrutamistabeli kohaselt kehtib parema käe ristreeperis $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$ ning järelikut

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = 1.$$

Eelnevat võrdust ning segakorrutise lineaarsust arvesse võttes saame arvutada vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ segakorrutise koordinaatides:

$$\begin{aligned} (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) &= (x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3, x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3, x_3\vec{e}_1 + y_3\vec{e}_2 + z_3\vec{e}_3) = \\ &= x_1y_2z_3(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) + y_1z_2x_3(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1) + z_1x_2y_3(\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2) + \\ &\quad z_1y_2x_3(\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1) + y_1x_2z_3(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3) + x_1z_2y_3(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2) = \\ &= (x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3)(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) + \\ &\quad (z_1y_2x_3 + y_1x_2z_3 + x_1z_2y_3)(\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1) = \\ &= (x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3)(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) - \\ &\quad (z_1y_2x_3 + y_1x_2z_3 + x_1z_2y_3)(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \\ &= (x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - z_1y_2x_3 - y_1x_2z_3 - x_1z_2y_3)(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \\ &= (x_1y_2z_3 + x_3y_1z_2 + x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2)(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

□

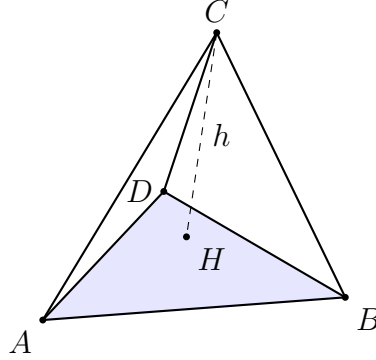
Näide 2. Olgu tetraeedri tippude koordinaadid $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 2)$, $C(5, 1, 1)$ ja $D(0, -1, 3)$. Leiame tipu C kauguse põhjast ABD , kasutades segakorrutist (vt joonis 26).

Ilmselt on otsitav kaugus võrdne tetraeedri (või vastava rööptahuka) kõrgusega tipust C rööptahuka põhjale ABD . Tähistame selle kõrguse sümboliga h . Kõrguse h saame leida valemist $h = \frac{V}{S}$, kus S on vektoritele $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AD}$ ehitatud rööpküliliku pindala. Niisiis

$$h = \frac{|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}.$$

Tippude koordinaatide järgi saame küljevektorid $\overrightarrow{AC} = (3, 0, 2)$, $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 3)$, $\overrightarrow{AD} = (-2, -2, 4)$, mille põhjal

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$



Joonis 26: Tetraeeder $ABCD$ ning tipu C kaugus h põhjast ABD . Punkt H on kõrguse jalam tasandil ABD .

Järelikult $V = |(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AC})| = |-2| = 2$. Analoogiliselt

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \right) = (2, -10, -4),$$

millest

$$|\vec{AB} \times \vec{AD}| = \sqrt{2^2 + (-10)^2 + (-4)^2} = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}.$$

Seega tipu C kaugus põhjast ABD on $h = \frac{2}{2\sqrt{30}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$.

Kahest eelnevast teoreemist järeldub vahetult teoreem, mis annab piisava ja tarviliku tingimuse kolme vektori komplanarsuse määramiseks koordinaatides.

Teoreem 21 (Vektorite komplanarsus). *Kolm vektorit $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ja $\vec{a}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ on komplanarsed parajasti siis, kui nende vektorite koordinaatidest moodustatud determinant on võrdne nulliga:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

6 Sirge võrrandid

Selles ja järgmises peatükis tegeleme sirgete ja tasandite võrranditega. Sirge või tasandi võrrandi koostamiseks kasutame vektoreid ja tehteid vektoritega, st kasutame vektorite liitmist, korrutamist arvudega, skalaarkorrutist, vektorkorrutist, segakorrutist.

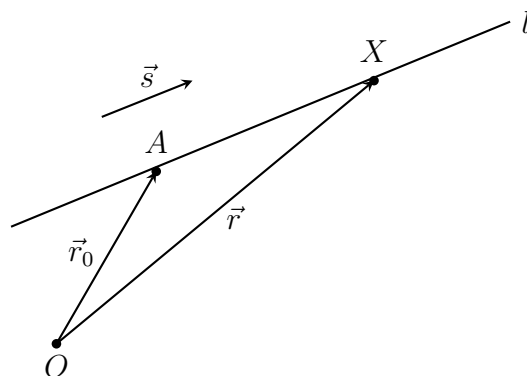
Sirge või tasandi kõige fundamentaalsem võrrand on selline, kus kasutame ainult vektoreid ja tehteid nendega, st me ei kasuta reeperit või koordinaadisüsteemi. Sellist võrrandit nimetatakse sirge või tasandi *vektorvõrrandiks*.

Kui sirge võrrandis esineb reaalarvuline parameeter (muutuv reaalarv) nii, et selle parameetri igale väärtusele vastab sirge üks ja ainult üks punkt, siis võrrandit nimetatakse *parameetriliseks võrrandiks*. Kui sirge või tasandi vektorvõrrand on koostatud ja uuritud, siis ruumi varustame **reeperiga** (koordinaadisüsteemiga) ja leiame **vektorvõrrandi kuju koordinaatides**.

Sirge on üheselt määratud järgmiste geomeetriliste andmetega:

- sirge punkt A ,
- sirge sihivektor $\vec{s} \neq \vec{0}$.

Need andmed määravad sirge üheselt. Kanname sihivektori $\vec{s}$ punktist A ning tähistame lõpp-punkti B , st $\vec{AB} = \vec{s}$; kuna $\vec{s} \neq \vec{0}$, on $B \neq A$. Hilberti aksioomide G_1 ja G_2 põhjal läbib kaht erinevat punkti A ja B parajasti üks sirge — see ongi otsitav sirge sihivektoriga $\vec{s}$.



Joonis 27: Sirge vektorvõrrandi tuletamine

Tuletame nüüd sirge vektorvõrrandi geomeetriselt, kasutades tehteid vektoritega (vt joonis 27). Olgu l sirge, A selle sirge fikseeritud punkt ning $\vec{s}$ sirgega l paralleelne vektor (sihivektor). Olgu X sirge l suvaline punkt. Tähistame punktide A ja X kohavektoreid vastavalt $\vec{r}_0 = \vec{OA}$ ning $\vec{r} = \vec{OX}$. Siis $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{AX}$. Viimase

vektori kohta teame, et $\overrightarrow{AX} \parallel \vec{s}$ ehk $\vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{s}$. Rakendame kollineaarsete vektorite tarviliku ja piisava tingimuse, saame et leidub $t \in \mathbb{R}$ selline, et $\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{s}$. Vektorit $\vec{s}$ nimetatakse sirge *sihivektoriks*. Kokkuvõttes

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}. \quad (6.1)$$

Märkus: Vastavus $t \in \mathbb{R} \leftrightarrow X \in l$ (reaalarv $\leftrightarrow$ sirge punkt) on üksühene, seega võime vaadelda parameetri t sirge l punktide koordinaatidena.

Definitsioon 16. Võrrandit (6.1) nimetatakse sirge *parameetriliseks vektorvõrrandiks*. Märgime, et sirge vektorvõrrandi kuju ei sõltu ruumi dimensioonist.

Kui ruumis on antud kaks sirget l_1, l_2 sihivektoritega vastavalt $\vec{s}_1$ ja $\vec{s}_2$, siis nende sirgete vaheliseks nurgaks nimetame nurka $\angle(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$. Nüüd on lihtne leida nurka kahe etteantud sirge vahel skalaarkorrutise abil

$$\cos \angle(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}.$$

6.1 Sirge võrrand ruumis

Olgu sirge antud järgmiste andmetega:

- sirge punkt $A(x_0, y_0, z_0)$,
- sihivektor $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$.

Kirjutame sirge parameetrilise vektorvõrrandi kolmemõõtmelise ruumi koordinaatides. Selleks fikseerime ruumi $\mathbf{E}^3$ reeperit $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ (siin me ei eelda, et $\mathcal{R}$ on ristreeper). Olgu sirge võrrandis (6.1) esinevate vektorite koordinaadid järgmised

$$\vec{r} = (x, y, z), \quad \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad \vec{s} = (s_1, s_2, s_3).$$

Nüüd on lihtne näha, et sirge parameetriline vektorvõrrand on

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(s_1, s_2, s_3) = (x_0 + s_1t, y_0 + s_2t, z_0 + s_3t)$$

ehk

$$\begin{cases} x = x_0 + s_1t \\ y = y_0 + s_2t \\ z = z_0 + s_3t \end{cases}. \quad (6.2)$$

Seda võrrandit nimetame edaspidi *sirge parameetriliseks võrrandiks koordinaatides*.

Eeldusel, et sirge sihivektori koordinaadid on nullist erinevad, st $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$ ja $s_3 \neq 0$ saame avaldada võrrandist (6.2), et

$$t = \frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3}.$$

Võrrandit

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3} \quad (6.3)$$

nimetatakse sirge *kanooniliseks võrrandiks*.

Eelnevalt oleme eeldanud, et kõik sirge sihivektori koordinaadid on nullist erinevad. On ilmne, et suvalise sirge sihivektor on nullvektorist erinev, $\vec{s} \neq \vec{0}$, st kõik tema koordinaadid ei saa korraga võrduda nulliga. Laiendame sirge kanoonilise võrrandi kasutamist ka juhule, kus sihivektori mõned koordinaadid on nullid. Näiteks, kui mõne sirge sihivektor on kujul $\vec{s} = (s_1, s_2, 0)$ ($s_1, s_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), siis kirjutusviis

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{0},$$

tähendab olukorda, kus sirge võrrand on ekvivalentne järgmise võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} \\ z = z_0 \end{cases}$$

Sarnaselt võib käsitleda ülejaanud võimalusi.

6.2 Sirge võrrand tasandil

Olgu sirge antud järgmiste andmetega:

- sirge punkt $A(x_0, y_0)$,
- sihivektor $\vec{s} = (s_1, s_2)$.

Analoogselt eelmisele alampeatükile kahemõõtmelises ruumis $\mathbf{E}^2$ (ehk tasandil) saab tuletada sirge parameetriline võrrand koordinaatides:

$$\begin{cases} x = x_0 + s_1 t \\ y = y_0 + s_2 t \end{cases}. \quad (6.4)$$

Sirge kanooniline võrrand näeb välja järgmiselt:

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2}. \quad (6.5)$$

Seda saab tuletada sarnaselt võrrandile (6.3).

Uurime sirge võrrandit tasandil lähemalt. Kui eeldame, et võrrandis (6.4) $s_1 \neq 0$, siis saame avaldada süsteemi esimesest võrrandist $t = \frac{x-x_0}{s_1}$ ning asendades teisse võrrandi saame, et

$$y - y_0 = \frac{s_2}{s_1}(x - x_0) \quad \text{või} \quad y = kx + b, \quad (6.6)$$

kus $k := \frac{s_2}{s_1}$ ja $b := y_0 - \frac{s_2 x_0}{s_1}$. Samamoodi nagu koolimatemaatikas nimetame kordajad k sirge *tõusuks*. Juhime tähelepanu, et sirge võrrand (6.6) omab mõtet ainult tasandil ning ainult eeldusel $s_1 \neq 0$ (st. see võrrand ei kata juhtu $x = x_0$).

Meenutame, et tasandiline sirge l on üheselt määratud järgmiste geomeetriliste andmetega:

- sirge punkt $A \in l$,
- sirge normaalvektor $\vec{N}$.

Tasandilise sirge *normaalvektoriks* nimetatakse vektorit $\vec{N} \neq \vec{0}$, mis on risti sirge mistahes sihivektoriga.

Fikseerime tasandi mingi punkti O . Olgu $\vec{r}_0 = \vec{OA}$ punkti A kohavektor ning $\vec{r} = \vec{OX}$, kus $X \in l$ on sirge suvaline (muutuv) punkt. Kui $\vec{N}$ on sirge l normaalvektor, siis kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{N}$. Järelikult (vt teoreem 8, 3. omadus)

$$\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N} \rangle = 0. \quad (6.7)$$

Võrrandit (6.7) nimetatakse *tasandilise sirge vektorvõrrandiks normaalvektori kaudu*.

Uurime selle võrrandi kuju koordinaatides. Esiteks, kasutades skalaarkorrutise lineaarsust saame esitada seda võrrandit kujul $\langle \vec{r}, \vec{N} \rangle + C = 0$, kus $C := -\langle \vec{r}_0, \vec{N} \rangle$. Fikseerime tasandi **ristreeper** $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, olgu selles reeperis $\vec{r} = (x, y)$ ja $\vec{N} = (A, B)$. Siis eespool kirjutatud võrrandi (6.7) kuju koordinaatides on

$$Ax + By + C = 0. \quad (6.8)$$

Võrrandit (6.8) nimetatakse tasandilise sirge *üldvõrrandiks*.

Alapeatüki lõpuks vaatleme juhtu, kui tasandiline sirge l ei ole kummagi baasivektoriga paralleelne ega läbi koordinaatide alguspunkti. Sel juhul lõikab sirge l nii abstsiss- kui ordinaattelge, kusjuures kumbki lõikepunkt ei lange kokku alguspunktiga. Olgu vastavad lõikepunktid x -teljel $P(a, 0)$ ja y -teljel $Q(0, b)$, kus $a \neq 0$ ja $b \neq 0$. Siis vektor $\vec{s} = \vec{PQ} = (-a, b)$ sobib sirge l sihivektoriks ning kasutades võrrandit (6.5) (võttes $\vec{s} = (-a, b)$ ja punkti $P(a, 0)$) leiame, et sirge l võrrand on

$$\frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Võrrandit

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (6.9)$$

nimetatakse sirge l võrrandiks telglõikudes, sest sellest saame leida sirge l lõikepunktid telgedega (nn telglõigud). Üldvõrrandi (6.8) keeles tähendavad eeltoodud eeldused, et kõik kolm kordajat on nullist erinevad, ning sel juhul $a = -\frac{C}{A}$ ja $b = -\frac{C}{B}$.

Ülejäänud tasandiliste sirgete korral telglõikude võrrandit ei ole. Neid on kahte liiki. Kui sirge on ühe baasvektoriga paralleelne, siis ta lõikab ainult teist telge ning tema võrrand on kujul

$$y = b \quad (\text{kui } l \parallel \vec{e}_1) \quad \text{või} \quad x = a \quad (\text{kui } l \parallel \vec{e}_2).$$

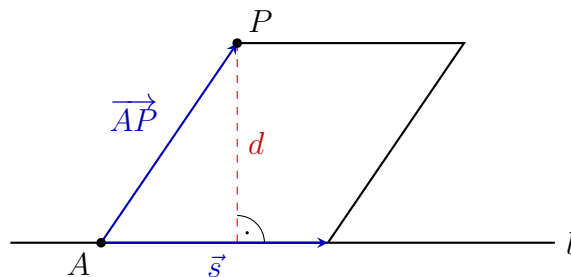
Kui aga sirge läbib koordinaatide alguspunkti, siis on mõlemad telglõigud nullid ehk $a = b = 0$, mistõttu võrrand (6.9) kaotab mõtte. Sellise sirge üldvõrrandis on vabaliige null ja võrrand on kujul $Ax + By = 0$.

6.3 Punkti kaugus sirgeni

Peatüki lõpetuseks vaatleme üht geometria ülesannet, kus on antud:

- sirge l (punkt $A \in l$ ja sihivektor $\vec{s}$),
- ruumi punkt P .

On vaja leida punkti P kaugus $d = d(P, l)$ sirgest l .



Joonis 28: Punkti P kaugus sirgest l

Lahendame ülesande vektorkujul. Olgu $\vec{s}$ sirge l sihivektor, A mingi sirge punkt. Kauguse d leidmiseks kasutame vektorkorrutise rööpküliku pindala omadust (teoreem 11; rõhutame, et vektorkorrutist saame kasutada ainult kolmemõõtmelises ruumis). Vaatleme rööpkülikut, mis on ehitatud vektoritele $\vec{s}, \vec{AP}$ (vt. joonis 28). Näeme, et kaugus d on võrdne selle rööpküliku kõrgusega

$$d = \frac{|\vec{s} \times \vec{AP}|}{|\vec{s}|}.$$

Vektori $\overrightarrow{AP}$ saab avaldada punktide A, P kohavektorite kaudu kui $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{r}_0$.

Saame, et punkti P kauguse d sirgeni l arvutusvalem vektorkujul on

$$d = \frac{|\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)|}{|\vec{s}|}. \quad (6.10)$$

Kirjutame välja seda valemit ristkoordinaatides. Olgu $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ruumi ristreeper, $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ sihivektori koordinaadid, $A(x_a, y_a, z_a)$ ja $P(x_p, y_p, z_p)$ punktide A ja P koordinaadid vastavalt. Valem (6.10) koordinaatides võtab kuju

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} s_2 & s_3 \\ y_p - y_a & z_p - z_a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} s_1 & s_3 \\ x_p - x_a & z_p - z_a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ x_p - x_a & y_p - y_a \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}. \quad (6.11)$$

Lahendame sama ülesannet tasandil. Olgu $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ tasandi ristreeper. Tahame leida punkti $P(x_p, y_p)$ kaugus sirgeni l . Olgu sirge antud üldvõrrandiga $l: Ax + By + C = 0$, ehk $\vec{N} = (A, B)$ on selle sirge normaalvektor. Olgu punkt $A(x_a, y_a)$ sirge l mingi punkt.

Selleks, et kasutada valemit (6.10) täiendame formaalselt reeperit vektoriga $\vec{e}_3$ selliselt, et $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ oleks kolmemõõtmelise ruumi $\mathbf{E}^3$ ristreeper. Uues reeperis meil on uued punktide koordinaadid $A(x_a, y_a, 0)$, $P(x_p, y_p, 0)$, seega $\vec{r} - \vec{r}_0 = (x_p - x_a, y_p - y_a, 0)$. Sirge l sihivektoriks valime vektorit $\vec{s} = (-B, A, 0)$ (veenduge, et see vektor on risti vektoriga $\vec{N} = (A, B, 0)$, mistõttu see sobib vaadeldava sirge sihivektoriks). Nüüd saame arvutada (!)

$$\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = (0, 0, -Ax_p - By_p - C).$$

Seega valemi (6.10) või (6.11) abil leiame

$$d = \frac{\sqrt{0^2 + 0^2 + (Ax_p + By_p + C)^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_p + By_p + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (6.12)$$

7 Tasandi võrrandid

Selles peatükis vaatleme kolmemõõtmelist Eukleidilist ruumi $\mathbf{E}^3$. Peatüki uurimisobjekt on tasand ning põhiline eesmärk on kirjeldada ja uurida tasandit võrrandite abil mingis fikseeritud reeperis. Tasand on üheselt määratud, kui on antud:

- tasandi punkt A ,
- kaks *mittekollineaarset* vektorit $\vec{r}_1, \vec{r}_2$.

Leidub parajasti üks selline tasand $\mathfrak{B}$, mis läbib punkti A ja on paralleelne vektoritega $\vec{r}_1, \vec{r}_2$. Vektorid $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ moodustavad tasandi *rihi*.

Põhjendame seda väidet. Rakendame vektorid $\vec{r}_1$ ja $\vec{r}_2$ punktist A ning tähistame lõpp-punktid vastavalt B ja C , st $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_1$ ja $\overrightarrow{AC} = \vec{r}_2$. Kuna $\vec{r}_1$ ja $\vec{r}_2$ on mittekollineaarsed, ei asu punktid A, B, C ühel sirgel — vastasel korral oleksid vektorid $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ kollineaarsed. Hilberti aksioomi G_4 põhjal läbib kolme mittekollineaarset punkti A, B, C tasand ning aksioomi G_5 põhjal on see tasand ühene. Aksioomi G_6 tõttu asuvad sirged AB ja AC sellel tasandil, mistõttu tasand on paralleelne vektoritega $\vec{r}_1, \vec{r}_2$. Seega punkt A koos mittekollineaarsete vektoritega $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ määrab parajasti ühe tasandi $\mathfrak{B}$.

7.1 Tasandi parameetrilised võrrandid

Tuletame tasandi $\mathfrak{B}$ parameetrilist vektorvõrrandit nende andmetega. Olgu X suvaline tasandi punkt ja $\vec{r}$ selle punkti kohavektor. Olgu $\vec{r}_0$ punkti A kohavektor. On ilmne, et vektor $\vec{r} - \vec{r}_0 = \overrightarrow{AX}$ on tasandi vektor. Seega

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = u\vec{r}_1 + v\vec{r}_2,$$

kus $u, v \in \mathbb{R}$ on üheselt määratud parameetrid. Tasandi $\mathfrak{B}$ *parameetriliseks vektorvõrrandiks* nimetatakse võrrandit

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{r}_1 + v\vec{r}_2. \quad (7.1)$$

Fikseerime ruumi mingi reeper $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Kui $A(x_0, y_0, z_0)$, $X(x, y, z)$, $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, siis tasandi parameetriline vektorvõrrand on samaväärne võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} x = x_0 + ux_1 + vx_2 \\ y = y_0 + uy_1 + vy_2 \\ z = z_0 + uz_1 + vz_2 \end{cases} \quad (7.2)$$

Võrrandisüsteemi (7.2) nimetatakse tasandi *parameetriliseks võrrandiks*. Seda võime kirjutada ka kujul

$$\vec{r}(u, v) = (x_0 + ux_1 + vx_2, y_0 + uy_1 + vy_2, z_0 + uz_1 + vz_2).$$

Tasandi parameetrilised võrrandid olid tuletatud tingimusel, et on antud tasandi $\mathfrak{B}$ punkt A ja selle rihivektorid $\vec{r}_1, \vec{r}_2$. Kolmikut $\{A; \vec{r}_1, \vec{r}_2\}$ võib vaadelda tasandi $\mathfrak{B}$ reeperina. Sel juhul parameetrid u, v on tasandi punktide koordinaadid.

7.2 Tasandi ilmutamata võrrandid

Kolmemõõtmelises ruumis $\mathbb{E}^3$ leidub parajasti üks tasand $\mathfrak{B}$, mis läbib etteantud punkti A ja mis on risti etteantud vektoriga $\vec{N}$. Vektorit $\vec{N}$ nimetatakse tasandi $\mathfrak{B}$ *normaalvektoriks*. Tuletame tasandi vektorvõrrandi, kui on antud selle tasandi mingi punkt A ja normaalvektor $\vec{N}$.

Olgu $\vec{r}$ suvalise tasandi punkti $X \in \mathfrak{B}$ kohavektor ja $\vec{r}_0$ punkti A kohavektor. Normaalvektori definitsioonist järeldub, et $\vec{r} - \vec{r}_0 = \overrightarrow{AX} \perp \vec{N}$. Järelikult

$$\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N} \rangle = 0. \quad (7.3)$$

Võrrandit (7.3) nimetatakse tasandi *vektorvõrrandiks normaalvektori kaudu*.

Paneme tähele, et kui on antud tasandi $\mathfrak{B}$ riht $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$, siis selle tasandi normaalvektoriks saab võtta rihivektorite vektorkorrutist $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$. Tõepoolest vektorkorrutis on risti nii vektoriga $\vec{r}_1$, kui ka vektoriga $\vec{r}_2$. Järelikult ta on risti tasandi mistahes vektoriga (veenduge selles võrrandi (7.1) abil). Seega tasandi suvalise punkti X korral kehtib

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0. \quad (7.4)$$

Võrrandit (7.4) nimetatakse tasandi *vektorvõrrandiks rihi kaudu*.

Fikseerime ruumi mingi ristreeper $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Olgu selles reeperis punkti A kohavektori koordinaadid $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ja tasandi normaalvektori koordinaadid $\vec{N} = (A, B, C)$. Võttes tasandi suvalise punkti X kohavektori koordinaatideks $\vec{r} = (x, y, z)$ saame tasandi vektorvõrrandist normaalvektori kaudu (7.3) järgmist võrrandit

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Leitud võrrandit saab kirjutada kujul

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (7.5)$$

kus $D := -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Võrrandit (7.5) nimetatakse tasandi *üldvõrrandiks*.

Kui ruumi kolm punkti P, Q, R ei asu ühisel sirgel, siis need punktid määravad tasandit, st leidub parajasti üks tasand, mis läbib vastavaid punkte. Leiame selle tasandi üldvõrrandi, kui on antud nende punktide ristkoordinaadid $P(x_0, y_0, z_0), Q(x_1, y_1, z_1), R(x_2, y_2, z_2)$. Tasandi üldvõrrandi koostamiseks kasutame tasandi vektorvõrrandit rihi kaudu (7.4). Kuna P, Q, R on tasandi punktid, siis vektorid $\vec{r}_1 := \overrightarrow{PQ}$ ja $\vec{r}_2 := \overrightarrow{PR}$ on paralleelsed otsitava tasandiga. Eelduse kohaselt punktid P, Q, R ei asu ühel sirgel, järelikult vektorid $\vec{r}_1$ ja $\vec{r}_2$ ei ole kollineaarsed. Seega vektorid $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$ moodustavad tasandi rihi. Tasandi alguspunktiks võtame punkti P ja selle kohavektorit tähistame $\vec{r}_0$. Suvalise tasandi punkti $X(x, y, z)$ kohavektorit tähistame tavapäraselt $\vec{r}$. On lihtne leida, et

$$\begin{aligned}\vec{r} - \vec{r}_0 &= (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \\ \vec{r}_1 &= (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0), \\ \vec{r}_2 &= (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0).\end{aligned}$$

Vektorvõrrandi (7.4) vasakpool on kolme vektori segakorrutis, mida oskame leida ristkoordinaatides kui kolmandat järku determinanti (vt teoreem (20)). Seega tasandi üldvõrrand on

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

7.3 Üleminek ühelt võrrandilt teisele

Eelnevalt oleme selgitanud, kuidas teostada üleminek tasandi parameetrisest võrrandist (7.2) üldvõrrandile. Nimelt peame leidma tasandi rihivektorite $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ koordinaadid, siis vektor $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ sobib tasandi normaalvektoriks ning võrrand (7.4) lahtikirjutatuna annab tasandi üldvõrrandi.

Nüüd näitame, kuidas teostada üleminekut tasandi $\mathfrak{B}$ üldvõrrandist (7.5) tasandi parameetrisest võrranditele. Olgu $Ax + By + Cz + D = 0$ tasandi $\mathfrak{B}$ üldvõrrand. Parameetrisest võrrandi koostamiseks peame leidma selle tasandi ühte punkti ja kaks mittekolleenaaret vektorit (tasandi riht). Tasandi punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit $Ax + By + Cz + D = 0$, seega peame leida selle lahend.

Kuna tasandi normaalvektor $\vec{N} = (A, B, C)$ on nullvektorist erinev, siis vähemalt üks selle vektori koordinaat ei võrdu nulliga. Üldisust kitsendamata eeldame, et $A \neq 0$ (kui $B \neq 0$ või $C \neq 0$ arutleme analoogselt). Olgu $A \neq 0$. Leiame tasandi punkti, mille korral $y = z = 0$. Saame tasandi võrrandis $Ax + D = 0$, kust saame avaldada, et $x = -\frac{D}{A}$. Seega punkt $P(-\frac{D}{A}, 0, 0)$ on tasandi punkt. Leiame tasandi kaks mittekolleenaarset vektorit. Tasandi $\mathfrak{B}$ mistahes vektor $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ on

risti selle normaalkvektoriga $\vec{N} = (A, B, C)$ ehk kehtib võrdus (vt teoreem 8)

$$A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0. \quad (7.6)$$

See tähelepanek on üpris kasulik tasandite uurimisel ruumis. Tegelikult just selliselt leitakse tasandi riht, kui on antud tasandi üldvõrrand. Sõnastame selle tulemuse eraldi lausena:

Lause 7. Olgu tasandi $\mathfrak{B}$ üldvõrrand $Ax + By + Cz + D = 0$. Kaks mittekolli-neaarset vektorit $\vec{r}_1 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ja $\vec{r}_2 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ moodustavad tasandi $\mathfrak{B}$ rihi parajasti siis, kui nende koordinaadid rahuldavad võrrandit (7.6), st

$$A\beta_1 + B\beta_2 + C\beta_3 = 0 \quad \text{ja} \quad A\gamma_1 + B\gamma_2 + C\gamma_3 = 0.$$

Tõestus. Olgu $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ suvaline vektor. Skalaarkorrutise arvutusvalemi põhjal ristkoordinaatides (vt teoreem 9) kehtib

$$\langle \vec{a}, \vec{N} \rangle = A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3,$$

seega rahuldavad vektori $\vec{a}$ koordinaadid võrrandit (7.6) parajasti siis, kui $\vec{a} \perp \vec{N}$ (vt teoreem 8, 3. omadus).

Näitame nüüd, et vektor on normaalkvektoriga $\vec{N}$ risti parajasti siis, kui ta on tasandiga $\mathfrak{B}$ paralleelne. Rakendame vektori $\vec{a}$ tasandi $\mathfrak{B}$ suvalisest punktist P_0 ning tähistame saadud seotud vektori lõpp-punkti X , st $\vec{a} = \overrightarrow{P_0X}$. Tasandi vektorvõrrand normaalkvektori kaudu (7.3) ütleb, et $\vec{a} \perp \vec{N}$ kehtib parajasti siis, kui punkt X asub tasandil $\mathfrak{B}$. Viimane saab nii olla siis ja ainult siis, kui vektor $\vec{a}$ on tasandiga $\mathfrak{B}$ paralleelne.

Niisiis on võrrandi (7.6) lahenditeks parajasti tasandiga $\mathfrak{B}$ paralleelsete vektorite koordinaadid. Kuna tasandi riht on definitsiooni kohaselt suvaline paar tasandiga paralleelseid mittekolli-neaarset vektoreid, on väide tõestatud mõlemas suunas. $\square$

Eeldusel $A \neq 0$ leiame, et

$$\alpha_1 = -\frac{B}{A}\alpha_2 - \frac{C}{A}\alpha_3$$

Arve α_2, α_3 võime vaadeldakui lahendi parameetrideid. Seega võttes nt $\alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0$ ja $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1$ leiame kaks tasandi $\mathfrak{B}$ mittekolli-neaarset vektorit $\vec{r}_1 = (-\frac{B}{A}, 1, 0)$ ja $\vec{r}_2 = (-\frac{C}{A}, 0, 1)$. Võttes kokku tasandi punkti $P(-\frac{D}{A}, 0, 0)$ ja kaks mittekolli-neaarset vektorit $\vec{r}_1 = (-\frac{B}{A}, 1, 0), \vec{r}_2 = (-\frac{C}{A}, 0, 1)$ on lihtne koostada selle tasandi parameetrilised võrrandid (7.2)

$$\begin{cases} x = -\frac{D}{A} - \frac{B}{A}u - \frac{C}{A}v \\ y = u \\ z = v \end{cases}.$$

Ülejäänud juthumite käsitlemist jätame lugejale harjutuseks.

7.4 Tasandite vastastikune asend. Tasandite lõikesirge

Kolmemõõtmelises Eukleidilises ruumis $\mathbf{E}^3$ suvalise kahe tasandi $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ korral on kolm võimalust: need tasandid kas lõikuvad (sel juhul saame kätte tasandite lõikesirge) või on paralleelsed ($\mathfrak{B}_1 \parallel \mathfrak{B}_2$) või ühtivad ($\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$). Kusjuures olukorda, kui kaks tasandit ühtivat, saab teatud mõttes vaadelda tasandite paralleelsuse erijuhuna (st võib öelda, et iga tasand on paralleelne iseendaga). Järgmine teoreem annab tarvilikku ja piisava tingimuse sellele, et kaks tasandit oleksid paralleelsed.

Teoreem 22. *Olgu antud kaks tasandit*

$$\mathfrak{B}_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \text{ja} \quad \mathfrak{B}_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Need tasandid on paralleelsed ($\mathfrak{B}_1 \parallel \mathfrak{B}_2$) parajasti siis, kui leidub selline reaalarv λ , et

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1. \quad (7.7)$$

Need tasandid ühtivad parajasti siis, kui lisaks võrdustele (7.7) kehtib võrdus $D_2 = \lambda D_1$.

Tõestus. Tarvilikkus: Olgu tasandid $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ paralleelsed. Siis nende tasandite normaalvektorid on kollineaarsed, $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$. Seega leidub selline reaalarv λ , et $\vec{N}_2 = \lambda \vec{N}_1$. Siit järelduvad võrdused (7.7).

Olgu tasandid $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ ühtivad. Siis need tasandid on ilmselt paralleelsed ja tänu eelmisele tulemusele teise tasandi $\mathfrak{B}_2$ võrrand on kujul $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z) + D_2 = 0$. Olgu $P \in \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$ nende ühtivate tasandite punkt koordinaatidega $P(x_0, y_0, z_0)$, ehk kehtivad võrdused

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0, \quad \lambda(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0) + D_2 = 0.$$

Nendest võrdustest järeldub, et $\lambda(-D_1) + D_2$ ehk $D_2 = \lambda D_1$.

Piisavus: Kehtigu võrdused (7.7) (praegu me ei eelda, et $D_2 = \lambda D_1$). Eespool tõestatud lausest (7) järeldub, et tasandite rihivektorid rahuldavad võrrandit

$$A_2\alpha_1 + B_2\alpha_2 + C_2\alpha_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda(A_1\alpha_1 + B_1\alpha_2 + C_1\alpha_3) = 0 \Leftrightarrow A_1\alpha_1 + B_1\alpha_2 + C_1\alpha_3 = 0$$

Seega kui on leitud ühe tasandi rihivektorid, siis nad on ka teise tasandi rihivektorid. Seega tasandid on paralleelsed.

Kehtigu võrdused (7.7) ja $D_2 = \lambda D_1$ mingi reaalarvu λ korral. Siis suvalise ruumi punkti $P(x_0, y_0, z_0)$ korral

$$\begin{aligned} A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0 &\Leftrightarrow \lambda A_1x_0 + \lambda B_1y_0 + \lambda C_1z_0 + \lambda D_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0 \end{aligned}$$

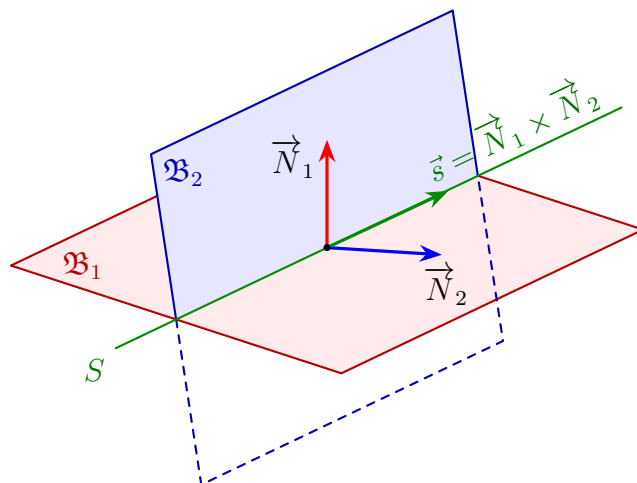
ehk P on tasandi $\mathfrak{B}_2$ punkt parajasti siis, kui P on tasandi $\mathfrak{B}_1$ punkt. Järelikult need tasandid ühtivad. $\square$

Tasandite $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ paralleelsuse tingimuse (7.7) võime kirjutada nende normaalvektorite $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ abil kujul $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \vec{0}$. Arvutades koordinaatides leiame, et kaks tasandit on paralleelsed parajasti siis, kui

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

Kui tasandid ei ole paralleelsed (ega ühti), siis nad lõikuvad ja kahe tasandi lõikejoon on sirge. Kui lõikuvate tasandite võrrandid on $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ja $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, siis nende lõikesirge punktid peavad rahuldama võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (7.8)$$



Joonis 29: Kahe tasandi $\mathfrak{B}_1$ ja $\mathfrak{B}_2$ lõikesirge S . Lõikesirge sihivektoriks sobib tasandite normaalvektorite vektorkorrutis $\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$.

Võrrandisüsteemi (7.8) nimetatakse *kahe tasandi lõikesirge võrrandiks*. Kui soovime esitada selle sirge võrrandit kanoonilisel kujul, siis meil on vaja leida selle sirge mingi punkt P ja sihivektor $\vec{s}$. Esiteks leiame sirge sihivektori. Tuletame meelde, et vektorid $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ja $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ on fikseeritud tasandite normaalvektorid, st *kõik* esimese tasandi vektorid on risti vektoriga $\vec{N}_1$ ja *kõik* teise tasandi vektorid on risti vektoriga $\vec{N}_2$. Lõikesirge sihivektor $\vec{s}$ osutub vektoriks, mis asub nii esimesel kui teisel tasandil, järelikult $\vec{s} \perp \vec{N}_1$ ja $\vec{s} \perp \vec{N}_2$. Siit järeldub, et normaalvektorite vektorkorrutis $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ on kollineaarne lõikesirge suvalise

sihivektoriga $\vec{s}$. Seega vektor $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ ise sobib sobib lõikesirge sihivektoriks. Sõnastame selle tulemuse eraldi lausena:

Lause 8. *Olgu sirge kahe tasandi lõikesirge, st selle punktide koordinaadid rahuldavad võrrandisüsteemi*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Vektor

$$\vec{s} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

on lõikesirge sihivektor.

Tõestus. Selle lause tõestuse idee on kirjeldatud eespool. Arvutused ja muud detailid jätame lugejale harjutuseks. $\square$

Nüüd leiame lõikesirge (7.8) mingi punkti. Sisuliselt peame leidma võrrandisüsteemi (7.8) mingi lahendit, milleks on mitu erinevat viisi. Anname ühe võimaliku eeskirja selle punkti leidmiseks. Eelduse kohaselt tasandid ei ole paralleelselt, seega kehtib

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^2 \neq 0$$

ehk vähemalt üks nendest teist järku determinantidest ei võrdu nulliga. Eeldame, et

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

ülejäänud juhtumid võib käsitleda analoogselt. Antud juhul fikseerime võrrandisüsteemis (7.8) muutuja z mingi väärtuse, nt $z = 0$. Siis võrrandisüsteem lihtsustub kujule

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1, \\ A_2x + B_2y = -D_2, \end{cases}$$

kusjuures lisaeelduse kohaselt selle süsteemi peadeterminant on nullist erinev. Järelikult sellel süsteemil leidub lahend ja see on ühene. Olgu selle süsteemi lahend x_0, y_0 , siis punkt $P(x_0, y_0, 0)$ on sirge (7.8) punkt. Teades lõikesirge sihivektorit $\vec{s}$ ja punkti P saame koostada selle sirge kanoonilist võrrandit.

7.5 Punkti kaugus tasandini

Olgu antud tasandi $\mathfrak{B}$ vektorvõrrand $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$ ja ruumi mingi punkt $M \notin \mathfrak{B}$ kohavektoriga $\vec{R}$. Leiame punkti M kauguse $d := d(M, \mathfrak{B})$ tasandini $\mathfrak{B}$. Selleks moodustame vektoritele $\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ ehitatud rööptahuka. Selle rööptahuka põhi on vektoritele $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ ehitatud rööpkülik. Kaugus d on võrdne rööptahuka kõrgusega. Kõrguse leidmiseks kasutame valemit

$$d = \frac{V}{S},$$

kus V on vaadeldava rööptahuka ruumala ja S on selle põhja (rööpküliku) pindala. Rööptahuka ruumala V on võrdne vektorite $\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ segakorrutise absoluutväärtusega (vt teoreem (17)) ja rööpküliku pindala S on võrdne vektorite $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ vektorkorrutise pikkusega (vt teoreem (11)). Seega

$$d = \frac{|(\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2)|}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}. \quad (7.9)$$

Eelnevas oleme näinud, et vektorkorrutis $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ on tasandi normaalvektor, tähistame $\vec{N} := \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$. Kasutades normaalvektorit saame valemit (7.9) kirjutada kujul

$$d = \frac{|\langle \vec{R} - \vec{r}_0, \vec{N} \rangle|}{|\vec{N}|} \quad (7.10)$$

Fikseerime ruumi ristreeperit $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Olgu selles reeperis normaalvektori koordinaadid $\vec{N} = (A, B, C)$ ja punkti M koordinaadid $M(x_1, y_1, z_1)$, st $\vec{R} = (x_1, y_1, z_1)$. Leiame skalaarkorrutise omaduste abil

$$\langle \vec{R} - \vec{r}_0, \vec{N} \rangle = \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle - \langle \vec{r}_0, \vec{N} \rangle = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D,$$

kus $D = -\langle \vec{r}_0, \vec{N} \rangle$. Seega kauguse arvutusvalem on

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (7.11)$$

Juhime lugeja tähelepanu sellele, et antud juhul võrrand $Ax + By + Cz + D = 0$ on tasandi $\mathfrak{B}$ üldvõrrand.

8 Koordinaatide ja ruumi teisendused

Eukleidilise geomeetria oluliseks aspektiks on ruumi teisenduse mõiste. Tuletame meelde, et mingi hulga teisenduseks nimetatakse selle kujutust iseendasse, s.t reeglit, mis seab hulga igale elemendile üheselt vastavusse sama hulga elemendi. Käesolevas peatükis vaatleme Eukleidilise ruumi $\mathcal{E}^n$ ja sellega assotsieeritud vektorruumi $\mathcal{V}^n$ teisendusi.

Kõigepealt vaatleme vektorruumi $\mathcal{V}^n$ teisendusi. Olgu $\xi : \mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{V}^n$ vektorruumi teisendus. Teisendust ξ nimetatakse *lineaarteisenduseks*, kui sellel on lineaarsuse omadus, s.t suvaliste vektorite $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}^n$ ja suvaliste arvude $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ korral kehtib

$$\xi(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \alpha \xi(\vec{a}) + \beta \xi(\vec{b}).$$

Edaspidi vaatleme ainult lineaarteisendusi, mistõttu jätame sõna „lineaarne“ sageli ära ja räägime teisendusest, pidades silmas lineaarteisendust.

Lineaarteisenduse oluliseks karakteristikuks on selle maatriks. Olgu $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ vektorruumi $\mathcal{V}^n$ baas ja $\xi : \mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{V}^n$ lineaarteisendus. Defineerime teisenduse ξ maatriksi $A = (\alpha_{ji})$ baasis $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ valemiga

$$\xi(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} \vec{e}_j. \quad (8.1)$$

Seega, valides vektorruumis $\mathcal{V}^n$ baasi, saame igale vektorruumi lineaarteisendusele vastavusse seada n -järku ruutmaatriksi. Seda maatriksit võib vaadelda lineaarteisenduse esitusena vektorruumi baasiga määratud koordinaadisüsteemis.

Olgu $\vec{a}$ vektor, mille koordinaadid baasis $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ on $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, s.t

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i.$$

Leiame, kuidas vektori $\xi(\vec{a}) = \sum_{j=1}^n \tilde{x}_j \vec{e}_j$ koordinaadid avalduvad vektori $\vec{a}$ koordinaatide kaudu. Saame

$$\xi(\vec{a}) = \xi\left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \xi(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ji} \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} x_i \vec{e}_j.$$

Seega

$$\tilde{x}_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} x_i.$$

Vektorruumi lineaarteisendused säilitavad selle lineaarse struktuuri. Meie vaatleme aga Eukleidilist ruumi, mis tähendab täiendava struktuuri, nimelt skalaarkorrutise olemasolu. Ruumi Eukleidilist struktuuri säilitavad teisendused mängivad geomeetrias olulist rolli.

Definitsioon 17. Vektorruumi ortogonaalseks teisenduseks $\xi : \mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{V}^n$ nimetatakse lineaarteisendust, millel on omadus

$$\langle \xi(\vec{a}), \xi(\vec{b}) \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle,$$

kus $\vec{a}, \vec{b}$ on ruumi $\mathcal{V}^n$ suvalised vektorid.

Vaatleme suvalist baasi $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ ja seame sellele vastavusse n -järku maatriksi, mis sisaldab kogu informatsiooni ruumi Eukleidilise struktuuri kohta. Võtame kasutusele tähistuse $\sigma_{ij} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$ ja moodustame n -järku ruutmaatriksi $S = (\sigma_{ij})$. See maatriks on baasivektorite skalaarkorrutiste maatriks ja seda nimetatakse *Grami maatriksiks*. Oluline on märkida, et iga ortonormeeritud baasi Grami maatriks on ühikmaatriks I .

Teoreem 23. (*Grami maatriksi teisendus*) Olgu $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ vektorruumi $\mathcal{V}^n$ baas, ξ ruumi $\mathcal{V}^n$ ortogonaalne teisendus ning $A = (\alpha_{ij})$ ortogonaalse teisenduse ξ maatriks baasis $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$. Siis kehtib võrdus

$$S = A^T S A. \quad (8.2)$$

Tõestus. Skalaarkorrutise lineaarsuse tõttu saame

$$\langle \xi(\vec{e}_i), \xi(\vec{e}_j) \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \vec{e}_k, \sum_{l=1}^n \alpha_{lj} \vec{e}_l \right\rangle = \sum_{k,l=1}^n \alpha_{ki} \langle \vec{e}_k, \vec{e}_l \rangle \alpha_{lj} = \sum_{k,l=1}^n \alpha_{ki} \sigma_{kl} \alpha_{lj}.$$

Teisenduse ortogonaalsuse tõttu kehtib võrdus

$$\langle \xi(\vec{e}_i), \xi(\vec{e}_j) \rangle = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle.$$

Järelikult

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^n \alpha_{ki} \sigma_{kl} \alpha_{lj}.$$

Olgu $\tilde{\alpha}_{ij}$ transponeeritud maatriksi A^T elemendid, siis $\tilde{\alpha}_{ij} = \alpha_{ji}$. Järelikult võime eespool saadud valemi transponeeritud maatriksi elementide abil kirjutada kujul

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^n \tilde{\alpha}_{ik} \sigma_{kl} \alpha_{lj}.$$

ehk maatrikskujul

$$S = A^T S A. \quad (8.3)$$

□

Definitsioon 18. Ortogonaalse teisenduse maatriksit ortonormeeritud baasis nimetatakse *ortogonaalseks maatriksiks*. n -järku ortogonaalsete maatriksite hulka tähistatakse O_n .

Võrrandist (8.2) järeldub, et ortogonaalne maatriks rahuldab tingimust

$$A^T A = I. \quad (8.4)$$

Seega

$$O_n = \{A \in \text{Mat}_n : A^T A = I\}.$$

Lause 9. *Ortogonaalse maatriksi determinant on kas 1 või -1.*

Tõestus. Tõestus põhineb determinandi kahel omadusel, mida tõestatakse maatriksarvutuses.

- Kahe n -järku maatriksi korrutise determinant võrdub nende maatriksite determinantide korrutisega $|A B| = |A| |B|$.
- Maatriksi transposeerimine ei muuda selle determinanti $|A^T| = |A|$.

Neid omadusi rakendades saame ortogonaalsuse tingimuse (8.2) vasaku poole determinandi teisendada kujule

$$|A^T A| = |A^T| |A| = |A|^2.$$

Paremal pool on ühikmaatriks ja selle determinant on 1. Järelikult

$$|A|^2 = 1,$$

millest järeldub lause väide. □

n -järku ortogonaalsete maatriksite hulka, mille determinant on 1, tähistame SO_n . Seega

$$SO_n = \{A \in GL_n : A^T A = I, |A| = 1\}.$$

Vaatleme ortogonaalse maatriksi $A = (\alpha_{ij})$ struktuuri, kus A on üleminekumaatriks ortonormeeritud baasilt $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ ortonormeeritud baasile $\{\vec{e}'_i\}_{i=1}^n$. Tuletame meelde, et baasivektori $\vec{e}'_i$ koordinaadid $(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{ni})$ baasis $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ moodustavad maatriksi A i -nda veeru. Kuna baasivektor $\vec{e}'_i$ on ühikvektor, siis tema pikkus ja pikkuse ruut on võrdsed ühega. Ortonormeeritud baasis arvutatakse vektori pikkuse ruut tema koordinaatide ruutude summana. Järelikult iga $i = 1, 2, \dots, n$ korral

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ji}^2 = 1. \quad (8.5)$$

Lisaks on kaks baasivektorit $\vec{e}'_i$ ja $\vec{e}'_j$, kus $i \neq j$, ortogonaalsed. Seega on nende skalaarkorrutis 0. Kahe vektori skalaarkorrutis ortonormeeritud baasis võrdub nende samanimeliste koordinaatide korrutiste summaga, s.t esimeste, teiste jne koordinaatide korrutiste summaga. Järelikult iga indeksipaari $i \neq j$ korral

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \alpha_{kj} = 0. \quad (8.6)$$

Ei ole raske veenduda, et tingimused (8.5), (8.6) on samaväärsed maatriksi ortogonaalsuse tingimusega (8.2).

8.1 Üleminek ühelt reeperilt teisele

Ruumi teisendusi saab kasutada üleminekuks ühelt baasilt teisele või ühelt reeperilt teisele. Teisisõnu võime ruumi teisendusi kasutada uue koordinaadisüsteemi konstrueerimiseks. Olgu antud baas $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ ja lineaarteisendus $\xi : \mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{V}^n$. Vaatleme vektorite peret $\{\xi(\vec{e}_1), \xi(\vec{e}_2), \dots, \xi(\vec{e}_n)\}$. Vektorruumi lineaarteisendust ξ nimetatakse *regulaarteisenduseks*, kui see teisendab vektorruumi baasi sama ruumi baasiks. Järelikult säilitab regulaarne lineaarteisendus vektorite lineaarse sõltumatuse. Edaspidi eeldame alati, et vaadeldavad lineaarteisendused on regulaarsed. Märgime, et vektorruumi regulaarset lineaarteisendust nimetatakse ka automorfismiks. Saab tõestada, et lineaarteisendus on regulaarne parajasti siis, kui tema maatriksi determinant suvalises baasis erineb nullist.

Olgu $A = (\alpha_{ij})$ teisenduse ξ maatriks baasis $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$. Tähistame $\vec{e}'_i = \xi(\vec{e}_i)$. Vektorite pere $\{\vec{e}'_i\}_{i=1}^n$ on vektorruumi $\mathcal{V}^n$ baas. Teisenduse maatriksi definitsiooni järgi

$$\vec{e}'_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \vec{e}_i. \quad (8.7)$$

Seega näitab lineaarteisenduse maatriks, kuidas teisenduse ξ abil saadud baasi $\{\vec{e}'_i\}_{i=1}^n$ vektorid avalduvad lähtebaasi $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ vektorite kaudu. Sel juhul nimetatakse maatriksit A *üleminekumaatriksiks* ühelt baasilt teisele. Ei ole raske veenduda, et kui ξ on ortogonaalne teisendus, siis teisendab ξ ortonormeeritud baasi ortonormeeritud baasiks.

Vaatleme nüüd vektori koordinaatide teisendamist ühe baasi asendamisel teisega. See tähendab, et meil on kaks baasi $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ ja $\{\vec{e}'_i\}_{i=1}^n$ ning üleminekut ühelt baasilt teisele kirjeldab valem (8.7). Lisaks on antud mingi vektor $\vec{a}$, mille koordinaadid baasis $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ on $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ja baasis $\{\vec{e}'_i\}_{i=1}^n$ on $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. Kehtib

$$\vec{a} = \sum_{j=1}^n x'_j \vec{e}'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x'_j \right) \vec{e}_i.$$

Järelikult

$$\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x'_j \right) \vec{e}_i.$$

Sellest vektorvõrdusest järeldub vastavate koordinaatide võrdsus

$$x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x'_j. \quad (8.8)$$

See ongi vektori koordinaatide teisendusvalem üleminekul ühelt baasilt teisele.

Kirjutame välja saadud Eukleidilise ruumi koordinaatide teisenduse valemi tasandi ja kolmemõõtmelise ruumi jaoks. Esitame need valemid koos ühelt baasilt teisele ülemineku valemitega, et lugeja mõistaks, et üleminek teisele baasile toob kaasa vektori koordinaatide teisenduse. Tasandi korral saame

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \alpha_{11} \vec{e}_1 + \alpha_{21} \vec{e}_2, & x_1 &= \alpha_{11} x'_1 + \alpha_{12} x'_2 \\ \vec{e}'_2 &= \alpha_{12} \vec{e}_1 + \alpha_{22} \vec{e}_2, & x_2 &= \alpha_{21} x'_1 + \alpha_{22} x'_2, \end{aligned} \quad (8.9)$$

kus x_1, x_2 on vektori koordinaadid baasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, aga x'_1, x'_2 on sama vektori koordinaadid baasis $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$. Kolmemõõtmelises ruumis on vastavad valemid kujul

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \alpha_{11} \vec{e}_1 + \alpha_{21} \vec{e}_2 + \alpha_{31} \vec{e}_3, & x_1 &= \alpha_{11} x'_1 + \alpha_{12} x'_2 + \alpha_{13} x'_3 \\ \vec{e}'_2 &= \alpha_{12} \vec{e}_1 + \alpha_{22} \vec{e}_2 + \alpha_{32} \vec{e}_3, & x_2 &= \alpha_{21} x'_1 + \alpha_{22} x'_2 + \alpha_{23} x'_3, \\ \vec{e}'_3 &= \alpha_{13} \vec{e}_1 + \alpha_{23} \vec{e}_2 + \alpha_{33} \vec{e}_3, & x_3 &= \alpha_{31} x'_1 + \alpha_{32} x'_2 + \alpha_{33} x'_3. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Läheme nüüd üle ühelt reeperilt teisele ülemineku küsimuse juurde. Reeper koosneb kahest osast: baasist $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ ja alguspunktist O . Oleme juba uurinud, kuidas baas teiseneb, ning teame, et kogu informatsioon baasi teisenduse kohta sisaldub üleminekumaatriksis A . Olgu $\{\vec{e}'_i\}_{i=1}^n$ vektorruumi baas, mis on saadud baasist $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ üleminekumaatriksi A abil. Vaatleme baasi $\{\vec{e}'_i\}_{i=1}^n$ uue reeperi baasina. Olgu O' uue reeperi alguspunkt ja

$$\overrightarrow{OO'} = \sum_{i=1}^n c_i \vec{e}_i.$$

Olgu P Eukleidilise ruumi punkt, mille koordinaadid reeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ on $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ning reeperis $\{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}$ on $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. Siis avalduvad ühed koordinaadid teiste kaudu järgmiselt

$$x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x'_j + c_i. \quad (8.11)$$

Ühelt reeperilt teisele ülemineku erijuhuks on lähtereeperi alguspunkti O nihutamine teise punkti O' , kusjuures baasivektorid ei muutu. Sel juhul on ülemineku-maatriks ühikmaatriks $A = I$ ja Eukleidilise ruumi punkti koordinaatide teisendusvalemid on kujul

$$x_i = x'_i + c_i.$$

Kirjutame saadud Eukleidilise ruumi punkti koordinaatide teisendusvalemi (8.11) välja tasandi ja kolmemõõtmelise ruumi jaoks. Esitame need valemid koos ühelt baasilt teisele ülemineku valemitega, et lugeja mõistaks, et üleminek teisele baasile toob kaasa punkti koordinaatide teisenduse. Tasandi korral saame

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2, & x_1 &= \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + c_1 \\ \vec{e}'_2 &= \alpha_{12}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2, & x_2 &= \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + c_2, \end{aligned} \quad (8.12)$$

kus x_1, x_2 on punkti koordinaadid reeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, aga x'_1, x'_2 on sama punkti koordinaadid reeperis $\{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$. Kolmemõõtmelises ruumis on vastavad valemid kujul

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2 + \alpha_{31}\vec{e}_3, & x_1 &= \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + \alpha_{13}x'_3 + c_1 \\ \vec{e}'_2 &= \alpha_{12}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \alpha_{32}\vec{e}_3, & x_2 &= \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \alpha_{23}x'_3 + c_2, \\ \vec{e}'_3 &= \alpha_{13}\vec{e}_1 + \alpha_{23}\vec{e}_2 + \alpha_{33}\vec{e}_3, & x_3 &= \alpha_{31}x'_1 + \alpha_{32}x'_2 + \alpha_{33}x'_3 + c_3. \end{aligned} \quad (8.13)$$

8.2 Valemite maatrikskuju

Ühelt ruumi baasilt teisele ülemineku valemite ja koordinaatide teisendusvalemitega töötamisel on mugav kasutada maatriksarvutust. Seda nägime juba eelmises paragrahvis, kus võtsime kasutusele ühelt baasilt teisele ülemineku maatriksi (??). Kõigi n -järku ruutmaatriksite hulka tähistame sümboliga Mat_n ja kasutame varem kasutusele võetud kompaktselt kirjaviisi $A = (\alpha_{ij})$, kus indeksid i, j võtavad täisarvulisi väärtusi 1-st kuni n -ni. Ühikmaatriksit tähistame sümboliga I . Kui $A = (\alpha_{ij})$ on n -järku maatriks, siis tema transposeeritud maatriksit tähistame $A^T = (\tilde{\alpha}_{ij})$, kus $\tilde{\alpha}_{ij} = \alpha_{ji}$. Tuletame meelde, et maatrikseid saab liita ja korrutada reaalarvudega. Olgu $A = (\alpha_{ij}), B = (\beta_{ij})$ kaks n -järku ruutmaatriksit, s.t $A, B \in \text{Mat}_n$. Maatriksite liitmine ja reaalarvuga korrutamine määratakse valemitega

$$A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij}), \quad \lambda A = (\lambda \alpha_{ij}), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Veel üks oluline tehe maatriksitega on nende korrutamine. Olgu antud ülemineku-maatriks $A = (\alpha_{ij})$ baasilt $\{\vec{e}_i\}$ baasile $\{\vec{e}'_i\}$. Eelmise paragrahvi lõpus saadi vektori koordinaatide teisendusvalem (8.8). Kirjutame koordinaatide $x_1, x_2, \dots, x_n$ avaldamise koordinaatide $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ kaudu maatriksi A abil sümboolselt kujul

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{A} (x'_1, x'_2, \dots, x'_n),$$

kus nool tähendab, et koordinaadid $x_1, x_2, \dots, x_n$ avalduvad koordinaatide $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ kaudu maatriksi A abil valemi (8.8) järgi. Olgu nüüd antud veel üks ülemineku-maatriks $B = (\beta_{ij})$ baasilt $\{\vec{e}'_i\}$ baasile $\{\vec{e}''_i\}$. Kui tähistada vektori koordinaadid baasis $\{\vec{e}''_i\}$ sümbolitega $x''_1, x''_2, \dots, x''_n$, siis saame veel ühe koordinaatide teisen-duse

$$(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \xrightarrow{B} (x''_1, x''_2, \dots, x''_n),$$

kus

$$x'_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x''_j. \quad (8.14)$$

Seega on meil järjestikused koordinaatide teisendused

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{A} (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \xrightarrow{B} (x''_1, x''_2, \dots, x''_n).$$

Tekib loomulik küsimus: kuidas avalduvad koordinaadid $x_1, x_2, \dots, x_n$ koordinaa-tide $x''_1, x''_2, \dots, x''_n$ kaudu? Sellele küsimusele vastamiseks asendame valemis (8.8) koordinaadid x'_i valemi (8.14) parema poolega. Saame

$$x_i = \sum_{j=1}^n (\alpha_{ij} \sum_{k=1}^n \beta_{jk} x''_k) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk} \right) x''_k. \quad (8.15)$$

Saadud valemist järeldub, et koordinaadid $x_1, x_2, \dots, x_n$ avalduvad koordinaatide $x''_1, x''_2, \dots, x''_n$ kaudu n -järku ruutmaatriksi abil, mille i -nda rea ja k -nda veeru lõikepunktis olev element on

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk}.$$

Tähistame selle maatriksi ja tema elemendid kujul $C = (\gamma_{ik})$. Siis

$$\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk}. \quad (8.16)$$

Maatriksit $C = (\gamma_{ik})$, mille elemendid avalduvad maatriksite $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{jk})$ elementide kaudu valemi (8.16) järgi, nimetatakse maatriksite A, B *korrutiseks* ja seda kirjutatakse kujul $C = AB$. Maatriksite korrutamise valemit (8.16) saab laiendada ristkülikmaatriksitele (ridade arv ei võrdu veergude arvuga), kui esimese maatriksi A veergude arv võrdub teise maatriksi B ridade arvuga. Ei ole raske veenduda, et maatriks C on üleminekumaatriks baasilt $\{\vec{e}'_i\}$ baasile $\{\vec{e}''_i\}$, s.t

$$\vec{e}''_i = \sum_{k=1}^n \gamma_{ki} \vec{e}_k.$$

Jätame selle lugejale iseseisvaks harjutuseks.

Nüüd kirjutame ühelt baasilt teisele ülemineku valemid ja koordinaatide teisendusvalemid maatrikskujul. Sellisel kirjaviisil on mitu eelist. Esiteks muutuvad valemid kompaktsemaks. Teiseks on paljusid arvutusi maatrikskujul lihtsam teha. Moodustame kaks maatriksit: baasivektoritest reamaatriksi ja vektori koordinaatidest veerumaatriksi

$$e = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \cdots \quad \vec{e}_n), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (8.17)$$

Siis saab vektori $\vec{a}$, mille koordinaadid baasis $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ on $x_1, x_2, \dots, x_n$, baasilt $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ baasile $\{\vec{e}'_i\}_{i=1}^n$ ülemineku valemi (??) üleminekumaatriksi A abil ning koordinaatide teisendusvalemi (??) kirjutada maatrikskujul järgmiselt

$$\vec{a} = e x, \quad e' = e A, \quad x = A x',$$

kus e' on baasivektoritest $\vec{e}'_i$ moodustatud reamaatriks ja x' on vektori $\vec{a}$ koordinaatidest x'_i baasis $\{\vec{e}'_i\}_{i=1}^n$ moodustatud veerumaatriks.

Saadud maatriksvalemitega saab teha algebralisi teisendusi, avaldades ühed maatriksuurused teiste kaudu. Seejuures tuleb arvestada, et maatriksite korrutamine on assotsiatiivne, kuid üldjuhul mitte kommutatiivne, s.t. $AB \neq BA$, kus A, B on kaks maatriksit. Seetõttu tuleb maatriksvõrduse mõlema poole korrutamisel mingi maatriksiga näidata, kummalt poolt me võrdust selle maatriksiga korrutame, paremalt või vasakult. Ühtede maatriksite avaldamiseks teiste kaudu vajame pöördmaatriksit. Olgu $A = (\alpha_{ij}) \in GL_n$, s.t. maatriks A on n -järku regulaarne maatriks. Siis tähistatakse tema pöördmaatriksit A^{-1} ja see leitakse tingimusest $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, kus I on n -järku ühikmaatriks. Maatriksarvutuses näidatakse, et pöördmaatriks on n -järku ruutmaatriks ja selle elemendid on kujul

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (8.18)$$

kus $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ja M_{ij} on maatriksist A i -nda rea ja j -nda veeru eemaldamisel saadud alammaatriksi determinant, kusjuures eemaldatud rea ja veeru lõikepunktis asub element α_{ij} . Tuletame meelde, et maatriksarvutuses nimetatakse A_{ij} elemendi α_{ij} algebraliseks täiendiks ning M_{ij} elemendi α_{ij} täiendusmiinoriks.

Nüüd saame avaldada reamaatriksi e reamaatriksi e' kaudu. Korrutades võrduse $e' = e A$ mõlemad pooled paremalt pöördmaatriksiga A^{-1} , saame

$$e' A A^{-1} = e A^{-1} \Rightarrow e' I = e A^{-1} \Rightarrow e' = e A^{-1}.$$

Oleme korduvalt rõhutanud, et vektor on geomeetiline objekt, mis ei sõltu baasi, s.t ruumi koordinaadisüsteemi valikust. Teisisõnu on vektor ühelt baasilt teisele üleminekul invariantne ehk baasi vahetuse suhtes invariantne. Nüüd saame seda näidata algebraliselt. Olgu antud vektor $\vec{a}$, mille koordinaadid baasis $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ on $x_1, x_2, \dots, x_n$. Siis võime maatrikskujul kirjutada $\vec{a} = e x$. Näitame, et avaldis

$$e x = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n \quad (8.19)$$

on baasi vahetuse suhtes invariantne. Selle all mõtleme, et teises baasis $\{\vec{e}'_i\}_{i=1}^n$ on vektoril teised koordinaadid x'_i , kuid avaldis

$$e' x' = x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2 + \dots + x'_n \vec{e}'_n$$

on võrdne avaldisega (8.19), s.t avaldis (8.19) ei muutu. Olgu baas $\{\vec{e}'_i\}_{i=1}^n$ saadud baasist $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ üleminekumaatriksi A abil. Siis $e = e' A^{-1}$, $x = A x'$. Asendame need valemid avaldisse (8.19). Saame

$$e x = e' A^{-1} A x' = e' I x' = e' x'.$$

Sellega on avaldise (8.19) invariantsus tõestatud.

8.3 Tasandi teisendused

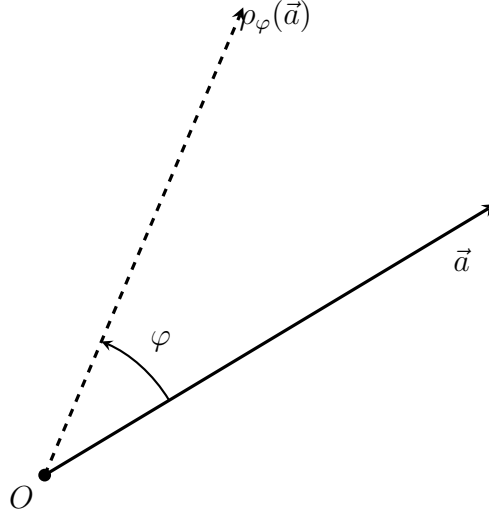
Vaatleme tasandi vektorite teisenduste olulisi tüüpe. Olgu O tasandi mingi punkt ja $\vec{a}$ tasandi suvaline vektor, s.t $\vec{a} \in \mathcal{V}^2$. Eeldame, et tasandil on valitud orientatsioon „vastupäeva“. Defineerime tasandi vektorite teisenduse $\rho_\varphi : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$ geomeetriselt järgmiselt: rakendame vektori $\vec{a}$ punkti O , seejärel pöörame saadud seotud vektorit punkti O ümber positiivses suunas (vastupäeva) nurga $\varphi \in [0, 2\pi]$ võrra ning moodustame vabavektori, mida tähistame $\rho_\varphi(\vec{a})$. Seega saame tasandi vektorite teisenduse $\rho_\varphi : \vec{a} \in \mathcal{V}^2 \mapsto \rho_\varphi(\vec{a}) \in \mathcal{V}^2$, mida nimetatakse *pöördeks* nurga φ võrra. Pöördel on järgmised omadused:

R_1 . Vektorruumi $\mathcal{V}^2$ teisendus, mida nimetatakse pöördeks nurga φ võrra, ei sõltu punkti O valikust.

R_2 . $\rho_0 = \rho_{2\pi} = \text{Id}$.

R_3 . Pööre nurga φ võrra on vektorruumi $\mathcal{V}^2$ ortogonaalne teisendus.

Definitsioon 19. Täisnurkset pööret $\rho_{\pi/2}$ nimetatakse tasandi *kompleksstruktuuriks* ja tähistatakse $J = \rho_{\pi/2}$.



Ei ole raske veenduda, et $J^2 = -\text{Id}$, ning siin näeme analoogiat imaginaarühikuga i , millel on omadus $i^2 = -1$. Olgu tasandil antud positiivselt orienteeritud ortonormeeritud baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ja vektor $\vec{a}$, mille koordinaadid baasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on (x_1, x_2) . Siis $J(\vec{a}) = (-x_2, x_1)$ ehk

$$J(\vec{a}) = -x_2 \vec{e}_1 + x_1 \vec{e}_2. \quad (8.20)$$

Jätame selle valemi tuletamise iseseisvaks harjutuseks.

Nüüd on meie eesmärk parametrizeerida teist järku spetsiaalsete ortogonaalsete maatriksite hulk SO_2 . Teisisõnu tuleb valida parameetrid nii, et nende parameetrite muutumispiirkonna igale väärtuste komplektile vastaks üks ja ainult üks teist järku spetsiaalne ortogonaalne maatriks.

Teoreem 24. *Tasandi pöörde ρ_φ , kus $\varphi \in [0, 2\pi)$, maatriks ortonormeeritud baasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on kujul*

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Tõestus. Olgu antud tasandi pööre ρ_φ , kus $\varphi \in [0, 2\pi)$. Vaatleme tasandi suvalist ortonormeeritud baasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, mille orientatsioon on kooskõlas tasandi orientatsiooniga. Pöörame esimest baasivektorit $\vec{e}_1$ positiivses suunas nurga φ võrra ja saame vektori $\rho_\varphi(\vec{e}_1)$, mida tähistame $\vec{e}'_1$. Ilmselt on vektor $\vec{e}'_1$ ühikvektor. Rakendades valemit (2.16), võime vektori $\vec{e}'_1$ kirjutada kujul

$$\vec{e}'_1 = \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2. \quad (8.21)$$

Vektori $\vec{e}'_2$ defineerime valemiga $\vec{e}'_2 = J(\vec{e}'_1)$. Rakendades valemit (8.20), saame

$$\vec{e}'_2 = J(\vec{e}'_1) = -\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2. \quad (8.22)$$

Ei ole raske veenduda, et baas $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ on positiivselt orienteeritud ortonormeeritud baas. Valemitest (8.21), (8.22) järeldub, et üleminekumaatriks baasilt $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ baasile $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ on kujul

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

See maatriks on ortogonaalne, sest mõlemad baasid on ortonormeeritud. Maatriksi A ortogonaalsuses võib veenduda ka tingimuse (8.2) otsese kontrollimisega. Lisaks on lihtne veenduda, et $|A| = 1$. Seega $A \in \text{SO}_2$. $\square$

Veel üheks teisenduseks, mis säilitab baasi ortonormeerituse, on peegeldus. Peegeldust võib kirjeldada järgmiselt. Kõigepealt valime tasandil sirge, mille tähistame $\mathcal{L}$. Olgu $\vec{s}$ sirge $\mathcal{L}$ sihivektor. Eeldame, et see on normeeritud, st $\vec{s}$ on ühikvektor $|\vec{s}| = 1$. Olgu $\vec{a}$ mingi tasandi vektor. Paigutame selle vektori alguspunkti suvalisse punkti Q sirgel $\mathcal{L}$ ning selle lõpp-punkti tähistame P , st $\vec{a} = \overrightarrow{QP}$. Tähistame punkti P ortogonaalprojektsiooni sirgele $\mathcal{L}$ tähega P' . Nüüd pikendame lõiku PP' punktist P' edasi sama pikkusega. Saadud punkti tähistame R . Siis vektorit $\overrightarrow{QR}$ nimetatakse vektori $\overrightarrow{QP}$ peegelduseks sirge $\mathcal{L}$ suhtes. Vektorit $\overrightarrow{QR}$ saab avaldada järgmiselt

$$\overrightarrow{QR} = 2 \langle \vec{a}, \vec{s} \rangle \vec{s} - \vec{a}, \quad (8.23)$$

kus $\langle \vec{a}, \vec{s} \rangle$ on vektorite skalaarkorrutis. Olgu antud ortonormeeritud reeper $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ja sirge $\mathcal{L}$, mis läbib alguspunkti O ning mille sihivektoriks on ühikvektor $\vec{s}$. Moodustame uue reeperi $\mathcal{R}' = \{O; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$, mille baasivektorid on baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ peegeldused sirge $\mathcal{L}$ suhtes. Siis

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= 2 \langle \vec{e}_1, \vec{s} \rangle \vec{s} - \vec{e}_1, \\ \vec{e}'_2 &= 2 \langle \vec{e}_2, \vec{s} \rangle \vec{s} - \vec{e}_2. \end{aligned} \quad (8.24)$$

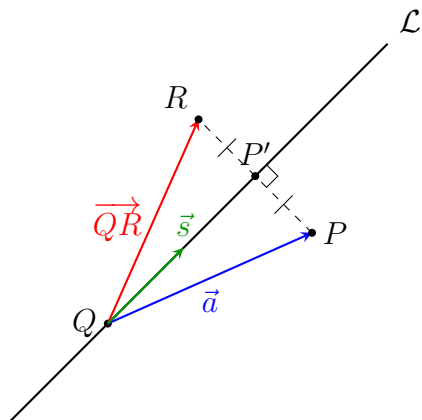
Ei ole raske veenduda, et baas $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ on ortonormeeritud. Me ei hakka välja kirjutama üleminekumaatriksi ega koordinaatide teisenduse valemeid peegelduse korral sirge $\mathcal{L}$ suhtes, sest need valemid on mahukad ja edaspidi meil neid vaja ei lähe. Vaatleme erijuhtu, kus sirge $\mathcal{L}$ on alguspunktist O lähtuvate baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ vahelise nurga poolitaja. Siis

$$\vec{s} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_2,$$

ning asendades selle vektori valemisse (8.24), saame $\vec{e}'_1 = \vec{e}_2, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1$. Vastav koordinaatide teisendus on

$$\begin{aligned} x &= y', \\ y &= x'. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Seega koordinaadisüsteemi peegeldus esimese veerandi nurgapoolitaja suhtes taandub koordinaattelgede ümbernimetamisele, st x -telg muutub y' -teljeks ja vastupidi.



Joonis 30: Vektori peegeldamine sirge suhtes

9 Weyli aksiomaatika

Aksiomaatilist lähenemist matemaatilise teooria ülesehitamisele rakendati esmakordselt geomeetrias ning sellest ajast alates on geomeetria olnud range ja korrektse teooria ülesehituse eeskujuks teistele matemaatika valdkondadele. Esimese geomeetriliste aksioomide süsteemi kirjeldas Eukleides oma kuulsas monograafias „Elemendid“, mis oli paljude sajandite jooksul geomeetriat õppijate käsiraamatuks. Järgmise sammu aksiomaatilise meetodi arengus tegi silmapaistev matemaatik David Hilbert, kes esitas oma aksioomide süsteemi.

Aksiomaatilise lähenemise aluseks on põhimõisted ehk defineerimata mõisted. Eukleidese ja Hilberti aksiomaatikas on sellisteks mõisteteks punkt, sirge ja tasand. Seejärel koostatakse aksioomide süsteem, st väidete kogum, mis ei vaja tõestamist. Põhimõistete abil defineeritakse uued mõisted ning kasutades aksioomide süsteemi ja matemaatilist loogikat, tõestatakse nende kohta mitmesuguseid matemaatilisi väiteid, st lauseid ja teoreeme. Kui aksioomide süsteemist on matemaatilise loogika abil võimalik tuletada kaks teineteisele vasturääkivat väidet, nimetatakse sellist aksioomide süsteemi vastuoluliseks. Seega esitatakse aksioomide süsteemile oluline nõue: see peab olema vastuoludeta.

Kahekümnendal sajandil hakkas matemaatikas olulist rolli mängima vektorarvutus, mille areng viis vektor- ehk lineaarruumide teooriani. Sellega seoses pakkus silmapaistev matemaatik Hermann Weyl välja uue aksiomaatilise lähenemise ruumi kontseptsioonile ja selle geomeetria ülesehitamisele. Tema aksiomaatilise lähenemise aluseks on vektori mõiste, mitte sirge ja tasandi mõisted, nagu Eukleidese ja Hilberti aksiomaatikas. Käesolevas paragrahvis esitame Hermann Weyli eukleidiilise ruumi aksioomide süsteemi.

Hermann Weyli aksiomaatikas on põhimõisteteks punkt ja vektor. Kõigi punktide hulka tähistame E ning kõigi vektorite hulka tähistame V . Eeldatakse, et need kaks hulka on mittetühjad, s.t. E sisaldab vähemalt ühte punkti ja V sisaldab vähemalt ühte vektorit. Lisaks mängib Hermann Weyli aksiomaatikas olulist rolli reaalarvude hulk $\mathbb{R}$. Reaalarvude hulgal on defineeritud liitmine ja korrutamine, mille suhtes $\mathbb{R}$ on korpus. Hulga E elemente, st punkte, tähistame ladina tähestiku suurte tähtedega $A, B, P, Q, \dots$. Vektoreid, st hulga V elemente, tähistame ladina tähestiku väikeste tähtedega, mille kohal on nool, st $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{x}, \dots$. Reaalarve tähistame kreeka tähestiku väikeste tähtedega $\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots$.

9.1 Vektorruum

Hermann Weyli esimese aksioomide rühma võib lühidalt sõnastada järgmiselt: vektorite hulk V on n -mõõtmeline vektorruum üle reaalarvude korpuse $\mathbb{R}$, kus n on positiivne täisarv, mida nimetatakse ruumi dimensiooniks. Seega on vektorite hulgal V defineeritud vektorite liitmine ja nende korrutamine reaalarvudega. See tä-

hendab, et suvalise kahe vektori $\vec{a}, \vec{b} \in V$ korral on defineeritud vektor $\vec{a} + \vec{b} \in V$, mida nimetatakse vektorite summaks. Suvalise arvu $\alpha \in \mathbb{R}$ ja suvalise vektori $\vec{a} \in V$ korral on defineeritud vektor $\alpha\vec{a} \in V$, mida nimetatakse vektori ja arvu korrutiseks.

Definitsioon 20. Suvaliste vektorite ja reaalarvude korral kehtivad järgmised **vektorruumi** aksioomid:

$$(V_1) \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

$$(V_2) \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}),$$

$$(V_3) \quad \text{vektorite hulgas } V \text{ leidub vektor } \vec{0} \text{ omadusega } \vec{a} + \vec{0} = \vec{a},$$

$$(V_4) \quad \text{suvalise vektori } \vec{a} \in V \text{ korral leidub vektor, mida nimetatakse vastandvektori, nii et } \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0},$$

$$(V_5) \quad (\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a}),$$

$$(V_6) \quad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b},$$

$$(V_7) \quad (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a},$$

$$(V_8) \quad 1\vec{a} = \vec{a},$$

$$(V_9) \quad \text{hulgas } V \text{ leidub } n \text{ lineaarselt sõltumatut vektorit, kuid iga } n + 1 \text{ vektorit on lineaarselt sõltuvad.}$$

Aksioomi (V_9) nimetatakse dimensiooni aksioomiks. Positiivset täisarvu n nimetatakse vektorruumi V dimensiooniks ning seda tähistatakse $\dim V$.

9.2 Eukleidiline ruum

Teine aksioomide rühm määrab seose punktihulga E ja vektorruumi V vahel. Need aksioomid võib sõnastada järgmiselt:

$$(W_1) \quad \text{on antud kujutus } E \times E \rightarrow V, \text{ mis seab igale järjestatud punktipaarile } (P, Q) \in E \times E \text{ vastavusse üheselt määratud vektori } \vec{a} = \overrightarrow{PQ} \in V,$$

$$(W_2) \quad \text{on antud kujutus}$$

$$(P, \vec{a}) \in E \times V \mapsto Q = P + \vec{a} \in E,$$

mis seab igale paarile $(P, \vec{a})$, kus P on punkt ja $\vec{a}$ on vektor, vastavusse üheselt määratud punkti $Q = P + \vec{a} \in E$, mille korral kehtib

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{a},$$

(W_3) suvaliste punktide ja vektorite korral kehtib võrdsus

$$(P + \vec{a}) + \vec{b} = P + (\vec{a} + \vec{b}).$$

Aksioomi (W_3) nimetatakse kolmnurga aksioomiks.

Kolmas aksioomide rühm võimaldab defineerida sellised olulised eukleidilise geomeetria mõisted nagu lõikude pikkused ja nurgad. See aksioomide rühm on järgmine:

$$(E_1) \text{ on antud kujutus } (\vec{a}, \vec{b}) \in V \times V \mapsto \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in \mathbb{R},$$

$$(E_2) \langle \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c} \rangle = \alpha \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \beta \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle,$$

$$(E_3) \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle,$$

$$(E_4) \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0, \text{ kusjuures } \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \text{ parajasti siis, kui } \vec{a} = \vec{0}.$$

Punktihulka E , mis rahuldab ülaltoodud aksioome, nimetatakse *n -mõõtmeliseks eukleidiliseks ruumiks*. V nimetatakse *n -mõõtmeliseks vektorruumiks*, mis on asotsieeritud n -mõõtmelise eukleidilise ruumiga E . Edaspidi käsitleme kas kahe- või kolmemõõtmelise eukleidilise ruumi ($n = 2$) või kolmemõõtmelise eukleidilise ruumi ($n = 3$).

Vektori $\vec{a}$ pikkus eukleidilises ruumis on mittenegatiivne reaalarv, mida tähistatakse $|\vec{a}|$, ning see määratakse valemiga

$$|\vec{a}| = +\sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}.$$

Aksioomist (E_4) järeldub, et vektori pikkus on null parajasti siis, kui vektor on nullvektor. Kahe punkti P, Q vahelist kaugust eukleidilises ruumis E tähistatakse $|PQ|$ ning see defineeritakse kui vektori $\overrightarrow{PQ}$ pikkus, st $|PQ| = |\overrightarrow{PQ}|$.

Vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ vaheline nurk eukleidilises ruumis tähistatakse $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ ning see defineeritakse valemiga

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|}, \quad 0 \leq \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi.$$

Olgu $P \in E$ eukleidilise ruumi punkt ja $\vec{a} \in V$ nullvektorist erinev vektor. Sirgeks, mis läbib punkti P sihivektoriga $\vec{a}$, nimetatakse punktihulka L eukleidilises ruumis E , mis on defineeritud valemiga

$$L = \{P + t\vec{a} : t \in \mathbb{R}\}.$$

Osa II

Ellips, hüperbool, parabool

10 Teist järku joonte klassifikatsioon

Selles paragrahvis käsitleme tasandi jooni ning eeldame, et tasand on varustatud ortonormeeritud reeperiga $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, st ristreeperiga. Vastava ristkoordinaadisüsteemi koordinaate tähistame x, y .

10.1 Teist järku joone üldvõrrand

Kahe muutuja x, y teise astme polünoomiks nimetatakse algebralist avaldist

$$F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F,$$

kus A, B, C, D, E, F on reaalarvud ning kordajatest A, B, C vähemalt üks on nullist erinev. *Teist järku joone võrrandiks* tasandil nimetatakse võrrandit $F(x, y) = 0$, st

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (10.1)$$

Võrrandi (10.1) lahendihulka, kui see pole tühi, nimetatakse *teist järku jooneks*. Seega teist järku joon on tasandi alamhulk, kuhu kuuluvad kõik punktid sellised, et nende koordinaadid x, y rahuldavad teist järku joone võrrandit (10.1). Kasutades maatriksarvutust, saame teist järku joone võrrandi esitada kujul

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (10.2)$$

või

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (10.3)$$

Seega on kasulik moodustada teist järku joone võrrandi kordajatest kaks maatriksit

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \quad \overline{M} = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}. \quad (10.4)$$

Maatriks M on sümmeetriline teist järku ruutmaatriks ja see on moodustatud teist järku joone võrrandi ruutliikmete kordajatest. Maatriks $\overline{M}$ on sümmeetriline kolmandat järku ruutmaatriks ja sellesse kuuluvad kõik teist järku joone võrrandi koefitsiendid ja vabaliige. Märkime, et maatriks M on maatriksi $\overline{M}$ alammaatriks. Seetõttu nimetatakse maatriksit $\overline{M}$ teist järku joone võrrandi *laiendatud maatriksiks*.

On ilmne, et teist järku joone võrrandi kuju (10.1) sõltub koordinaadisüsteemi valikust, st reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ valikust. Kui asendada üks koordinaadisüsteem x, y

teisega $\tilde{x}, \tilde{y}$, siis teist järku joone võrrand ehk vasakul pool seisev teise astme polünoom $F(x, y)$ muutub. Oluline on aga märkida, et joone järk seejuures ei muutu, st teise astme polünoom kujuneb teise astme polünoomiks. See järeldub eelmises paragrahvis leitud koordinaatide teisenduse valemist ning sellest, et tasandi ühe baasi üleminekumaatriks teise baasi on pööratav. Olgu uutes koordinaatides teist järku joone võrrand kujul

$$A' \tilde{x}^2 + 2B' \tilde{x}\tilde{y} + C' \tilde{y}^2 + 2D' \tilde{x} + 2E' \tilde{y} + F' = 0. \quad (10.5)$$

Käesoleva paragrahvi eesmärk on näidata, et sobivalt valitud koordinaatide teisendusega saab teist järku joone võrrandi kuju oluliselt lihtsustada. Uurides seejärel lihtsustatud võrrandit, jõuame teist järku joonte võrrandite täieliku klassifikatsiooni.

10.2 Ruutosa lihtsustamine pöörde abil

Lemma 1. *Leidub koordinaadisüsteemi pööre nii, et uutes koordinaatides $\tilde{x}, \tilde{y}$ ei esine teist järku joone võrrandis korrutist $\tilde{x}\tilde{y}$, st $B' = 0$.*

Tõestus. Üldsust kitsendamata võime eeldada, et $B \neq 0$. Tõepoolest, kui $B = 0$, siis väide juba kehtib ja pole vaja midagi tõestada. Tõestamiseks leiame, kuidas teisendub kordaja B koordinaattelgede pööramisel mingi nurga φ võrra (koordinaatide alguspunkt jääb paigale). Seejärel näitame, et võrrandil $B' = 0$ leidub alati lahend, kui tundmatuks võtta koordinaadisüsteemi pöördenurk φ . Märkime, et koordinaaditeisenduse lineaarsuse tõttu teisenduvad koordinaadisüsteemi pöörde korral eraldi võrrandi ruutosa $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ ning lineaarosa koos vabaliikmega $2Dx + 2Ey + F$. Koordinaattelgede pööramisega koordinaatide alguspunkti ümber nurga φ võrra läheme koordinaatidelt x, y üle koordinaatidele $\tilde{x}, \tilde{y}$. Üleminekumaatriksit tähistame S . Siis maatrikskujul koordinaadid teisenduvad järgmiselt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (10.6)$$

Kordaja B teisenduse valemi leidmiseks kasutame ruutosa teisendamist. Kirjutame võrrandi ruutosa vanades ja uutes koordinaatides maatrikskujul

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}. \quad (10.7)$$

Asendades valemi (10.6) valemisse (10.7), saame

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (10.8)$$

Sellest järeldub

$$\begin{aligned} B' &= B (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + (C - A) \sin \varphi \cos \varphi \\ &= B \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(C - A) \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Võrdsustades saadud valemi paremal poolel oleva avaldise nulliga, saame võrrandi pöördenurga leidmiseks

$$B \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(C - A) \sin 2\varphi = 0. \quad (10.10)$$

Saadud võrrandis võib olla kas $A = C$ või $A \neq C$. Esimesel juhul, kui $A = C$, teine liige võrdub nulliga ning võrrand võtab kuju $B \cos 2\varphi = 0$. Sellel võrrandil on lahend $\varphi = \pi/4$, st pöörates koordinaadisüsteemi nurga $\pi/4$ võrra, saame soovitud tulemuse $B' = 0$. Teisel juhul, kui $A \neq C$, otsime lahendit vahemikus $-\pi/4 < \varphi < \pi/4$. Sellel vahemikul funktsioon $\cos 2\varphi$ on vahemiku igas punktis nullist erinev. Jagades võrrandi (10.10) mõlemad pooled funktsiooniga $\cos 2\varphi$, saame

$$\tan 2\varphi = \frac{2B}{A - C}.$$

Vahemikus $-\pi/4 < \varphi < \pi/4$ on võrrandil lahend

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{2B}{A - C}.$$

Seega on väide tõestatud. □

10.3 Reeperi paralleelüke

Uurime, kuidas teisendub teist järku joone võrrand koordinaadisüsteemi paralleel-
lücke korral. Tuletame meelde, et paralleellücke korral muutub reeperi alguspunkt $O \rightarrow O'$, kuid reeperi baasivektorid ei muutu, st $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1, \vec{e}'_2 = \vec{e}_2$. Seega sel juhul on üleminekumaatriks ühikmaatriks, st $S = I$. Paralleellücke korral avalduvad “vanad” koordinaadid x, y “uute” koordinaatide $\tilde{x}, \tilde{y}$ kaudu valemitega

$$\begin{cases} x = \tilde{x} + u, \\ y = \tilde{y} + v, \end{cases}$$

kus (u, v) on uue alguspunkti O' koordinaadid “vanas” koordinaadisüsteemis. Koordinaatide teisendusvalemid kirjutame maatrikskujul

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (x \ y) = (\tilde{x} \ \tilde{y}) + (u \ v), \quad (10.11)$$

kus u, v on uue koordinaadisüsteemi alguspunkti koordinaadid. Valemite kuju kompaktsemaks muutmiseks võtame kasutusele tähistused

$$R = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad N = (D \ E), \quad N' = (D' \ E'). \quad (10.12)$$

Neid tähistusi kasutades saame valemid (10.11) kirjutada kujul

$$R = \tilde{R} + U, \quad R^T = \tilde{R}^T + U^T.$$

Lemma 1 tõestuses leidsime valemi (10.22), mille järgi teisendub teist järku joone võrrandi põhimaatriks M :

$$M' = S^T M S, \quad (10.13)$$

kus S on üleminekumaatriks. Sellest valemist järeldub, et juhul kui ülemineku- maatriks on ühikmaatriks, siis teist järku joone võrrandi ruutosa ja põhimaatriks M ei muutu. Seega *koordinaadisüsteemi paralleellüke ei muuda teist järku joone võrrandi ruutosa*. Meie eesmärk on leida, millise valemi järgi teisendub teist järku joone võrrandi lineaarliikmed koordinaadisüsteemi paralleellükke korral.

Selleks kirjutame teist järku joone võrrandi uusi tähistusi (10.12) kasutades maatrikskujul

$$R^T M R + 2 N R + F = 0. \quad (10.14)$$

Nüüd teeme selles võrrandis asenduse $R = \tilde{R} + U$:

$$(\tilde{R}^T + U^T) M (\tilde{R} + U) + 2 N (\tilde{R} + U) + F = 0. \quad (10.15)$$

Sulgude avamisel, st maatrikskorrumise distributiivsust kasutades, saame

$$\tilde{R} M \tilde{R} + \tilde{R}^T M U + U^T M \tilde{R} + 2 N \tilde{R} + U^T M U + 2 N U + F = 0. \quad (10.16)$$

Selles võrrandis on vasakpoole esimene liige teist järku joone võrrandi ruutosa, teine, kolmas ja neljas liige moodustavad lineaarosa ning kolme viimase liikme summa on vabaliige. Teisendame võrrandi lineaarosa nii, et saaksime leida, kuidas uued kordajad D', E' koordinaatides $(\tilde{x}, \tilde{y})$ avalduvad esialgse võrrandi kordajate kaudu koordinaatides (x, y) . Kõigepealt märkame, et maatrikskorrumis $\tilde{R}^T M U$ on skalaar, st arv. Seetõttu ei muuda selle transponeerimine midagi, st pärast transponeerimist saame esialgse avaldisega võrdse avaldise. Arvestades maatriksi M sümmeetrilisust, st omadust $M^T = M$, saame

$$\tilde{R}^T M U = (\tilde{R}^T M U)^T = U^T M \tilde{R}.$$

Järelikult saab teist järku joone võrrandi lineaarosa uutes koordinaatides kirjutada kujul

$$\tilde{R}^T M U + U^T M \tilde{R} + 2 N \tilde{R} = 2 (U^T M + N) \tilde{R}.$$

Uute kordajate D', E' abil kirjutatud võrrandi lineaarosa on kujul $2 N' \tilde{R}$. Võrreldes seda avaldist eespool saadud avaldisega, jõuame järeldusele

$$N' = U^T M + N, \quad (N')^T = M U^T + N^T. \quad (10.17)$$

Seega saab valemi (10.17) kirjutada kujul

$$(N')^T = M U^T + N^T, \quad \begin{pmatrix} D' \\ E' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} D' = Au + Bv + D, \\ E' = Bu + Cv + E. \end{cases} \quad (10.18)$$

Saime valemi, mis näitab, kuidas teist järku joone võrrandi lineaarosa kordajad koordinaatides $(\tilde{x}, \tilde{y})$ avalduvad teist järku joone võrrandi lineaarosa kordajate kaudu koordinaatides (x, y) . Seda valemit kasutades leiame tingimused, mille korral teist järku joone võrrandi lineaarosa kordajad koordinaatides $(\tilde{x}, \tilde{y})$ muutuvad nulliks, st $D' = E' = 0$. Valemist (10.18) järeldub, et koordinaatides $(\tilde{x}, \tilde{y})$ muutuvad lineaarosa kordajad nulliks parajasti siis, kui uue koordinaatide alguspunkti O' koordinaadid (u, v) on järgmise võrrandisüsteemi lahendid:

$$\begin{aligned} Au + Bv + D &= 0, \\ Bu + Cv + E &= 0. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Seega taandub küsimus võimalusest lihtsustada teist järku joone võrrandit lineaarliikmete kõrvaldamise teel võrrandisüsteemi (10.19) lahendite olemasolu küsimusele. Olgu teist järku joone võrrandi põhimaatriksi M determinant tähistatud δ , st $\delta = |M|$. Lisaks olgu

$$\delta_u = \begin{vmatrix} D & B \\ E & C \end{vmatrix}, \quad \delta_v = \begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix}.$$

Lineaarvõrrandisüsteemide teooriast on teada järgmine tulemus:

- Kui $\delta \neq 0$, siis süsteemil (10.19) on täpselt üks lahend.
- Kui $\delta = 0$, kuid vähemalt üks arvudest δ_u, δ_v on nullist erinev, siis süsteemil (10.19) lahendeid ei ole.
- Kui $\delta = \delta_u = \delta_v = 0$, siis süsteemil (10.19) on lõpmata palju lahendeid.

Definitsioon 21. Kui teist järku joone võrrandi ruutosa maatriksi determinant on nullist erinev, st $\delta \neq 0$, siis nimetatakse teist järku joont *tsentraalseks* ning punkti, mille koordinaadid u, v on süsteemi (10.19) lahendiks, nimetatakse joone *keskpunktiks*.

Kui koordinaadisüsteemi paralleellükkega tuua alguspunkt teist järku joone keskpunkti, siis uutes koordinaatides kirjutatud võrrand ei sisalda lineaarliikmeid $D' = E' = 0$.

10.4 Teist järku joone võrrandi invariantid

Tänapäeva geomeetrias mängib olulist rolli invarianti mõiste. Käesolevas paragrahvis vaatleme teist järku joone võrrandi invariante. Invariante kasutatakse teist järku joonte või nende võrrandite klassifitseerimiseks. Olgu tasandil antud ristkoordinaadisüsteem ja teist järku joone võrrand. On ilmne, et selle võrrandi kordajad sõltuvad koordinaadisüsteemi valikust. Võrrandi invarianti all mõistame võrrandi kordajatest moodustatud algebralist avaldist, mille arvuline väärtus või selle arvulise väärtuse märk (positiivne või negatiivne) ei muutu üleminekul tasandi ühelt ristkoordinaadisüsteemilt teisele. Kujundlikult öeldes on võrrandi invariant puhasstatud koordinaadisüsteemi valikust tingitud juhuslikkuse “kestast” ning iseloomustab joone geomeetrilist kuju. Võrrandi invariante kasutame teist järku joonte võrrandite klassifitseerimiseks. Tõepoolest, kui kahe võrrandi invarianti väärtused on erinevad, siis ei saa me ühegi koordinaadisüsteemi teisenduse abil üht võrrandit teiseks teisendada. Järelikult kuuluvad nende võrranditega määratud teist järku jooned erinevatesse klassidesse.

Olgu antud teist järku joone võrrand

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (10.20)$$

Seame sellele võrrandile vastavusse kolm võrrandi kordajatest moodustatud algebralist avaldist:

$$\varsigma = \text{Tr } M = A + C, \quad \delta = |M|, \quad \Delta = |\overline{M}| \quad (10.21)$$

Tuletame meelde, et maatriksi peadiagonaali elementide summat, mida tähistame sümboliga ς , nimetatakse maatriksi M jäljeks ja tähistatakse $\text{Tr } M$.

Teoreem 25. Üleminekul tasandi ühelt ristkoordinaadisüsteemilt teisele ristkoordinaadisüsteemile suuruste $\varsigma, \delta, \Delta$ arvulised väärtused ei muutu, st need on tasandi ühelt ristkoordinaadisüsteemilt teisele ülemineku invariantid.

Tõestus. Iga üleminekul tasandi ühelt ristkoordinaadisüsteemilt teisele on reeperi paralleellükete (alguspunkti nihete) $O \rightarrow O'$ ja baasi ortogonaalteisenduste

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\} \xrightarrow{S} \{O; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\},$$

kus S on ortogonaalmaatriks, kompositsioon (järjestikused teisendused) Vaatleme eraldi reeperi paralleellükke ja baasi ortogonaalteisenduse juhtu.

Reeperi paralleellüke. Olgu $O \rightarrow O'$, kusjuures baas jääb muutumatuks $\vec{e}_1 = \vec{e}'_1, \vec{e}_2 = \vec{e}'_2$, ning punkti O' koordinaadid esialgses reeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on (u, v) . Me juba teame, et reeperi paralleellükke korral teist järku joone võrrandi põhimaatriks M ei muutu. Järelikult ei muutu ka selle jälg ς ega determinant δ . Näitame, et ka laiendatud maatriksi $\overline{M}$ determinant ei muutu, st $|\overline{M}| = |\overline{M}'|$, kus

$\overline{M}'$ on laiendatud maatriks pärast reeperi paralleellüket. Laiendatud maatriksi $\overline{M}'$ kuju saab leida eelmises paragrahvis saadud valemite (??), (10.18) abil. Nendest järeldub, et

$$\overline{M}' = \begin{pmatrix} A & B & Au + Bv + D \\ B & C & Bu + Cv + E \\ Au + Bv + D & Bu + Cv + E & Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F \end{pmatrix}.$$

On lihtne näha, et maatriksi $\overline{M}'$ võib saada maatriksist $\overline{M}$, liites kolmandale reale kaks esimest rida, mis on korrutatud vastavalt arvudega u (esimene rida) ja v (teine rida). Determinantide teooriast teame, et selline teisendus ei muuda maatriksi determinanti. Järelikult $|\overline{M}| = |\overline{M}'|$ ja suuruse Δ väärtus ei muutu.

Baasi ortogonaalteisendus. Vaatleme nüüd ristkoordinaatide teisenduse juhtu, mille korral reeperi alguspunkt ei muutu, kuid baas teisendub ortogonaalse üleminekumaatriksi S abil. Lemma (1) tõestuses tuletasime teist järku joone võrrandi põhimaatriksi teisendusvalemi

$$M' = S^T M S. \quad (10.22)$$

Kasutades maatriksi jälje omadust $\text{Tr}(TV) = \text{Tr}(VT)$, kus T, V on suvalised sama järku ruutmaatriksid, ning üleminekumaatriksi ortogonaalsust, saame

$$\text{Tr } M' = \text{Tr}(S^T M S) = \text{Tr}(M S S^T) = \text{Tr } M.$$

Järelikult suuruse ς väärtus ei muutu. Kuna ortogonaalmaatriksi determinandi ruut võrdub ühega, saame valemist (10.22)

$$|M'| = |S^T M S| = |S|^2 |M| = |M|.$$

Järelikult suuruse δ väärtus ei muutu. Võtame kasutusele ortogonaalteisenduse laiendatud maatriksi plokkkuju

$$\overline{S} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kus nullide all mõeldakse kahest nullist koosnevaid plokkke (esimeses reas paiknevad need vertikaalselt ja teises reas horisontaalselt). On lihtne veenduda, et laiendatud maatriks on ortogonaalmaatriks. Valemist (10.22) järeldub, et teist järku joone võrrandi laiendatud maatriks teisendub valemi

$$\overline{M}' = \overline{S}^T \overline{M} \overline{S}.$$

järgi. Siit järeldub vahetult laiendatud maatriksi $\overline{M}$ determinandi invariantsus, st $\Delta' = \Delta$. $\square$

10.5 Elliptilist tüüpi teist järku jooned

Käesolevas ja järgmises paragrahvis vaatleme tsentraalsete teist järku joonte klassifikatsiooni, st eeldame, et $\delta \neq 0$. Eelmises paragrahvis näitasime, et δ on teist järku joone võrrandi invariant, st selle väärtus ei muutu üleminekul ühelt ristkoordinaadisüsteemilt teisele. Järelikult ei sõltu tingimus $\delta \neq 0$ koordinaadisüsteemi valikust. Seega, kui vaatleme tsentraalseid teist järku jooni, st $\delta \neq 0$, siis on meil kaks võimalust: kas $\delta > 0$, või $\delta < 0$. Invariandi δ invariantisuse tõttu ei ole tasandi koordinaatide teisendamise teel võimalik teisendada teist järku joont, mille korral $\delta > 0$, teist järku jooneks, mille korral $\delta < 0$, ega vastupidi. See tähendab, et jagame tsentraalsete teist järku joonte klassi kaheks *mittelõikuvaks* alamklassiks.

Definitsioon 22. Teist järku joont nimetatakse elliptilist tüüpi jooneks, kui $\delta > 0$, ja hüperboolset tüüpi jooneks, kui $\delta < 0$.

Käesolevas paragrahvis klassifitseerime elliptilist tüüpi teist järku jooned. Olgu (10.20) elliptilist tüüpi joone võrrand, st $\delta > 0$. Ristkoordinaadisüsteemi pöörde abil viime selle kujule

$$A' \tilde{x}^2 + C' \tilde{y}^2 + 2D'\tilde{x} + 2E'\tilde{y} + F' = 0. \quad (10.23)$$

Seejärel kõrvaldame reeperi paralleellükke abil lineaarliikmed, st viime võrrandi (10.23) kujule

$$A'' \dot{x}^2 + C'' \dot{y}^2 + F'' = 0. \quad (10.24)$$

Meil on $\delta = A''C'' > 0$. Järelikult on kordajatel A'', C'' sama märk, st nad on kas mõlemad positiivsed ($A'' > 0, C'' > 0$) või mõlemad negatiivsed ($A'' < 0, C'' < 0$). Seega on meil kokku kolm võimalust:

- $F'' \neq 0$ ja F'' märk on vastupidine kordajate A'', C'' märgile. Teisendame võrrandi (10.24) kujule

$$\frac{\dot{x}^2}{\left(-\frac{F''}{A''}\right)} + \frac{\dot{y}^2}{\left(-\frac{F''}{C''}\right)} = 1. \quad (10.25)$$

Kuna F'' märk on vastupidine kordajate A'', C'' märgile, siis

$$-\frac{F''}{A''} > 0, \quad -\frac{F''}{C''} > 0.$$

Defineerime arvud a, b arvude $-F''/A'', -F''/C''$ ruutjuurte positiivsete väärtustena, st

$$a = +\sqrt{-\frac{F''}{A''}}, \quad b = +\sqrt{-\frac{F''}{C''}}.$$

Nüüd saab võrrandi (10.25) kirjutada kujul

$$\frac{\dot{x}^2}{a^2} + \frac{\dot{y}^2}{b^2} = 1. \quad (10.26)$$

- $F'' \neq 0$ ja F'' märk on sama mis kordajatel A'', C'' . Eelmise punkti teisendustega analoogiliste teisenduste abil saame võrrandi (10.24) viia kujule

$$\frac{\dot{x}^2}{a^2} + \frac{\dot{y}^2}{b^2} = -1, \quad a = +\sqrt{\frac{F''}{A''}}, \quad b = +\sqrt{\frac{F''}{C''}}. \quad (10.27)$$

- $F'' = 0$. Sel juhul saab võrrandi (10.24) viia kujule

$$a^2 \dot{x}^2 + b^2 \dot{y}^2 = 0, \quad a = +\sqrt{|A''|}, \quad b = +\sqrt{|C''|}. \quad (10.28)$$

Seda võrrandit rahuldab ainult üks punkt, see on koordinaadisüsteemi alguspunkt.

Võrrandites (10.26), (10.27) võime eeldada, et $a \geq b$. Tõepoolest, kui see nii ei ole, teeme veel ühe koordinaadisüsteemi ortogonaalteisenduse $\dot{x} = y'', \dot{y} = x''$ (peegelduse esimese ja kolmanda veerandi nurgapoolitaja suhtes). Erijuhul $a = b$ on võrrand (10.26) koordinaatide alguspunktis asuva keskpunktiga ja raadiusega a ringjoone võrrand. Seega käsitleme ringjoont ellipsi erijuhuna.

Definitsioon 23. Teist järku jooni, mille punktide koordinaadid rahuldavad vastavalt võrrandeid (10.26), (10.27), (10.28), nimetatakse vastavalt *ellipsiks*, *imaginaarseks ellipsiks* ja *kaheks imaginaarseks lõikuvaks sirgeks*. Võrrandeid (10.26), (10.27), (10.28) nimetatakse vastavate joonte kanoonilisteks võrranditeks.

Seega saime elliptilist tüüpi teist järku joonte klassifikatsiooni. Tegime seda koordinaadisüsteemi järjestikuste teisenduste abil. Praktikas on teist järku joone tüübi määramine koordinaadisüsteemi teisenduste ja teist järku joone võrrandi kanoonilisele kujule viimise teel töömahukas ülesanne. Palju lihtsam on seda teha invariantide abil. Kõigi kolme elliptilist tüüpi joone korral on teine invariant rangelt positiivne $\delta > 0$. Esimene ja kolmas invariant avalduvad võrrandi kordajate kaudu järgmiselt: $\varsigma = A'' + C'', \Delta = A'' C'' F''$. Arvutades invariantide ς, Δ märgid ellipsi korral, saame

A''	C''	F''	ς	Δ	$\varsigma \Delta$
+	+	−	+	−	−
−	−	+	−	+	−

See tabel näitab, et invariantide märgid muutuvad sõltuvalt kordajate märkidest, kuid korrutisel $\varsigma \Delta$ on alati miinusmärk. Seega, kui $\delta > 0, \varsigma \Delta < 0$, siis on teist järku joon ellips.

Seega saab elliptilist tüüpi teist järku joonte klassifikatsiooni esitada järgmise tabelina:

Joone nimetus	Kanooniline võrrand	δ	$\varsigma \Delta$
<i>Ellips</i>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\delta > 0$	$\varsigma \Delta < 0$
<i>Imaginaarne ellips</i>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	$\delta > 0$	$\varsigma \Delta > 0$
<i>Imaginaarsed sirged</i>	$a^2 x^2 + b^2 y^2 = 0$	$\delta > 0$	$\Delta = 0$

10.6 Hüperboolset tüüpi teist järku jooned

Käesolevas paragrahvis eeldame, et $\delta < 0$, st vaatleme hüperboolset tüüpi teist järku jooni. Eeldame, et teist järku joone võrrand on koordinaattelgede pöörde ja koordinaatide alguspunkti paralleellükke abil juba viidud kujule

$$A'' \dot{x}^2 + C'' \dot{y}^2 + F'' = 0. \quad (10.29)$$

Kuna $\delta = A'' C'' < 0$, siis on kordajatel A'', C'' erinevad märgid.

1. $F'' \neq 0$. Viies F'' miinusmärgiga võrrandi paremale poolele ja jagades võrrandi mõlemad pooled arvuga F'' , saame võrrandi (10.29) kirjutada kujul

$$\frac{\dot{x}^2}{-\frac{F''}{A''}} - \frac{\dot{y}^2}{\frac{F''}{C''}} = 1. \quad (10.30)$$

Võime eeldada, et selles võrrandis on kordajatel A'', F'' erinevad märgid. Tõepoolest, kui see nii ei ole, st neil on sama märk, siis nimetame koordinaadid ümber peegeldust teisendusena kasutades ning siis saab uue koordinaadi x kordajaks C'' , mille märk on vastupidine A'' märgile ja seega ka F'' märgile. Defineerime positiivsed arvud a, b valemitega

$$a^2 = -\frac{F''}{A''}, \quad b^2 = \frac{F''}{C''}.$$

Võrrandi (10.30) saab nüüd kirjutada kujul

$$\frac{\dot{x}^2}{a^2} - \frac{\dot{y}^2}{b^2} = 1. \quad (10.31)$$

2. $F'' = 0$. Võrrandi (10.29) saab viia kujule $a^2 \dot{x}^2 - b^2 \dot{y}^2 = 0$, kus $a^2 = A'', b^2 = C'', a > 0, b > 0$. Vasak pool on ruutude vahe ning seda saab esitada korru-tisena

$$(a \dot{x} - b \dot{y})(a \dot{x} + b \dot{y}) = 0. \quad (10.32)$$

Järelikult koosneb teist järku joon *kahest lõikuvast sirgest* $a \dot{x} - b \dot{y} = 0$ ja $a \dot{x} + b \dot{y} = 0$. Sirged lõikuvad koordinaadisüsteemi alguspunktis.

Seega sisaldab hüperboolset tüüpi teist järku joonte klassifikatsioon ainult kahte liiki jooni.

Definitsioon 24. Teist järku joont, mille punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit (10.31), nimetatakse *hüperbooliks*. Võrrandit (10.31) nimetatakse hüperbooli kanooniliseks võrrandiks. Teist järku joont, mille punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit (10.32), nimetatakse kaheks lõikuvaks sirgeks.

Hüperboolset tüüpi joonte klassifikatsiooni invariantide abil saab esitada järgmise tabelina

Joone nimetus	Kanooniline võrrand	δ	Δ
<i>Hüperbool</i>	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$
<i>Lõikuvad sirged</i>	$a^2 \dot{x}^2 - b^2 \dot{y}^2 = 0$	$\delta < 0$	$\Delta = 0$

10.7 Paraboolset tüüpi teist järku jooned

Definitsioon 25. Teist järku joont nimetatakse paraboolset tüüpi jooneks, kui $\delta = 0$.

Käesolevas paragrahvis leiame paraboolset tüüpi teist järku joonte klassifikatsiooni. Olgu $\delta = 0$, kuid vähemalt üks determinantidest δ_u, δ_v on nullist erinev. Sel juhul süsteemil (10.19) lahendit pole, st me ei saa koordinaatide paralleellühega samaaegselt viia nulli D ja E . Järelikult peame uurimist alustama võrrandist (10.23). Tingimusest $\delta = 0$ järedub, et ainult üks koefitsientidest A', C' on võrdne nulliga, sest mõlemad ei saa olla nullid. Üldsust kitsendamata võime eeldada, et $A' = 0, C' \neq 0$ (vajaduse korral nimetame koordinaadid ümber). Siis võtab võrrand (10.23) kuju

$$C' \tilde{y}^2 + 2D' \tilde{x} + 2E' \tilde{y} + F' = 0. \quad (10.33)$$

Arvutame determinantid δ_u, δ_v võrrandi (10.33) korral. Saame

$$\delta_v = \begin{vmatrix} A' & D' \\ B' & E' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & D' \\ 0 & E' \end{vmatrix} = 0, \quad \delta_u = \begin{vmatrix} D' & B' \\ E' & C' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D' & 0 \\ E' & C' \end{vmatrix} = D' C'.$$

Kuna vähemalt üks kahest determinandist peab olema nullist erinev, ent δ_v on null, järeldame, et determinant δ_u peab olema nullist erinev. Siit järeldub $D' \neq 0$. Kirjutame võrrandi (10.33) kujul

$$C' \left(\tilde{y}^2 + 2 \frac{E'}{C'} \tilde{y} + \frac{(E')^2}{(C')^2} \right) + 2D' \left(\tilde{x} + \frac{F'}{2D'} - \frac{(E')^2}{2D'C'} \right) = 0.$$

Esimene liige on täisruut. Seetõttu saame eelmise võrrandi ümber kirjutada kujul

$$C' \left(\tilde{y} + \frac{E'}{C'} \right)^2 + 2D' \left(\tilde{x} + \frac{F'}{2D'} - \frac{(E')^2}{2D'C'} \right) = 0.$$

Tehes koordinaadisüsteemi paralleellükke

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{x} + \frac{F'}{2D'} - \frac{(E')^2}{2D'C'}, \\ \dot{y} &= \tilde{y} + \frac{E'}{C'}, \end{aligned} \tag{10.34}$$

teisendame võrrandi kujule

$$C' \dot{y}^2 + 2D' \dot{x} = 0. \tag{10.35}$$

Jagades mõlemad pooled kordajaga C' ja viies teise liikme võrrandi paremale poolele, saame

$$\dot{y}^2 = -\frac{2D'}{C'} \dot{x}. \tag{10.36}$$

Kui $D'/C' < 0$, siis tähistame $p = -D'/C' > 0$. Kui $D'/C' > 0$, pöörame x -telje vastassuunaliseks (koordinaadisüsteemi peegeldus y -telje suhtes) $\ddot{x} = -\dot{x}$, $\ddot{y} = \dot{y}$ ja tähistame $p = D'/C' > 0$. Mõlemal juhul saame võrrandi

$$\ddot{y}^2 = 2p \ddot{x}, \quad p > 0. \tag{10.37}$$

Definitsioon 26. Teist järku joont, mida määrab võrrand (10.37), nimetatakse *parabooliks*. Võrrandit (10.37) nimetatakse parabooli kanooniliseks võrrandiks.

Seega on paraboolset tüüpi joonte klassifikatsiooni esimeseks teist järku jooneks parabool. Parabool on üheselt määratud tabelis esitatud invariantide väärtuste kogumiga:

Joone nimetus	Kanooniline võrrand	δ	Δ
<i>Parabool</i>	$y^2 = 2px, p > 0$	$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$

Edasine teist järku joonte klassifikatsioon sisaldab nii-öelda kõdunud jooni, st paralleelseid sirgeid, imaginaarseid paralleelseid sirgeid ja kokkulangevaid sirgeid. Nende teist järku joonte korral $\delta = \Delta = 0$. Seetõttu ei piisa nende joonte eristamiseks invariantide abil varem kasutusele võetud invariantidest ning selleks võetakse kasutusele veel üks invariant. Me ei hakka nendesse üksikasjadesse süvenema, kuna nimetatud teist järku jooned pakuvad vähem huvi kui eespool uuritud jooned. Klassifitseerime need teist järku jooned võrrandi teisenduste abil.

Olgu nüüd $\delta = \delta_u = \delta_v = 0$. Nagu eelmises punktis, on tingimus $\delta = 0$ samaväärne tingimusega $A' = 0, C' \neq 0$. Sellest järeldub $\delta_v = 0$. Viimane tingimus $\delta_u = 0$ toob kaasa $D' = 0$. Asendades kõik selle võrrandisse (10.33), saame

$$C' \tilde{y}^2 + 2 E' \tilde{y} + F' = 0.$$

Jagades mõlemad pooled kordajaga C' ja täiendes täisruuduks, viime saadud võrrandi kujule

$$\left(\tilde{y} + \frac{E'}{C'}\right)^2 + \frac{F'}{C'} - \left(\frac{E'}{C'}\right)^2 = 0.$$

Tehes paralleellükke $\acute{x} = \tilde{x}, \acute{y} = \tilde{y} + E'/C'$ ja tähistades

$$F'' = \frac{F'}{C'} - \left(\frac{E'}{C'}\right)^2,$$

viime võrrandi kujule

$$\acute{y}^2 + F'' = 0.$$

Kui selles võrrandis $F'' < 0$, siis saab võrrandi viia kujule $\acute{y}^2 - a^2 = 0$, kus $a^2 = -F'', a > 0$. Teist järku joon, mida selline võrrand määrab, koosneb *kahhest paralleelsest sirgest* $\acute{y} = -a, \acute{y} = a$. Sarnaselt, kui $F'' > 0$, saab võrrandi viia kujule $\acute{y}^2 + a^2 = 0$. Sellel võrrandil pole lahendeid reaaltasandil. Seetõttu nimetatakse vastavat teist järku joone võrrandit *imaginaarsete paralleelsete sirgete paariks*. Lõpuks, kui $F'' = 0$, siis teist järku joone võrrand on $\acute{y}^2 = 0$. On ilmne, et teist järku joon, mida määrab selline võrrand, on x -telg. Kuna vasakul poolel seisab y -koordinaadi ruut, siis läbime justkui kaks korda x -telje. Seetõttu nimetatakse teist järku joont, mida määrab võrrand $\acute{y}^2 = 0$, *ühtivate sirgete paariks*. Sellega on teist järku joonte võrrandite klassifikatsioon lõpetatud.

11 Ellips

Üks teist järku joonte klassifitseerimisel saadud kõveratest on ellips. Ellipsi võrrandit kasutades uurime selle sümmeetriaid, geomeetrilist kuju ja geomeetrilisi omadusi. Ellips on ovaalse kujuga, st seda võib vaadelda deformeeritud ringjoonena. Ringjoone puhul on oluliseks punktiks selle keskpunkt. Analooigilist rolli mängivad ellipsi puhul selle kaks fookust. Ellipsit kasutatakse sageli arhitektuuris ja tehnikas. Päikesesüsteemi ehitusest teame, et planeedid tiirlevad ümber Päikese mööda orbiite, mis on ellipsid. Seejuures paikneb Päike ellipsi ühes fookuses. Tuleb märkida, et Maa orbiit on kujult väga lähedane ringjoonele, kuid rangelt võttes on see ellips.

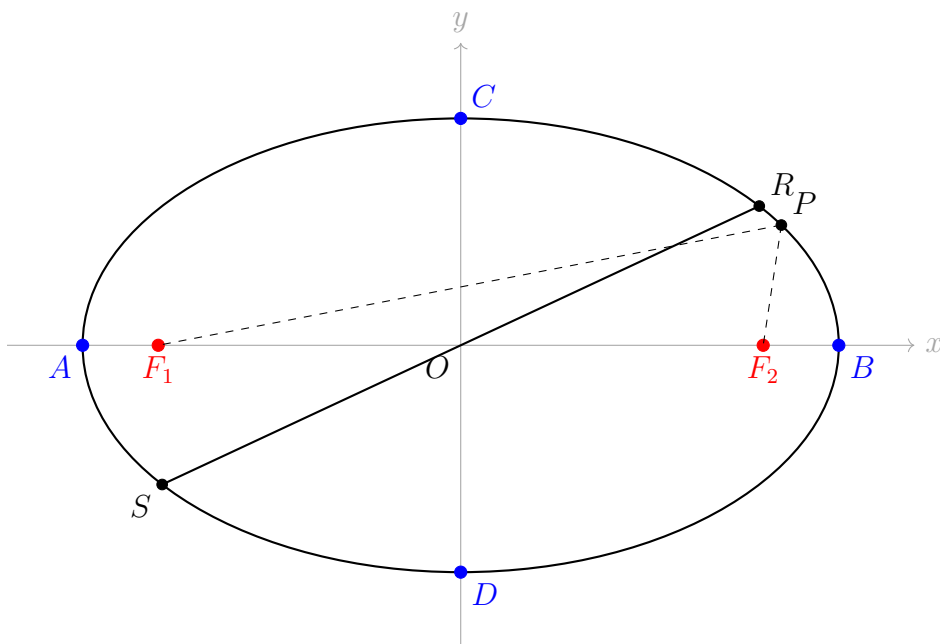
11.1 Kanooniline võrrand, ekstsentrilisus

Ellipsi definitsioon saadi eelmises paragrahvis teist järku joonte võrrandite klassifikatsiooni tulemusena. Ellips määratleti kanoonilise võrrandi abil

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0, \quad (11.1)$$

mis saadi esialgse koordinaadisüsteemi teisenduste kaudu. Sellest järeldub, et ellipsi võrrandil on kuju (11.1) vaid spetsiaalses koordinaadisüsteemis, mida nimetatakse ellipsi kanooniliseks koordinaadisüsteemiks. Käesolevas paragrahvis uurime, kuidas geomeetriselt konstrueeritakse ellipsi kanooniline koordinaadisüsteem. Ellipsi geomeetiline kuju on näidatud joonisel 31. Uurime ellipsi kanoonilist võrrandit ja geomeetrilist kuju. Joonisel 31 näeme, et ellips lõikab kanoonilise koordinaadisüsteemi koordinaattelgi järgmistes punktides: $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$ (asuvad x -teljel), $C(0, b)$, $D(0, -b)$ (asuvad y -teljel). Neid nelja punkti nimetatakse ellipsi *tippudeks*. Sellest järeldub, et lõigu AB pikkus on $2a$, st $|AB| = 2a$. Nii lõiku AB kui ka selle pikkust, st arvu $2a$, nimetatakse ellipsi *suuremaks teljeks*. Lõike OA , OB ja arvu a nimetatakse ellipsi *suuremaks poolteljeks*. Lõiku DC ja selle pikkust, st arvu $2b$, nimetatakse ellipsi *väiksemaks teljeks*. Vastavalt nimetatakse lõike OD , OC ja nende pikkusi, st arvu b , ellipsi *väiksemaks poolteljeks*. Ellipsi teljed on selle olulised karakteristikud.

Pole raske märgata, et ellips on sümmeetriline koordinaattelgede suhtes. Olgu $P(x_0, y_0)$ ellipsi punkt, st arvud x_0, y_0 rahuldavad ellipsi võrrandit (11.1). On lihtne veenduda, et sel juhul kuuluvad ellipsile ka punktid $Q(-x_0, y_0)$, $R(x_0, -y_0)$, mis saadakse punkti P peegeldamisel koordinaattelgede suhtes, st nende koordinaadid rahuldavad ellipsi võrrandit (11.1). See tähendab, et kanoonilises koordinaadisüsteemis on koordinaatteljed ellipsi sümmeetriateljed. Lisaks on ellips sümmeetriline ka koordinaadisüsteemi alguspunkti suhtes, st kui ellipsi punkt $P(x_0, y_0)$ peegel-



Joonis 31: Ellips.

dada alguspunkti suhtes, siis saadakse punkt $T(-x_0, -y_0)$, mis on samuti ellipsi punkt.

Definitsioon 27. Kui tasandi kõver on mingi punkti O suhtes sümmeetriline, siis nimetatakse punkti O kõvera *keskpunktiks* ja kõverat nimetatakse sel juhul *tsentraalseks*.

Seega näeme, et ellipsi korral on täidetud nii tsentraalsuse algebraline tingimus $\delta \neq 0$ kui ka eespool antud definitsioonis esitatud geomeetriline tingimus. Seega on ellipsi keskpunkt kanoonilise koordinaadisüsteemi alguspunkt. Kui sirge läbib ellipsi keskpunkti ja lõikab ellipsit punktides R, S , siis lõiku RS nimetatakse ellipsi *diameetriks*.

Lause 10. *Ellipsi sümmeetriateljed on ellipsi kanoonilise koordinaadisüsteemi teljed, kusjuures ellipsi suurem telg paikneb x -teljel. Ellipsi keskpunkt on ellipsi kanoonilise koordinaadisüsteemi alguspunkt.*

Kuna $a \geq b$, defineerime reaalarvu c valemiga

$$c = +\sqrt{a^2 - b^2}. \quad (11.2)$$

Punktid $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ asuvad abstsissiteljel sümmeetriliselt koordinaatide alguspunkti suhtes. Neid punkte nimetatakse ellipsi *fookusteks*. Edaspidi nimetame

punkti F_1 ellipsi vasakpoolseks fookuseks ja punkti F_2 parempoolseks fookuseks. Seega, kui ütleme, et ellips on antud, peame silmas, et on antud selle fookused ja suurem pooltelg a . Nende andmetega on ellips üheselt määratud. Tõepoolest, fookustevahelise kauguse jagamisel kahega saame arvu c ning ellipsi väiksema pooltelje b arvutame valemi (11.2) järgi. Seega on olemas kõik kanoonilise võrrandi jaoks vajalikud andmed, st poolteljed a, b . Lause 10 kohaselt on ellipsi kanoonilise koordinaadisüsteemi abstsissiteljeks ellipsi sümmeetriatelg, mis läbib fookusi. Kanoonilise koordinaadisüsteemi ordinaatteljeks on sirge, mis läbib fookuste moodustatud lõigu keskpunkti (ellipsi keskpunkti) ja on abstsissiteljega risti. Märkime, et nimetatud koordinaattelgede positiivsed suunad võib valida suvaliselt, sest ellipsi kanooniline võrrand sellest ei sõltu.

Definitsioon 28. Arve

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a}$$

nimetatakse vastavalt ellipsi *ekstsentrilisuseks* ja *fokaalparameetriks*.

Uurime ellipsi geomeetrilise kuju sõltuvust ekstsentrilisuse väärtusest. Ekstsentrilisuse definitsioonist järeldub, et $0 \leq \varepsilon < 1$. Kujutame ette, et ellipsi fookused liiguvad ühesuguse kiirusega mööda abstsissitelge ellipsi keskpunkti poole, kuid ellipsi tipud A, B (mis asuvad abstsissiteljel) jäävad paigale. See tähendab, et ellipsi suurem telg $2a$ ei muutu, kuid arv c väheneb. Kuna $b^2 = a^2 - c^2$, siis ellipsi väiksem telg suureneb, st ellipsi tipud D, C (mis asuvad ordinaatteljel) eemalduvad ellipsi keskpunktist. Tuletame meelde, et tipud A, B jäävad paigale. Järelikult hakkab ellips ordinaattelje sihis pikenema ja selle kuju läheneb koordinaatide alguspunktis asuva keskpunktiga ning raadiusega a ringjoone kujule. Piirjuhul saame $c = 0, a = b, \varepsilon = 0$, mis vastab ringjoonele. Siit järeldame, et mida väiksem on ellipsi ekstsentrilisus, seda lähemal on selle geomeetiline kuju ringjoone kujule. Ja vastupidi, mida lähemal on ekstsentrilisuse väärtus arvule 1, seda piklikum on ellips oma suurema telje sihis. On teada, et Päikesesüsteemi planeedid liiguvad ümber Päikese elliptilistel orbiitidel. Maa orbiidi ekstsentrilisus on 0,0167, st Maa orbiit on peaaegu ringjoon. Marsi orbiidi ekstsentrilisus on 0,094, st Marsi orbiit on Maa omast piklikum. Edaspidi huvitab meid just ellips, mitte ringjoon. Seetõttu välistame edaspidi juhu $a = b$ ja eeldame, et $a > b$, st $0 < \varepsilon < 1$.

11.2 Fokaalraadiused

Lõike, mis ühendavad ellipsi punkti selle fookustega, nimetatakse fokaalraadiusteks. Joonisel 31 on näidatud punkti P fokaalraadiused, so lõigud F_1P, F_2P . Edaspidi nimetame nende lõikude pikkusi $r_1 = |F_1P|, r_2 = |F_2P|$ samuti fokaalraadiusteks.

Teoreem 26. Kui punkt $P(x, y)$ on ellipsi punkt ja r_1, r_2 on selle fokaalraadiused, siis kehtivad valemid

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x.$$

Tõestus. Kasutades kahe punkti vahelise kauguse valemit, leiame, et fokaalraadius r_1 avaldub järgmiselt:

$$r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}. \quad (11.3)$$

Punkt P asub ellipsil, järelikult rahuldavad selle koordinaadid võrrandit (11.1). Avaldame y^2 :

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$$

ja asendame selle võrrandisse (11.3). Saame

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x + c)^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 + 2cx + a^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} x^2 + 2cx + a^2} \\ &= \sqrt{(\varepsilon x)^2 + 2cx + a^2} = \sqrt{(\varepsilon x)^2 + 2a \varepsilon x + a^2} = a + \varepsilon x. \end{aligned}$$

Teise valemi tõestus on analoogiline. □

Teoreem 27. Olgu ellipsi suurem telg $2a$, ellipsi fookused asugu punktides F_1, F_2 ning $|F_1 F_2| = 2c$. Punkt P on ellipsi punkt parajasti siis, kui selle fokaalraadiused rahuldavad tingimust

$$|F_1 P| + |F_2 P| = 2a,$$

st fokaalraadiuste summa on võrdne ellipsi suurema teljega.

Tõestus. Jagame tõestuse kaheks osaks.

Tarvilikkus. Märgime, et teoreemi sõnastuses ei räägita ühestki tasandi koordinaadisüsteemist. Kõik suurused, st suurem telg, fokaalraadiused ja fookustevaheline kaugus, on invariantse geomeetrilised suurused, mis ei sõltu koordinaadisüsteemist. Tingimuse $|F_1 P| + |F_2 P| = 2a$ tarvilikkuse tõestamiseks võtame kasutusele koordinaadisüsteemi ja teeme seejärel vajalikud arvutused. Kõige sobivam on ellipsi kanooniline koordinaadisüsteem. Eelmisest punktist teame, et kanoonilise koordinaadisüsteemi abstsissitelg läbib ellipsi fookusi, ordinaattelg on abstsissiteljega risti ja läbib lõigu $F_1 F_2$ keskpunkti, st ellipsi keskpunkti. Varustame tasandi selle koordinaadisüsteemiga. Olgu ellipsi punkti P koordinaadid selles koordinaadisüsteemis (x, y) . Siis rahuldavad need koordinaadid ellipsi kanoonilist võrrandit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} > 0. \quad (11.4)$$

Selles koordinaadisüsteemis kehtivad ka varem tõestatud valemid, st $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$, kus $r_1 = |F_1P|$, $r_2 = |F_2P|$. Nendest järeldub vahetult, et $r_1 + r_2 = 2a$.

Piisavus. Oletame, et punkti P korral kehtib võrdus $r_1 + r_2 = 2a$. Näitame, et leidub tasandi ristkoordinaadisüsteem, milles punkti P koordinaadid x, y rahuldavad ellipsi kanoonilist võrrandit (11.4). Ristkoordinaadisüsteemi konstrueerime järgmiselt:

- abstsissiteljeks võtame fookusi F_1, F_2 läbiva sirge, mille positiivse suuna määrab vektor $\overrightarrow{F_1F_2}$,
- koordinaadisüsteemi alguspunktiks O võtame lõigu F_1F_2 keskpunkti,
- ordinaatteljeks võtame sirge, mis läbib punkti O ja on abstsissiteljega risti.

Selles ristkoordinaadisüsteemis on punktide F_1, F_2 koordinaadid vastavalt $(-c, 0)$, $(c, 0)$ ja võrduse $r_1 + r_2 = 2a$ võime kirjutada kujul

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Viime teise liidetava vasakult poolelt paremale poolele

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

ning tõstame mõlemad pooled ruutu. Saame

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2.$$

Koondades sarnased liikmed

$$\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2},$$

saame

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ehk

$$a^2 - cx = a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}.$$

Tõstes mõlemad pooled ruutu, saame

$$a^4 - 2ca^2x + c^2x^2 = a^2x^2 - 2ca^2x + a^2c^2 + a^2y^2.$$

Koondades sarnased liikmed, saame

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Olgu $b^2 = a^2 - c^2, b > 0$. Eelmise võrrandi kirjutame kujul

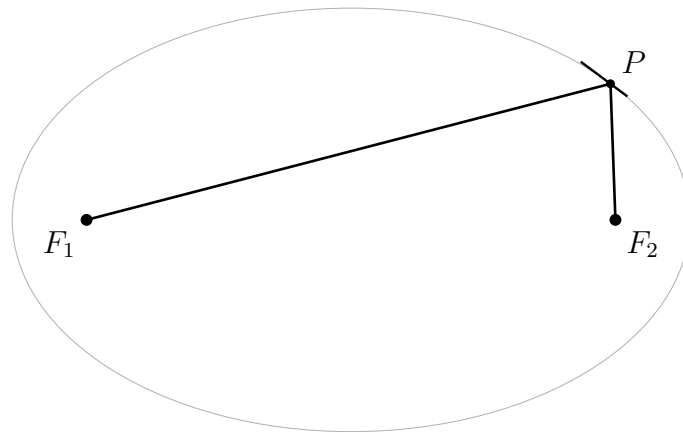
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ning sellega on tõestus lõpetatud. □

Tõestatud teoreemis on antud tarvilik ja piisav tingimus selleks, et tasandi punkt oleks ellipsi punkt. Nagu eespool juba märgitud, ei sisalda see tingimus viidet ühelegi tasandi koordinaadisüsteemile ning on sõnastatud geomeetriliselt invariantsetes terminites. Seetõttu võime anda ellipsi geomeetrilise definitsiooni, mis on samaväärne eespool antud definitsiooniga ega sisalda võrrandeid ega koordinaadisüsteeme.

Definitsioon 29. Fikseerime kaks positiivset reaalarvu $a > 0, c > 0$, kus $a > c$, ja kaks erinevat tasandi punkti F_1, F_2 nii, et $|F_1F_2| = 2c$. Ellipsiks nimetatakse siis tasandi punktide hulka, mille kauguste summa kahest antud punktist F_1, F_2 on konstantne ja võrdne arvuga $2a$.

Ellipsi omadust $r_1 + r_2 = 2a$ kasutatakse praktilistes ülesannetes ellipsi konstrueerimiseks. Paberile märgitakse kaks punkti (ellipsi fookused). Seejärel võetakse mitteelastne niit või painduv traat, mille pikkus on suurem kui märgitud punktide vaheline kaugus. Niidi otsad kinnitatakse näiteks nõeltega märgitud punktidesse. Pliatsi teraga tõmmatakse niit pingule nii, et see toetuks paberile ja niidi osad märgitud punktidest pliatsi terani oleksid sirged. Kui nüüd pliatsit paberil liigutada, niiti lõdvendamata, siis joonistab pliatsi tera ellipsi.



Joonis 32: Ellipsi konstrueerimine niidi ja pliatsi abil

11.3 Juhtsirged

Definitsioon 30. Ellipsi kanoonilises koordinaadisüsteemis nimetatakse sirgeid

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \frac{a}{\varepsilon}$$

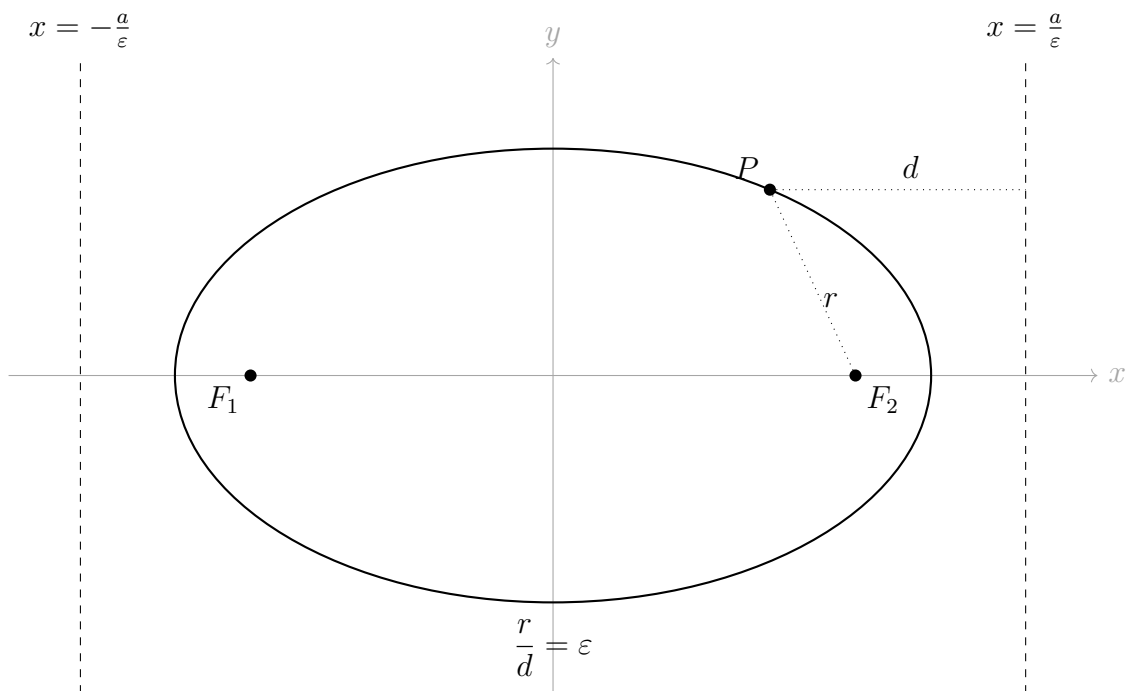
ellipsi *juhtsirgeteks*.

Teoreem 28. Olgu antud ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ja selle punkt $P(x, y)$. Kui d on punkti $P(x, y)$ kaugus juhtsirgest $x = a/\varepsilon$ ($x = -a/\varepsilon$) ning $r = |PF_2|$ ($r = |PF_1|$) on punkti $P(x, y)$ parempoolne fokaalraadius (vasakpoolne fokaalraadius), siis kehtib võrdus

$$\frac{r}{d} = \varepsilon.$$



Tõestus. Teoreemi 26 kohaselt avaldub fokaalraadius $r = |F_2P|$ järgmiselt:

$$r = a - \varepsilon x.$$

Punkti P kaugus d juhtsirgest $x = a/\varepsilon$ on $d = a/\varepsilon - x$. Seega

$$\frac{r}{d} = \frac{a - \varepsilon x}{a/\varepsilon - x} = \varepsilon.$$

□

Kehtib ka vastupidine väide.

Teoreem 29. Olgu tasandil antud sirge $\mathcal{L}$, sellel mitteasuv punkt F ja arv $0 < \varepsilon < 1$. Olgu P tasandi punkt, d punkti P kaugus sirgest $\mathcal{L}$ ja $r = |FP|$, st r on punktide F ja P vaheline kaugus. Tasandi punktide hulk, mille korral kehtib tingimus

$$\frac{r}{d} = \varepsilon, \quad (11.5)$$

on ellips.

Tõestus. Ellipsi definitsiooni kohaselt peame näitama, et tasandil leidub selline ristkoordinaadisüsteem, milles hulga (11.5) iga punkti koordinaadid rahuldavad ellipsi kanoonilist võrrandit. Olgu h punkti F kaugus sirgest $\mathcal{L}$. Enne ristkoordinaadisüsteemi konstrueerimist defineerime kolm positiivset reaalarvu

$$a = \frac{h\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{h\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \quad c = \frac{h\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}.$$

On lihtne veenduda, et nende arvude vahel kehtivad seosed

$$\frac{c}{a} = \varepsilon, \quad a^2 - c^2 = b^2, \quad a > b.$$

Ristkoordinaadisüsteemi tasandil konstrueerime järgmiselt:

- abstsissstelg läbib punkti F risti sirgega $\mathcal{L}$ ning abstsissstelje positiivne suund on suunatud punktist F sirge $\mathcal{L}$ poole,
- abstsisssteljel määrame punkti O nii, et $|\overrightarrow{OF}| = c$ ja vektori $\overrightarrow{OF}$ suund langeb kokku abstsissstelje positiivse suunaga,
- ordinaattelg on abstsisssteljega risti ja läbib punkti O (positiivse suuna võib valida suvaliselt).

Meie konstrueeritud koordinaadisüsteemis on punkti F koordinaadid $(c, 0)$. Olgu (x, y) punkti P koordinaadid selles koordinaadisüsteemis. Siis

$$r = |PF| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Punkti P kauguse sirgest $\mathcal{L}$ saame avaldada järgmiselt:

$$d = c + h - x = \frac{h\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} + h - x = \frac{h}{1 - \varepsilon^2} - x = \frac{a}{\varepsilon} - x.$$

Asendades leitud avaldised r ja d valemisse (11.5), saame

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a - \varepsilon x.$$

Tõstes selle võrrandi mõlemad pooled ruutu, saame

$$x^2 + c^2 + y^2 = a^2 + \varepsilon^2 x^2.$$

Asendades sellesse võrrandisse

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \quad c^2 = a^2 - b^2,$$

viime eelmise võrrandi ellipsi kanoonilisele kujule

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Järelikult on tasandi punktide hulk, mille koordinaadid rahuldavad tingimust (11.5), ellips. $\square$

Teoreemidest (33), (29) järeldub, et tingimus

$$\frac{r}{d} = \varepsilon$$

on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et seda tingimust rahuldavate tasandi punktide hulk oleks ellips. Järelikult võime võtta selle tingimuse ellipsi definitsiooni aluseks. Märgime, et see tingimus on geomeetriliselt invariantne, st ei sõltu koordinaadisüsteemi valikust.

Definitsioon 31. Olgu tasandil antud punkt F , seda punkti mitteläbiv sirge $\mathcal{L}$ ja arv $0 < \varepsilon < 1$. Olgu P tasandi punkt, r selle kaugus punktist F ja d selle kaugus sirgest $\mathcal{L}$. Tasandi punktide hulka, mis rahuldavad tingimust

$$\frac{r}{d} = \varepsilon,$$

nimetatakse ellipsiks.

11.4 Parameetriline võrrand

Käesolevas paragrahvis tuletame ellipsi parameetrilise võrrandi. Käesoleva konsekti esimeses osas vaadeldi sirgete ja tasandite parameetrilisi võrrandeid. Sirge parameetriline võrrand määrab üksühese vastavuse reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ ja sirge punktide vahel, st igale sirge punktile vastab üks ja ainult üks reaalarv. Laiendades seda mõistet tasandi kõveratele, mõistetakse tasandi kõvera parametriseerimise all reeglit, mis seab igale hulka $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ kuuluvale reaalarvule vastavusse kõvera punkti. Hulgateoreetilisest seisukohast nimetatakse kõvera parametriseerimiseks kujutust $\xi : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$, kus $\mathcal{C}$ on tasandi kõvera punktide hulk. See definitsioon on muidugi

liiga üldine ja vajab täpsustamist. Esiteks võib selles definitsioonis reaalarvude hulk $\mathcal{J}$ olla lahtine intervall, poollahtine intervall või kinnine lõik. Lubatud on ka lõpmatute hulkade kasutamine, näiteks $[v, \infty)$. Tavaliselt nõutakse, et kujutus ξ oleks bijektiivne.

Kui tasandil on antud ristkoordinaadisüsteem $(O; x, y)$, siis kõvera $\mathcal{C}$ suvalise punkti $\xi(t)$ koordinaadid parametrizeeringus ξ võib esitada kujul

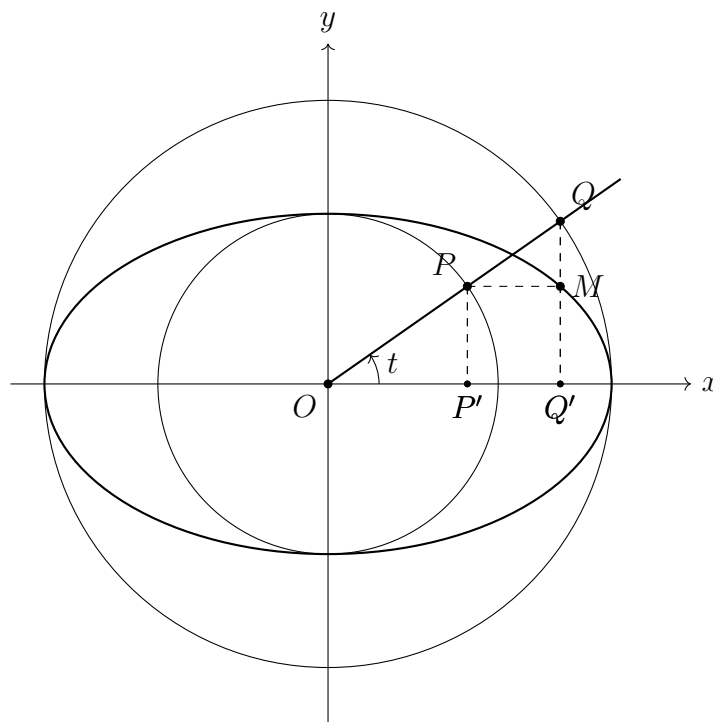
$$\xi(t) = (f(t), g(t)), \quad t \in \mathcal{I}, \quad (11.6)$$

kus $f(t), g(t)$ on muutuja t funktsioonid ning nende funktsioonide määramispiirkond on reaalarvude hulk $\mathcal{I}$. Muutujat t nimetatakse kõvera $\mathcal{C}$ parameetriks ja (11.6) nimetatakse selle kõvera *parameetriliseks võrrandiks*.

Olgu antud ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Konstrueerime kaks ringjoont keskpunktiga koordinaatide alguspunktis ja raadiustega b ja a . Seejärel tõmbame koordinaatide alguspunktist kiire, mis moodustab abstsissiteljega nurga t , nagu on näidatud joonisel 33. Olgu (x, y) ellipsil asuva



Joonis 33: Ellipsi parameetriline võrrand

punkti M koordinaadid. Avaldame selle ellipsi punkti koordinaadid nurga t kaudu.

Meil on

$$\begin{cases} x = |OQ'| = |OQ| \cos t = a \cos t, \\ y = |MQ'| = |PP'| = |OP| \sin t = b \sin t. \end{cases} \quad (11.7)$$

Veendume, et tasandi punkt koordinaatidega $(a \cos t, b \sin t)$ on iga t väärtuse korral ellipsi punkt. Tõepoolest

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(a \cos t)^2}{a^2} + \frac{(b \sin t)^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Defineerime kujutuse $\xi : [0, 2\pi) \rightarrow \mathcal{E}^2$ valemiga

$$\xi(t) = (a \cos t, b \sin t). \quad (11.8)$$

See kujutus seab igale poolintervalli $[0, 2\pi)$ kuuluvale reaalarvule vastavusse ellipsi punkti, mistõttu (11.8) nimetatakse ellipsi parameetriliseks võrrandiks. Märgime, et kujutus ξ määrab bijektiivse vastavuse poolintervalli $[0, 2\pi)$ punktide ja ellipsi punktide vahel.

12 Hüperbool

Selles peatükis uurime hüperbooli geomeetrilist kuju, sümmeetriaid ja omadusi. Hüperbooli võrrand saadi 10. peatükis teist järku joonte klassifitseerimise käigus. Hüperbooli kanooniline võrrand on kujul

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0. \quad (12.1)$$

Arvud a, b nimetatakse hüperbooli *pooltelgedeks*, kusjuures a on hüperbooli *reaalpooltelg* ja b on *imaginaarpooltelg*. Me näeme, et hüperbooli kanooniline võrrand erineb ellipsi kanoonilisest võrrandist ainult märgi poolest võrrandi vasakul poolel. Sellest hoolimata erinevad hüperbooli geomeetrilised omadused oluliselt ellipsi geomeetrilistest omadustest. Kuna ellipsi ja hüperbooli võrrandid erinevad ainult vasaku poole teise liikme ees oleva märgi poolest, on teoreemide tõestused väga sarnased. Seetõttu esitame need lühendatud kujul, kuna üksikasjalikult on need esitatud ellipsi käsitlevas peatükis.

12.1 Hüperbooli struktuur ja sümmeetriad

Uurime hüperbooli, mida määrab võrrand (12.1), geomeetrilist kuju. Lahendame võrrandi y^2 suhtes. Saame

$$y^2 = \frac{b^2(x^2 - a^2)}{a^2}. \quad (12.2)$$

Sellest võrrandist järeldub, et kui $x^2 < a^2$, st vahemikus $-a < x < a$, ei ole võrrandil reaalarvulisi lahendeid. See tähendab, et kahe ordinaatteljega paralleelse sirge $x = -a, x = a$ vahel ei ole hüperboolil punkte. Teisisõnu, kõik hüperbooli punktid asuvad väljaspool eespool mainitud riba. Kui $x = \pm a$, on võrrandil (12.2) ainus lahend $y = 0$. Seega lõikab hüperbool abstsissitelge punktides $(-a, 0), (a, 0)$. Neid punkte nimetatakse hüperbooli *realtippudeks*. Kui $x = 0$, siis võrrandil (12.2) ei ole reaalarvulisi lahendeid. Järelikult ei lõika hüperbool ordinaattelge. Seetõttu nimetatakse punkte koordinaatidega $(0, b)$ ja $(0, -b)$ hüperbooli *imaginaartippudeks*. Punkte koordinaatidega $(0, b)$ ja $(0, -b)$ nimetatakse ka *ebatippudeks*.

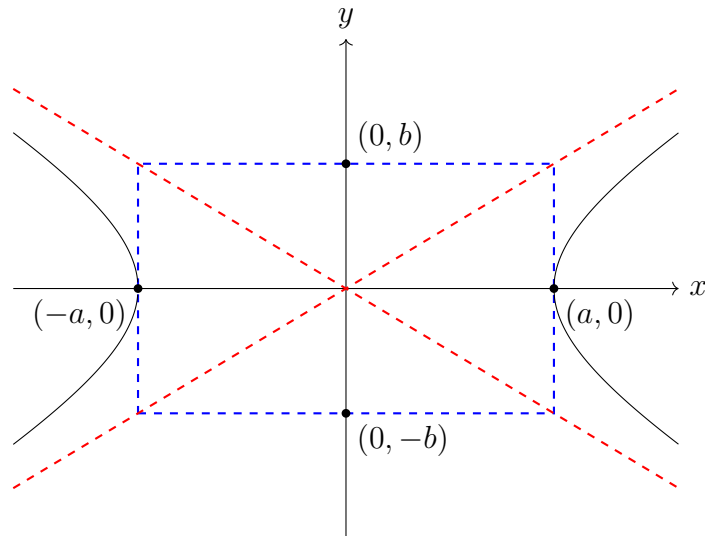
Juhul, kui $x < -a$ või $x > a$, on võrrandil (12.2) kaks lahendit

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Sel juhul on meil neli hüperbooli punkti abstsissidega x ja $-x$:

$$\begin{aligned} P_1(-x, \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}), \quad P_2(x, \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}), \\ Q_1(-x, -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}), \quad Q_2(x, -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}). \end{aligned}$$

On lihtne näha, et punktid P_1, P_2 ja ka punktid Q_1, Q_2 on sümmeetrilised ordinaattelje suhtes. Samal ajal on punktid P_1, Q_1 ning punktid P_2, Q_2 sümmeetrilised abstsissitelje suhtes. Niisiis jõuame järeldusele, et kogu hüperbool asub väljaspool riba, mis on piiratud sirgetega $x = -a, x = a$. Sealjuures on hüperbool sümmeetriline koordinaattelgede suhtes. See tähendab, et hüperbooli kanoonilise koordinaadisüsteemi teljed on tema sümmeetriateljed. Hüperbool koosneb kahest osast, mida nimetatakse tema *harudeks*. Hüperbooli kuju on näidatud joonisel 34. Tavali-



Joonis 34: Hüperbool, selle tipud ja asümptoodid.

selt uuritakse kõvera geomeetrilist kuju sirgete parve abil. See tähendab, et valime mingi sirgete parve ja otsime nende sirgete lõikepunkte kõveraga. Antud juhul kasutame koordinaadisüsteemi alguspunkti läbivate kaldsirgete parve. Iga sellise sirge võrrandi saab esitada kujul $y = kx$, kus k on sirge tõus. Seega on sirge tõus k selle sirgete parve parameeter. Lõikepunktide koordinaadid on võrrandisüsteemi lahendid:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = kx. \end{cases} \quad (12.3)$$

Lahendades selle võrrandisüsteemi x^2 suhtes, saame

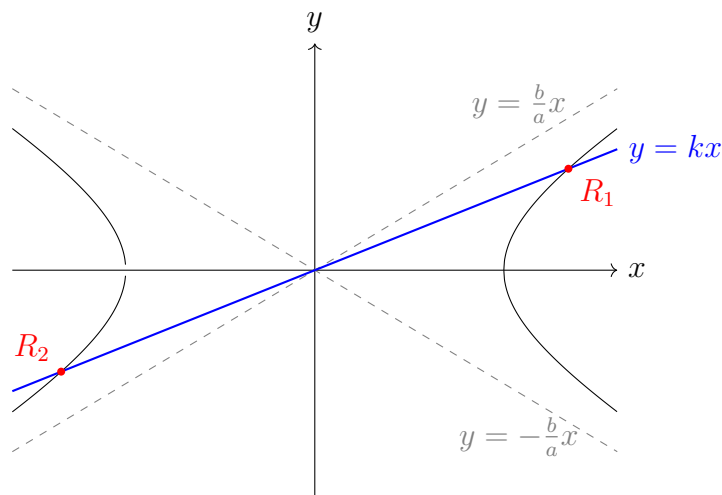
$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - k^2 a^2}. \quad (12.4)$$

Seega, kui $b^2 - k^2 a^2 \leq 0$, siis võrrandisüsteemil (12.3) ei ole lahendeid. Geomeetriliselt tähendab see, et sirged $y = kx$ tõusuga $k \leq -b/a$ või $k \geq b/a$ ei lõika

hüperbooli. Kui aga sirge tõus jääb vahemikku $-b/a < k < b/a$, siis vastav sirge lõikab hüperbooli kahes punktis

$$R_1\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}, \frac{abk}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}\right), \quad R_2\left(-\frac{ab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}, -\frac{abk}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}\right).$$

Leitud koordinaadid näitavad, et punktid R_1, R_2 on koordinaatide alguspunkti suhtes sümmeetrilised. Sellest järeldub, et ka kogu hüperbool on koordinaatide alguspunkti suhtes sümmeetriline. Järelikult on koordinaatide alguspunkt hüperbooli keskpunkt. Seega saab meie poolt varem kasutusele võetud joone tsentraalsuse algebraline definitsioon ($\delta \neq 0$) hüperbooli korral geomeetrilise põhjenduse, sest näitasime, et hüperboolil on keskpunkt.



Lõikamine sirgega $y = kx$

Joonis 35: Hüperbooli asümptootidid

Uurides võrrandi (12.4) lahendite sõltuvust tõusust k , leidsime, et kui tõus rahuldab tingimust $b^2 - k^2a^2 \leq 0$, siis võrrandil ei ole lahendit. Siiski tuleb siin täpsustada. Kui on täidetud tingimus $b^2 - k^2a^2 < 0$, siis võrrandil ei ole reaalarvulisi lahendeid, kuid see võib olla lahendatav kompleksarvude korpus. Kui aga on täidetud võrdsus $b^2 - k^2a^2 = 0$, st $k = \pm b/a$, siis murru nimetaja muutub nulliks ja võrrandil ei ole lahendit ei reaalarvude ega kompleksarvude korpus. Niisiis mängivad kaks sirget tõusuga $k = \pm b/a$ olulist rolli hüperbooli geomeetrilise struktuuri uurimisel.

Definitsioon 32. Sirgeid

$$y = -\frac{b}{a}x, \quad y = \frac{b}{a}x$$

nimetatakse hüperbooli (12.1) *asümptootideks*.

Teoreem 30. Olgu antud hüperbool

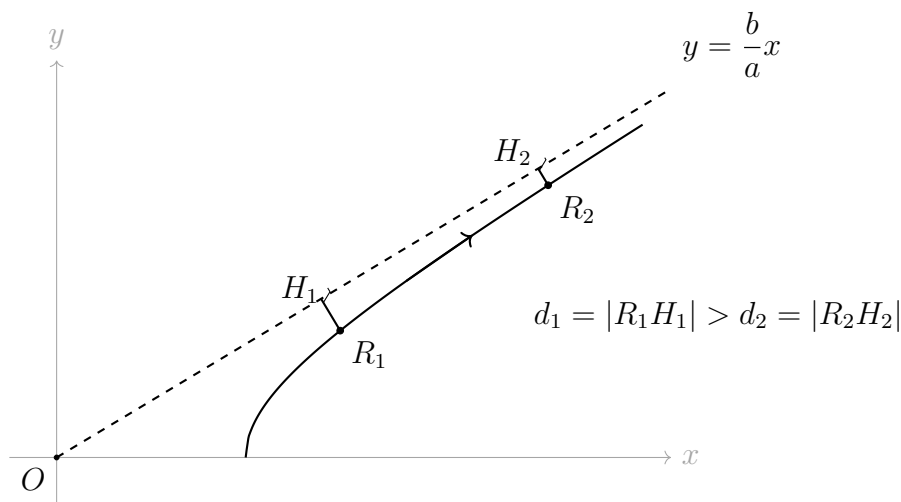
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ja olgu $R_1(x, y)$, kus $x > 0$, $y > 0$, selle hüperbooli punkt. Tähistame tähega d punkti R_1 kauguse asümptoodist

$$y = \frac{b}{a} x.$$

Kui punkt R_1 liigub mööda hüperbooli nii, et selle abstsiss kasvab piiramatult, st $x \rightarrow \infty$, siis punkti R_1 kaugus asümptoodist läheneb nullile, st

$$d \rightarrow 0.$$



Joonis 36: Hüperbooli haru lähenemine asümptoodile

Tõestus. Teoreemis käsitletakse punkti kaugust sirgest. Tuletame meelde, et kui tasandi sirge on antud üldvõrrandiga $Ax + By + C = 0$, siis punkti $P(u, v)$ kaugus sellest sirgest arvutatakse valemiga

$$d = \frac{|Au + Bv + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Rakendades seda valemit hüperbooli punktile $R_1(x, y)$ ja asümptoodile $y = \frac{b}{a} x$, saame kauguse

$$d = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (12.5)$$

Näitame, et punkti R_1 kaugenemisel mööda hüperbooli läheneb kaugus d nullile. Selleks on mugav kasutada hüperbooli parema haru parameetrilist võrrandit. Eelmises paragrahvis tutvustasime tasandi kõvera parameetrilise võrrandi mõistet. Hüperbooli parema haru parameetriline võrrand on kujul $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}^2$, kus

$$\eta(t) = (a \cosh t, b \sinh t), \quad -\infty < t < \infty, \quad (12.6)$$

kus $\cosh t$ on hüperboolne koosinus ja $\sinh t$ on hüperboolne siinus. Hüperboolsed funktsioonid on defineeritud valemitega

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \quad (12.7)$$

On lihtne veenduda, et hüperboolsete funktsioonide korral kehtib samasus

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1. \quad (12.8)$$

Selle samasuse abil saame näidata, et parameetriline võrrand (12.6) kirjeldab hüperbooli parema haru punkte. Tõepoolest, asendades parameetrilise võrrandi hüperbooli kanoonilisse võrrandisse, saame samasuse

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \cosh^2 t}{a^2} - \frac{b^2 \sinh^2 t}{b^2} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Asendades parameetrilise võrrandi (12.6) kauguse valemisse (12.5), saame

$$d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} |\cosh t - \sinh t| = \frac{ab e^{-t}}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (12.9)$$

Ekspponentsiaalfunktsiooni omadusi arvestades saame

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0.$$

□

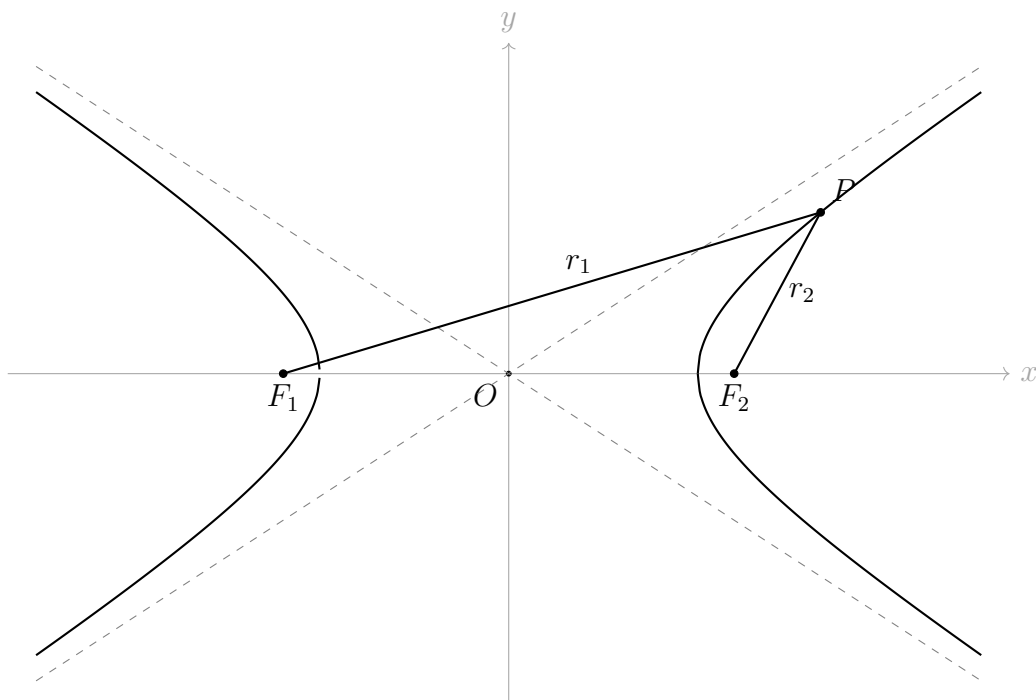
12.2 Hüperbooli fookused ja ekstsentrilisus

Olgu $c = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$. Abstsisssteljel asuvaid punkte $F_1(-c, 0)$ ja $F_2(c, 0)$ nimetatakse hüperbooli *fookusteks*. Kui $P(x, y)$ on hüperbooli punkt, siis lõikude F_1P ja F_2P pikkusi nimetatakse punkti $P(x, y)$ *fokaalraadiusteks* ning tähistatakse vastavalt r_1 ja r_2 .

Definitsioon 33. Arve

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a}$$

nimetatakse vastavalt hüperbooli *ekstsentrilisuseks* ja *fokaalparameetriks*.



Joonis 37: Hüperbooli fookused ja fokaalraadiused

Ekstsentrilisuse definitsioonist järeldub, et hüperbooli juhul $\varepsilon > 1$.

Teoreem 31. Kui punkt $P(x, y)$ asub hüperbooli paremal harul, st $x \geq a$, siis avalduvad tema fokaalraadiused valemitega

$$r_1 = \varepsilon x + a, \quad r_2 = \varepsilon x - a. \quad (12.10)$$

Kui punkt $P(x, y)$ asub hüperbooli vasakul harul, st $x \leq -a$, siis avalduvad tema fokaalraadiused valemitega

$$r_1 = -\varepsilon x - a, \quad r_2 = -\varepsilon x + a. \quad (12.11)$$

Tõestus. Tõestame valemi $r_2 = \varepsilon x - a$ hüperbooli parema haru punkti korral. Kasutades kahe punkti vahelise kauguse valemit ja valemit (12.2), saame

$$\begin{aligned} r_2 &= |F_2 P| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2} \\ &= \sqrt{\frac{c^2 x^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}ax + c^2 - b^2} = \sqrt{\varepsilon^2 x^2 - 2\varepsilon ax + a^2} \\ &= \sqrt{(\varepsilon x - a)^2} = \varepsilon x - a. \end{aligned}$$

Täisruudust ruutjuure võtmisel arvestasime, et hüperbooli parema haru korral kehtib võrratus $\varepsilon x - a > 0$. Ülejäänud valemid tõestatakse analoogiliselt. $\square$

Hüperbooli punkti fokaalraadiuste arvutamise valemid saab esitada kompaktsel kujul

$$r_1 = |\varepsilon x + a|, \quad r_2 = |\varepsilon x - a|.$$

Sellisel kujul on valemid rakendatavad hüperbooli iga punkti korral, st punkte ei ole vaja eraldi käsitleda hüperbooli vasaku ja parema haru järgi.

Tuletame meelde ellipsi tähelepanuväärset geomeetrilist omadust, mille kohaselt ellipsi suvalise punkti fokaalraadiuste summa on konstantne ja võrdne arvuga $2a$, kus a on ellipsi suurem pooltelg. Analoogiline omadus kehtib ka hüperbooli korral, st hüperbooli suvalise punkti fokaalraadiuste *vahe* absoluutväärtus on konstantne ja võrdne arvuga $2a$, kus a on hüperbooli reaalselg.

Teoreem 32. *Olgu antud hüperbool kanoonilise võrrandiga*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Punkt $P(x, y)$ on selle hüperbooli punkt parajasti siis, kui punkti $P(x, y)$ fokaalraadiused r_1, r_2 rahuldavad tingimust

$$|r_1 - r_2| = 2a. \quad (12.12)$$

Tõestus. Selle teoreemi tõestus on analoogiline vastava teoreemi tõestusega ellipsi korral. Seetõttu esitame selle lühendatud kujul. Tingimuse (12.12) tarvilikkus järeldub eelmisest teoreemist. Tõepoolest, kui $P(x, y)$ on hüperbooli parema haru punkt, siis saame valemide (12.10) kasutades

$$r_1 - r_2 = \varepsilon x + a - \varepsilon x + a = 2a.$$

Hüperbooli vasaku haru punkti korral saame

$$r_2 - r_1 = -\varepsilon x + a + \varepsilon x + a = 2a.$$

Ühendades need kaks juhtu üheks, näeme, et hüperbooli iga punkti korral kehtib võrdus

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Tõestuse teises osas (tingimuse piisavus) eeldame, et on antud kaks punkti $F_1 \neq F_2$ ja positiivne reaalarv a nii, et $2a < |F_1 F_2|$. Punktide F_1 ja F_2 vahelise kauguse tähistame sümboliga $2c$. Siis $a < c$.

Vaatleme tasandi punktide hulka $\mathfrak{H}$, mille iga punkti kauguste vahe absoluutväärtus kahest antud punktist F_1, F_2 on konstantne ja võrdne arvuga $2a$. Kui P

on hulga $\mathfrak{H}$ suvaline punkt ja $r_1 = |F_1P|$, $r_2 = |F_2P|$, siis $|r_1 - r_2| = 2a$. Meie eesmärk on näidata, et tasandi punktide hulk $\mathfrak{H}$ on hüperbool. Märgime, et me ei eelda tasandil mingi koordinaadisüsteemi. Kuna hüperbool defineeriti kanoonilise võrrandi abil, peame konstrueerima tasandil ristkoordinaadisüsteemi ja näitama, et hulga $\mathfrak{H}$ iga punkti koordinaadid rahuldavad hüperbooli kanoonilist võrrandit.

Ristkoordinaadisüsteemi konstrueerime järgmiselt:

- abstsissiteljeks võtame punkte F_1, F_2 läbiva sirge, mille positiivse suuna määrab vektor $\overrightarrow{F_1F_2}$,
- koordinaadisüsteemi alguspunktiks O võtame lõigu F_1F_2 keskpunkti,
- ordinaatteljeks võtame sirge, mis läbib punkti O ja on abstsissiteljega risti.

Selles ristkoordinaadisüsteemis on punktide F_1, F_2 koordinaadid vastavalt $(-c, 0)$, $(c, 0)$ ja võrduse $|r_1 - r_2| = 2a$ võime kirjutada kujul

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a.$$

Viime teise liidetava vasakult poolelt paremale poolele

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

ning tõstame mõlemad pooled ruutu. Saame

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2.$$

Koondades sarnased liikmed

$$\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2},$$

saame

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ehk

$$cx - a^2 = a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}.$$

Tõstes mõlemad pooled ruutu, saame

$$a^4 - 2ca^2x + c^2x^2 = a^2x^2 - 2ca^2x + a^2c^2 + a^2y^2.$$

Koondades sarnased liikmed, saame

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Olgu $b^2 = c^2 - a^2$, $b > 0$. Eelmise võrrandi kirjutame kujul

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ning sellega on tõestus lõpetatud. □

Tõestatud teoreemist järeldub, et tingimus $|r_1 - r_2| = 2a$ on samaväärne hüperbooli kanoonilise võrrandi abil antud definitsiooniga. Seega võime hüperbooli defineerida järgmiselt:

Definitsioon 34. Fikseerime kaks positiivset reaalarvu $a > 0, c > 0$, kus $a > c$, ja kaks erinevat tasandi punkti F_1, F_2 nii, et $|F_1 F_2| = 2c$. Hüperbooliks nimetatakse tasandi punktide hulka, mille iga punkti kauguste vahe absoluutväärtus kahest antud punktist F_1, F_2 on konstantne ja võrdne arvuga $2a$.

12.3 Hüperbooli juhtsirged

Definitsioon 35. Hüperbooli kanoonilises koordinaadisüsteemis nimetatakse sirgeid

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \frac{a}{\varepsilon}$$

hüperbooli *juhtsirgeteks*.

Teoreem 33. Olgu antud hüperbool

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ja selle punkt $P(x, y)$. Kui d on punkti $P(x, y)$ kaugus juhtsirgest $x = a/\varepsilon$ ($x = -a/\varepsilon$) ning $r = |PF_2|$ ($r = |PF_1|$) on punkti $P(x, y)$ parempoolne fokaalraadius (vasakpoolne fokaalraadius), siis kehtib võrdus

$$\frac{r}{d} = \varepsilon.$$

Tõestus. Teoreemi 31 kohaselt avaldub fokaalraadius $r = |F_2 P|$ järgmiselt:

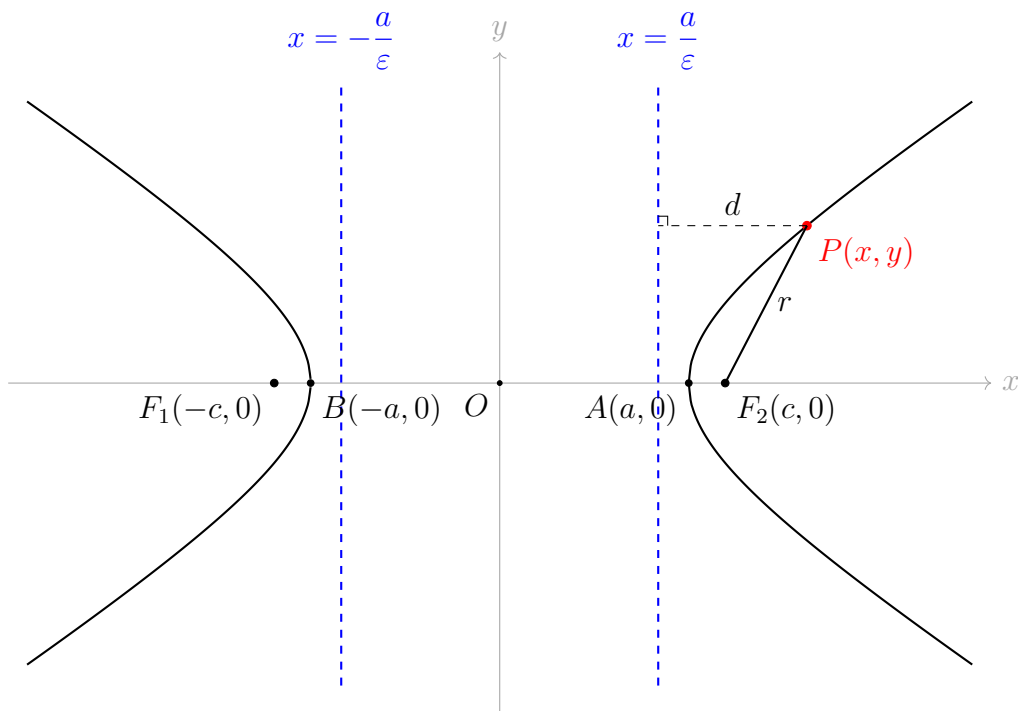
$$r = \varepsilon x - a.$$

Punkti P kaugus d juhtsirgest $x = a/\varepsilon$ on $d = x - a/\varepsilon$. Seega

$$\frac{r}{d} = \frac{\varepsilon x - a}{x - a/\varepsilon} = \varepsilon.$$

□

Kehtib ka vastupidine väide.



Joonis 38: Hüperbooli juhtsirged

Teoreem 34. Olgu tasandil antud sirge $\mathcal{L}$, sellel mitteasuv punkt F ja arv $\varepsilon > 1$. Olgu P tasandi punkt, d punkti P kaugus sirgest $\mathcal{L}$ ja $r = |FP|$, st r on punktide F ja P vaheline kaugus. Tasandi punktide hulk, mille korral kehtib tingimus

$$\frac{r}{d} = \varepsilon, \quad (12.13)$$

on hüperbool.

Tõestus. Hüperbooli definitsiooni kohaselt peame näitama, et tasandil leidub selline ristkoordinaadisüsteem, milles hulga (12.13) iga punkti koordinaadid rahuldavad hüperbooli kanoonilist võrrandit. Olgu h punkti F kaugus sirgest $\mathcal{L}$. Enne ristkoordinaadisüsteemi konstrueerimist defineerime kolm positiivset reaalarvu

$$a = \frac{h\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}, \quad b = \frac{h\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}, \quad c = \frac{h\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1}.$$

On lihtne veenduda, et nende arvude vahel kehtivad seosed

$$\frac{c}{a} = \varepsilon, \quad c^2 - a^2 = b^2.$$

Ristkoordinaadisüsteemi tasandil konstrueerime järgmiselt:

- abstsistelg läbib punkti F risti sirgega $\mathcal{L}$ ning abstsistelje positiivne suund on suunatud punktist F sirge $\mathcal{L}$ poole,
- abstsisteljel määrame punkti O nii, et $|\overrightarrow{OF}| = c$ ja vektori $\overrightarrow{OF}$ suund langeb kokku abstsistelje positiivse suunaga,
- ordinaattelg on abstsisteljega risti ja läbib punkti O (positiivse suuna võib valida suvaliselt).

Meie konstrueeritud koordinaadisüsteemis on punkti F koordinaadid $(c, 0)$. Olgu (x, y) punkti P koordinaadid selles koordinaadisüsteemis. Siis

$$r = |PF| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Punkti P kauguse sirgest $\mathcal{L}$ saame avaldada järgmiselt:

$$d = x - c + h = x - \frac{h\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1} + h = x - \frac{h}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{a}{\varepsilon} - x.$$

Asendades leitud avaldised r ja d valemisse (12.13), saame

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a - \varepsilon x.$$

Tõstes selle võrrandi mõlemad pooled ruutu, saame

$$x^2 + c^2 + y^2 = a^2 + \varepsilon^2 x^2.$$

Asendades sellesse võrrandisse

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}, \quad c^2 = a^2 + b^2,$$

viime eelmise võrrandi hüperbooli kanoonilisele kujule

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Järelikult on tasandi punktide hulk, mille koordinaadid rahuldavad tingimust (12.13), hüperbool. $\square$

Definitsioon 36. Olgu tasandil antud punkt F , seda punkti mitteläbiv sirge $\mathcal{L}$ ja arv $\varepsilon > 1$. Olgu P tasandi punkt, r selle kaugus punktist F ja d selle kaugus sirgest $\mathcal{L}$. Tasandi punktide hulka, mis rahuldavad tingimust

$$\frac{r}{d} = \varepsilon,$$

nimetatakse hüperbooliks.

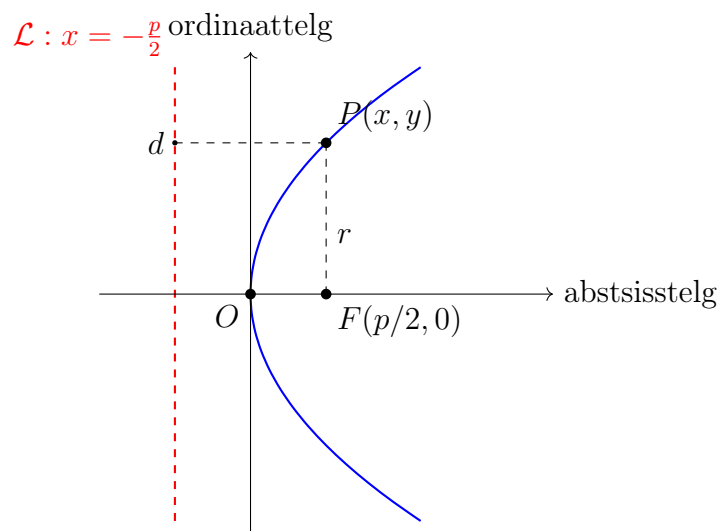
13 Parabool

Käesolevas peatükis uurime parabooli geomeetrilist kuju, selle geomeetrilisi omadusi ja sümmeetriaid. Parabooli definitsioon anti teist järku joonte klassifikatsiooni käsitlevas peatükis. Tuletame meelde, et seal näidati ka, et parabool ei ole tsentraalne joon, vaid sellel on lõpmata palju keskpunkte ning kõik need asuvad ühel sirgel.

13.1 Parabooli sümmeetriad

Teist järku joont nimetatakse *parabooliks*, kui tasandil leidub ristkoordinaadisüsteem, milles selle joone punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit $y^2 = 2px$, kus p on positiivne reaalarv, mida nimetatakse parabooli *fokaalparameetriks*. Võrrandit $y^2 = 2px$ nimetatakse parabooli *kanooniliseks võrrandiks* ja koordinaadisüsteemi, milles parabooli võrrand on kujul $y^2 = 2px$, nimetatakse parabooli *kanooniliseks koordinaadisüsteemiks*.

Parabooli kanoonilisest võrrandist järeldub, et kanoonilistes koordinaatides parabool on sümmeetriline abstsissitelje suhtes. Tõepoolest, kui punkt $P(x, y)$ on parabooli punkt, st ta rahuldab võrrandit $y^2 = 2px$, siis ka punkt $P(x, -y)$ kuulub paraboolile. Tõepoolest $(-y)^2 = y^2 = 2px$. Seega on abstsissitelg parabooli sümmeetriatelg. Tuletame meelde, et kõvera lõikepunkte sümmeetriateljega nimetatakse kõvera tippudeks. Parabool lõikab abstsissitelge koordinaatide alguspunktis. Tõepoolest, kui $y = 0$, siis $2px = 0$, kust järeldub $x = 0$. Seega asub parabooli tipp kanoonilise koordinaadisüsteemi alguspunktis.



Joonis 39: Parabool.

13.2 Parabooli geomeetriline struktuur

Punkti $F(p/2, 0)$, mis asub abstsissiteljel, nimetatakse parabooli *fookuseks*. Sirget $x = -p/2$ nimetatakse parabooli *juhtsirgeks*.

Teoreem 35. *Punkt $P(x, y)$ kuulub paraboolile parajasti siis, kui $r = d$, kus r on punkti P kaugus parabooli fookusest F ja d on punkti P kaugus parabooli juhtsirgest.*

Tõestus. Tingimuse $r = d$ tarvilikkuse tõestamiseks eeldame, et tasandil on antud ristkoordinaadisüsteem ja võrrand $y^2 = 2px$, $p > 0$. Järelikult on parabool määratud kanoonilise võrrandiga ning koordinaadisüsteem on kanooniline. Näitame, et tasandi iga punkti $P(x, y)$ korral, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit $y^2 = 2px$, kehtib võrdus $r = d$. Kanoonilises koordinaadisüsteemis on fookuse koordinaadid $F(p/2, 0)$. Seega

$$r = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}.$$

Teiselt poolt

$$d = x + \frac{p}{2}.$$

Näitame, et need arvud on võrdsed. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} \\ &= \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = x + \frac{p}{2} = d. \end{aligned} \quad (13.1)$$

Olgu nüüd tasandil antud sirge $\mathcal{L}$ ja punkt F , mis ei asu sellel sirgel. Tähistame punkti F kaugust sirgest $\mathcal{L}$ tähega p . Seame tasandile ristkoordinaadisüsteemi. Abstsissiteljeks võtame sirge, mis läbib punkti F ja on risti sirgega $\mathcal{L}$. Positiivseks suunaks loeme suuna sirgest $\mathcal{L}$ punkti F . Olgu A abstsissitelje ja sirge $\mathcal{L}$ lõikepunkt. Eelnevalt sisseviidud tähistuse kohaselt kehtib $|AF| = p$. Koordinaatide alguspunktiks valime lõigu AF keskpunkti ja tähistame O . Ordinaattelje valime nii, et see läbiks koordinaatide alguspunkti O ja oleks abstsissiteljega risti, ning suuname selle nii, et tasandi orientatsioon oleks positiivne. Selles koordinaadisüsteemis on punkti F koordinaadid $(p/2, 0)$ ja sirge $\mathcal{L}$ võrrandiks $x = -p/2$. Näitame, et tasandi punktid, mis paiknevad võrdse kaugusel punktist F ja sirgest $\mathcal{L}$, moodustavad parabooli, s.t. nende punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit $y^2 = 2px$. Kirjutame tingimuse $r = d$ koordinaatides

$$r = d \Rightarrow \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \quad (13.2)$$

Tõestame võrrandi mõlemad pooled ruutu. Saame

$$(x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2 \Rightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Pärast võrdsete liikmete taandamist saame $y^2 = 2px$. Seega teoreem on tõestatud. $\square$

Tõestatud teoreem annab tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et tasandi punkt kuuluks paraboolile. Märkime, et see tingimus on sõnastatud geomeetriliselt invariantsetes terminites ega kasuta tasandil mingit koordinaadisüsteemi. Kasutades tõestatud teoreemi, võime anda parabooli definitsiooni, mis on samaväärne eespool antud definitsiooniga.

Definitsioon 37. Olgu tasandil antud sirge ja punkt, mis ei asu sellel sirgel. Parabooliks nimetatakse tasandi punktide hulka, mille punktid asuvad antud punktist ja antud sirgest võrdsel kaugusel.

Võttes kokku ellipsi, hüperbooli ja parabooli geomeetriliste omaduste uurimise tulemused, võime neid kirjeldada ühtse käsitluse raames.

Teoreem 36. Olgu tasandil antud sirge $\mathcal{L}$, punkt F , mis ei asu sellel sirgel, ja reaalarv $\varepsilon > 0$. Olgu P tasandi punkt, r selle kaugus punktist F ja d selle kaugus sirgest $\mathcal{L}$. Siis on tasandi punktide hulk, mis rahuldab tingimust

$$\frac{r}{d} = \varepsilon,$$

- kui $\varepsilon < 1$, ellips,
- kui $\varepsilon = 1$, parabool,
- kui $\varepsilon > 1$, hüperbool.

Tõestatud teoreemist järeldub valem parabooli punkti $P(x, y)$ fokaalraadiuse r arvutamiseks. Tõepoolest, valemist $r = d$ järeldub kergesti

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

Parabooli kanoonilises võrrandis avaldub koordinaat x ilmutatud kujul koordinaadi y kaudu. Seetõttu saame parabooli kõige lihtsama parametriseringu, kui valime parameetriks t koordinaadi y , näiteks $y = pt$. Sel juhul saame

$$\zeta(t) = (\frac{pt^2}{2}, pt), \quad -\infty < t < +\infty.$$

14 Võrrand polaarkoordinaatides

Selles peatükis tuletame ellipsi, hüperbooli ja parabooli võrrandi polaarkoordinaatides. Selle võrrandi tähelepanuväärne omadus seisneb selles, et see on ellipsi, hüperbooli ja parabooli korral sama kujuga. Võrrandi üheks parameetriks on vastava kõvera ekstsentrilisus. Ekstsentrilisuse väärtuse järgi saab kindlaks teha, millise kõveraga on tegemist: kui ekstsentrilisus on väiksem kui üks, on tegemist ellipsiga; kui see on suurem kui üks, hüperbooliga; ning kui ekstsentrilisus on võrdne ühega, parabooliga.

14.1 Joone võrrand polaarkoordinaatides

Et määrata tasandil polaarkoordinaatide süsteem, valime punkti O , mis on koordinaatide alguspunkt. Seda punkti nimetatakse polaarkoordinaatide süsteemi pooluseks. Seejärel valime poolusest lähtuva kiire, mida nimetatakse polaarteljeks. Nüüd on polaarkoordinaatide süsteem määratud. Näitame, kuidas määratakse punkt P polaarkoordinaadid selles süsteemis. Kõigepealt ühendame punkti P poolusega O . Lõigu pikkust $|OP|$ nimetatakse punkti P polaarraadiuseks ja see on punkti esimene koordinaat polaarkoordinaatide süsteemis. Tähistame $r = |OP|$. Nurka, mis saadakse pöörates polaartelge vastupäeva kuni see ühtib lõiguga OP , nimetatakse punkti P polaarnurgaks ja tähistatakse φ . See on punkti P teine koordinaat polaarkoordinaatide süsteemis. Polaarkoordinaate kirjutatakse punkti taha sulgudesse kujul $P(r, \varphi)$.

Kui määrata tasandil ristkoordinaatide süsteem x, y nii, et selle alguspunkt asub polaarkoordinaatide pooluses, abstsissstelg on polaartelg ja ordinaattelg on polaarteljega risti ning läbib poolust, siis saab ristkoordinaadid x, y avaldada polaarkoordinaatide r, φ kaudu järgmiste valemitega:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (14.1)$$

Kõvera võrrand polaarkoordinaatides kirjutatakse kujul $r = r(\varphi)$, st antakse polaarraadiuse funktsionaalne sõltuvus polaarnurgast. Kui on teada kõvera võrrand polaarkoordinaatides $r = r(\varphi)$, siis saame kirjutada selle parameetrilise võrrandi ristkoordinaatides

$$\alpha(\varphi) = \left(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi \right).$$

Selles parameetrilises võrrandis on parameetriks polaarnurk φ . Diferentseerides parameetri φ järgi, saame arvutada kõvera puutujavektori ristkoordinaadid.

14.2 Ellipsi, hüperbooli ja parabooli võrrand

Meie eesmärk selles paragrahvis on tuletada ellipsi, hüperbooli ja parabooli võrrand polaarkoordinaatides. Kõveraks võtame ellipsi. Kõigepealt tuleb konstrueerida polaarkoordinaatide süsteem. Tähele tuleb panna järgmist iseärasust: polaarkoordinaatide poolus asetatakse ellipsi vasakusse fookusesse F_1 . Seega, erinevalt kanoonilisest ristkoordinaatide süsteemist, mille algus asub ellipsi keskpunktis, asub polaarkoordinaatide poolus ellipsi vasakus fookuses. Polaarteljeks võtame kiire, mis lähtub poolusest F_1 ja läbib paremat fookust F_2 . Lõigu F_1F_2 keskpunkti ehk ellipsi keskpunkti tähistame tähega O . Joonisel näitame ka ellipsi vasakut juhtsirget ning tähistame punkti, kus see lõikab ellipsi sümmeetriatelge (mis läbib fookuseid), tähega M . Olgu $P(r, \varphi)$ ellipsi suvaline punkt. Meie eesmärk on leida võrrand, mida rahuldavad ainult ellipsi punktide polaarkoordinaadid. Olgu d kaugus punktist P vasaku juhtsirgeni ja r punkti P vasakpoolne fokaalraadius. Tarvilik ja piisav tingimus selleks, et punkt P kuuluks ellipsile, on võrrand

$$\frac{r}{d} = \varepsilon, \quad (14.2)$$

kus ε on ellipsi ekstsentrilisus. Valitud polaarkoordinaatide süsteemis punkti P vasak fokaalraadius ühtib punkti P polaarraadiusega. Seega tuleb leida, kuidas kaugus juhtsirgest d on avaldatav polaarnurga φ ja polaarraadiuse r kaudu. Teame, et kaugus ellipsi keskpunktist juhtsirge ja sümmeetriatelje lõikepunktini, so lõigu OM pikkus, on a/ε , kus a on ellipsi suurem pooltelg. Kaugus ellipsi keskpunktist fookuseni on c . Seega lõigu OF_1 pikkus on c . Sellest järeldub, et lõigu MF_1 pikkus on

$$|MF_1| = \frac{a}{\varepsilon} - c.$$

Olgu $\tilde{P}$ punkti P ortogonaalprojektsioon ellipsi sümmeetriateljele, mis läbib fookuseid. Siis $d = |M\tilde{P}| = |MF_1| + |F_1\tilde{P}|$. Kuna $|F_1\tilde{P}| = r \cos \varphi$, saame

$$d = \frac{a}{\varepsilon} - c + r \cos \varphi.$$

Asendades saadud avaldise võrrandisse (14.2), saame

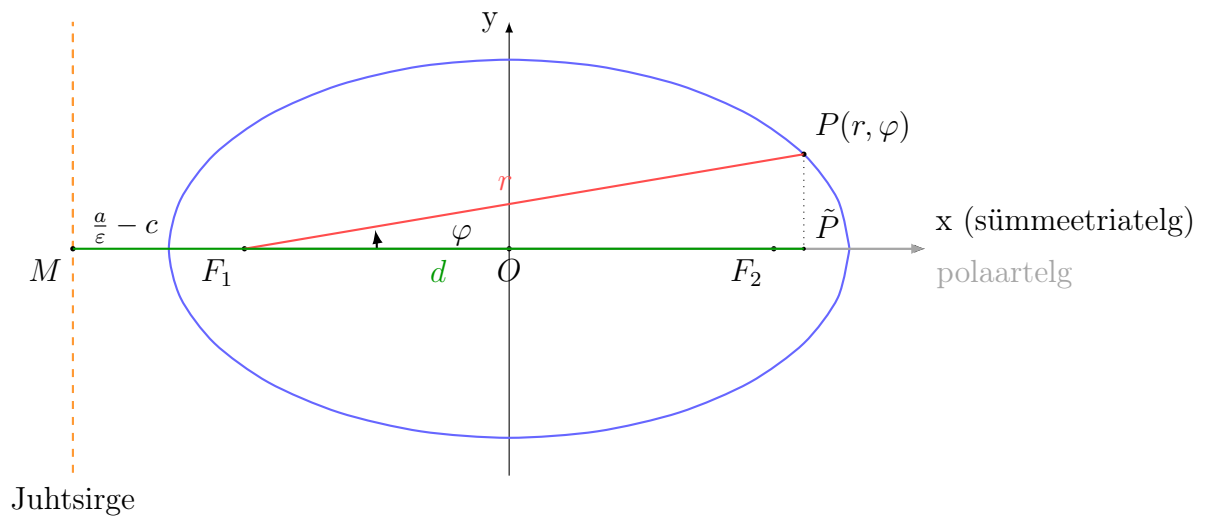
$$r = a - \varepsilon c + \varepsilon r \cos \varphi,$$

ehk

$$r = \frac{a - \varepsilon c}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \quad (14.3)$$

On lihtne näidata, et murru lugejas olev avaldis on võrdne ellipsi fokaalparameetriga p . Tõepoolest,

$$a - \varepsilon c = a - \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p.$$



Joonis 40: Ellipsi võrrand polaarkoordinaatides.

Seega saame ellipsi võrrandi polaarkoordinaatides

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \quad (14.4)$$

Sarnaste arvutuste abil võib saada hüperbooli võrrandi polaarkoordinaatides. Kui asetada polaarkoordinaatide süsteemi poolus hüperbooli paremasse fookusesse F_2 ja suunata polaarTELg paremale mööda abstsissitelge, siis on hüperbooli parema haru võrrand polaarkoordinaatides kujul

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Kui aga poolus asetada vasakusse fookusesse F_1 ja polaarTELg suunata parema fookuse F_2 suunas, siis on hüperbooli parema haru võrrand polaarkoordinaatides kujul

$$r = \frac{p}{\varepsilon \cos \varphi - 1}.$$

Ülesanded

1. Antud on hüperbool. Polaarkoordinaatide süsteemi poolus asub hüperbooli paremas fookuses ja polaarTELg on suunatud paremale mööda abstsissitelge. Olgu $P(r, \varphi)$ hüperbooli parema haru punkt ning r, φ selle polaarkoordinaadid. Ilma kasutamata hüperbooli võrrandit polaarkoordinaatides, tõestada võrratus $\varepsilon \cos \varphi < 1$.

15 Lõikumine sirgega, puutujad

15.1 Ellips

Käesolevas paragrahvis vaatleme ellipsi lõikumist sirgega. Võttes arvesse ellipsi geomeetrilist kuju, jõuame järeldusele, et suvalise sirge korral on kolm võimalust, st sirge lõikab ellipsit kahes punktis, sirgel ei ole ellipsiga ühiseid punkte või sirgel on ellipsiga üks ühine punkt. Viimasel juhul nimetame sirget ellipsi puutujaks. Seega võime sirge ja ellipsi lõikumist vaadeldes elementaarsete vahenditega tuletada ellipsi puutuja võrrandi. Peatükis 16 kirjeldame üldisemat ja universaalsemat lähenemist puutuja mõistele kõvera korral, mille aluseks on diferentsiaalarvutus.

Eeldame, et antud on ellips ja tasand on varustatud selle ellipsi kanoonilise ristkoordinaadisüsteemiga. Olgu a, b ellipsi poolteljed, siis on selle võrrand kujul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Olgu antud sirge $y = kx + m$. Meie eesmärk on uurida sirge ja ellipsi lõikepunkte. Ilmselt on ellipsi ja sirge lõikepunktide koordinaadid võrrandisüsteemi lahendid

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = kx + m. \end{cases} \quad (15.1)$$

Asendame teise võrrandi esimesse ja kirjutame saadud võrrandi x suhtes ruutvõrrandi kujul

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2kmx + a^2m^2 - a^2b^2 = 0. \quad (15.2)$$

Selle võrrandi lahendid on sirge ja ellipsi lõikepunktide abstsissid. Kuna võrrand (15.2) on ruutvõrrand, sõltuvad selle lahendid diskriminandist, st

- kui diskriminant on positiivne, on meil kaks reaalarvulist lahendit,
- kui diskriminant on null, on meil üks lahend,
- kui diskriminant on negatiivne, reaalarvulisi lahendeid ei ole.

Geomeetriselt on esimene võimalus samaväärne sellega, et sirge lõikab ellipsit kahes punktis. Kolmas võimalus on samaväärne sellega, et sirge ei lõika ellipsit, st asub täielikult väljaspool ellipsit. Meie jaoks on kõige huvitavam teine võimalus, st juht, kui diskriminant on null. Geomeetriselt vastab sellele olukord, kus sirgel on ellipsiga üks ühine punkt. Sel juhul nimetame sirget ellipsi puutujaks. Tõepoolest, olgu sirge $y = kx + m$ ja ellipsi lõikepunkte kaks. Hakkame sirget paralleelselt mingis suunas nihutama. See on samaväärne sellega, et k jääb konstantseks, kuid

m muutub. Mingist hetkest alates hakkavad sirge ja ellipsi lõikepunktide teineteisele lähenema, liikudes mööda ellipsi kaart, ning piirjuhul ühinevad üheks punktiks. Seda lõikuva sirge piirasendit nimetame ellipsi puutujaks. See geomeetriline pilt on algebraga hästi kooskõlas. Tõepoolest, kui diskriminant on null, käsitleme ruutvõrrandi ühte lahendit kaheks kokkulangevaks lahendiks (lahendi algebraline kordsus on kaks).

Arvutame ruutvõrrandi (15.2) diskriminandi

$$\mathfrak{D} = 4a^2b^2(k^2a^2 + b^2 - m^2).$$

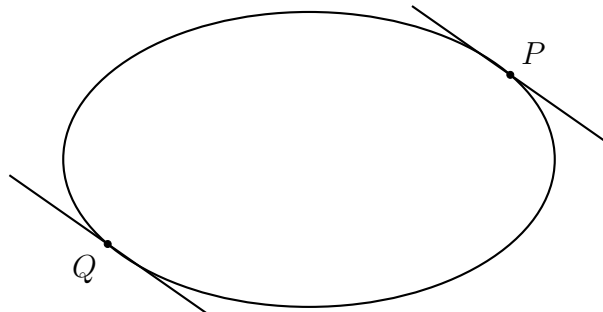
Sellest järeldub

Lause 11. Olgu antud sirge võrrand $y = kx + m$ ja ellipsi võrrand

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Kui

- $m^2 < k^2a^2 + b^2$, siis sirge lõikab ellipsit kahes punktis,
- $m^2 = k^2a^2 + b^2$, siis sirge on ellipsi puutuja,
- $m^2 > k^2a^2 + b^2$, siis sirgel ei ole ellipsiga ühiseid punkte.



Joonis 41: Kaks paralleelset puutujat ellipsile

Sellest lausest järeldub, et iga tõusu k väärtuse korral on ellipsil kaks paralleelset puutujat. See on tõepoolest nii (vt joonis 41).

Järgnevate arvutuste lihtsustamiseks võtame kasutusele tähistuse

$$\omega = +\sqrt{k^2a^2 + b^2}.$$

Lahendades ruutvõrrandi (15.2) tingimusel, et diskriminant on null, leiame puutepunktide koordinaadid ja puutujate võrrandid

$$\begin{aligned} P_1\left(-\frac{k a^2}{\omega}, \frac{b^2}{\omega}\right), \quad y &= kx + \omega, \\ Q_1\left(\frac{k a^2}{\omega}, -\frac{b^2}{\omega}\right), \quad y &= kx - \omega, \\ P_2\left(\frac{k a^2}{\omega}, \frac{b^2}{\omega}\right), \quad y &= -kx + \omega, \\ Q_2\left(-\frac{k a^2}{\omega}, -\frac{b^2}{\omega}\right), \quad y &= -kx - \omega. \end{aligned}$$

Nendes võrrandites eeldame, et $k \geq 0$. Nüüd eeldame, et puutepunkti koordinaadid on antud. Olgu need koordinaadid (x_0, y_0) , st selliste koordinaatidega punkt asub ellipsil ehk teisisõnu rahuldavad selle punkti koordinaadid ellipsi kanoonilist võrrandit. Leiame ellipsi puutuja võrrandi punktis (x_0, y_0) . Vaatleme punkti P_1 juhtu. Saame

$$x_0 = -\frac{k a^2}{\omega}, \quad y_0 = \frac{b^2}{\omega}.$$

Lahendame selle võrrandisüsteemi tingimusel $y_0 \neq 0$:

$$\omega = \frac{b^2}{y_0}, \quad k = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Asendame leitud avaldised puutuja võrrandisse $y = kx + \omega$. Saame

$$y = -\frac{b^2 x_0 x}{a^2 y_0} + \frac{b^2}{y_0}.$$

Saadud võrrandi saab kergesti viia kujule

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \quad (15.3)$$

Ülejäänud juhud viivad sama võrrandini. Võrrandit (15.3) nimetatakse *ellipsi puutuja võrrandiks* puutepunktis (x_0, y_0) . Jätsime välja juhu $y_0 = 0$, kuid see juht vastab ellipsi abtsisisteljel asuvatele tippudele. Geomeetriliselt on ilmne, et nende tippude korral on ellipsi puutujad ordinaatteljega paralleelsed ja nende võrrandid on $x = \pm a$, mis vastab samuti leitud võrrandile.

Saadud võrrandite abil saab leida ellipsi puutujate võrrandeid mitmesugustes ülesannetes.

Näide 3. Olgu antud ellips

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

ja punkt $P(25/3, 0)$. Leida punktist P ellipsile tõmmatud puutujate võrrandid. Vas-
tus esitada kujul $Ax + By + C = 0$.

Arvutame $k^2a^2 + b^2 = 25k^2 + 16$. Järelikult on puutujate võrrandid kujul

$$kx - y \pm \sqrt{25k^2 + 16} = 0.$$

Viime vasakus pooles oleva ruutjuure paremale poolele, tõstame mõlemad pooled
ruutu ja kirjutame saadud võrrandi k suhtes ruutvõrrandi kujul

$$(x^2 - 25)k^2 - 2xyk + y^2 - 16 = 0.$$

Kuna punkt P asub puutujal, peavad selle koordinaadid saadud võrrandit rahulda-
ma. Asendades punkti P koordinaadid sellesse võrrandisse, saame

$$k^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow k = \pm \frac{3}{5}.$$

Kui $k = 3/5$, saame kaks puutujat

$$\frac{3}{5}x - y + 5 = 0, \quad \frac{3}{5}x - y - 5 = 0.$$

Neist teine läbib punkti P . Analoogiliselt vaatleme juhtu $k = -3/5$. Seega on otsi-
tavate puutujate võrrandid

$$3x - 5y - 25 = 0, \quad 3x + 5y - 25 = 0.$$

15.2 Hüperbool

Vaatleme nüüd hüperbooli puutujate leidmist. Meie lähenemine puutujate võr-
randite leidmisele on samasugune nagu ellipsi korral. See tähendab, et uurime
võrrandisüsteemi lahendeid, kus üheks võrrandiks on sirge võrrand $y = kx + m$ ja
teiseks hüperbooli kanooniline võrrand. Selle süsteemi lahendid on hüperbooli ja
sirge lõikepunktide koordinaadid. Meid huvitab juht, kui süsteemil on ainult üks
lahend. Sel juhul on sirge hüperbooli puutuja.

Vaatleme võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = kx + m. \end{cases} \quad (15.4)$$

Asendades teise võrrandi esimesse ja kirjutades saadud võrrandi tundmatu x suhtes
ruutvõrrandi kujul, saame

$$(a^2k^2 - b^2)x^2 + 2a^2kmx + a^2m^2 + a^2b^2 = 0. \quad (15.5)$$

Selle ruutvõrrandi lahendid on hüperbooli ja sirge lõikepunktide abstsissid. Juhul, kui sellel võrrandil on üks lahend, st diskriminant on null, saame ühe lahendi (algebralise kordsusega 2), mis geomeetriliselt tähendab, et sirge puutub hüperbooli. Arvutades ruutvõrrandi (15.5) diskriminandi, saame

$$\mathfrak{D} = a^2 b^2 (m^2 + b^2 - k^2 a^2).$$

Lause 12. Sirge $y = kx + m$ on hüperbooli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

puutuja parajasti siis, kui kehtib tingimus

$$m^2 = a^2 k^2 - b^2. \quad (15.6)$$

Sellest lausest järeldub, et hüperbooli puutuja ei saa läbida koordinaatide alguspunkti. Tõepoolest, oletame, et sirge $y = kx + m$ on hüperbooli puutuja ja läbib koordinaatide alguspunkti, st $m = 0$. Sel juhul peab kehtima tingimus $a^2 k^2 - b^2 = 0$, st $k = \pm b/a$. See tähendab, et sirge võrrand on kujul $y = (\pm b/a) x$. Need on aga hüperbooli asümptootide võrrandid ning me oleme tõestanud, et asümptootid lähenevad hüperboolile piiramatult, kuid ei lõika seda kunagi, st neil ei ole hüperbooliga ühiseid punkte. Oleme jõudnud vastuoluni. Järelikult ei saa hüperbooli puutuja läbida koordinaatide alguspunkti.

Võtame kasutusele positiivse reaalarvu $\omega = +\sqrt{a^2 k^2 - b^2}$. Siis $m = \pm \omega$. Leiame sirge ja hüperbooli puutepunktide koordinaadid. Lahendades võrrandi (15.5) x suhtes, leiame

$$x = -\frac{a^2 k m}{\omega^2}. \quad (15.7)$$

Edaspidi eeldame, et k on positiivne reaalarv, ning tähistame puutuja tõusu vastavalt puutuja asendile tasandil kas k või $-k$. Kui puutepunkt asub esimeses veerandis, st hüperbooli parema haru ülemisel osal ($x > 0, y > 0$), siis järeldub hüperbooli kujust vahetult, et puutuja tõus on positiivne, $k > 0$. Samal ajal järeldub valemist (15.7), et peab kehtima $m < 0$, st $m = -\omega$. Lõplikult saame puutepunkti koordinaadid ja puutuja võrrandi

$$P_1\left(\frac{a^2 k}{\omega}, \frac{b^2}{\omega}\right), \quad y = kx - \omega.$$

Analoogiliselt

$$P_2\left(-\frac{a^2 k}{\omega}, -\frac{b^2}{\omega}\right), \quad y = kx + \omega,$$

$$P_3\left(-\frac{a^2 k}{\omega}, \frac{b^2}{\omega}\right), \quad y = -kx - \omega,$$

$$P_4\left(\frac{a^2 k}{\omega}, -\frac{b^2}{\omega}\right), \quad y = -kx + \omega.$$

Leiame nüüd hüperbooli puutuja võrrandi juhul, kui puutepunkti koordinaadid on antud. Vaatleme ainult esimeses veerandis asuva puutepunkti juhtu; kõik ülejäänud juhud viivad sama tulemuseni. Olgu $P(x_0, y_0)$ puutepunkt. Siis

$$x_0 = \frac{a^2 k}{\omega}, \quad y_0 = \frac{b^2}{\omega}.$$

Lahendades selle võrrandisüsteemi k, ω suhtes tingimusel $y_0 \neq 0$, leiame

$$k = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}, \quad \omega = \frac{b^2}{y_0}.$$

Asendades saadud avaldised puutuja võrrandisse, saame

$$y = kx - \omega = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x - \frac{b^2}{y_0}.$$

Selle võrrandi saab kergesti viia kujule

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \quad (15.8)$$

Saadud võrrandit nimetatakse hüperbooli puutuja võrrandiks punktis $P(x_0, y_0)$. Tuletasime selle võrrandi tingimusel $y_0 \neq 0$, kuid on lihtne veenduda, et nüüd võime sellest piirangust loobuda, sest saadud võrrand annab õige tulemuse ka juhul $y_0 = 0$. Tõepoolest, kui $y_0 = 0$, siis saame hüperbooli kaks abstsissiteljel asuvat reaaltippu, st punktid $(-a, 0)$ ja $(a, 0)$, ning võrrand (15.8) omandab nendes punktides kuju $x = \pm a$, mis vastab hüperbooli puutujatele selle reaaltippudes.

15.3 Parabool

Parabooli puutujate leidmiseks vaatleme parabooli lõikumist sirgega. Tuletame meelde arvutuste üldist skeemi. Koostame võrrandisüsteemi, mille üheks võrrandiks on parabooli võrrand ja teiseks sirge võrrand $y = kx + m$. Märgime, et see lähemine on üldine ning parabooli võrrand ei pea tingimata olema kanooniline, kuid käesolevas paragrahvis vaatleme kanoonilise võrrandi juhtu. Lahendame eespool nimetatud võrrandisüsteemi, asendades parabooli võrrandis muutuja y avaldisega $kx + m$. Saadud võrrandi vasaku poole kirjutame muutuja x suhtes ruutvõrrandi kujul. Arvutame selle võrrandi diskriminandi ja võrdsustame selle nulliga. Nii saame tingimuse, mille korral sirge $y = kx + m$ on parabooli puutuja.

Olgu parabool antud kanoonilise võrrandiga $y^2 = 2px$. Kirjutame võrrandisüsteemi, mille lahendid on parabooli ja sirge $y = kx + m$ lõikepunktide koordinaadid. See süsteem on kujul

$$\begin{cases} y = kx + m, \\ y^2 = 2px. \end{cases} \quad (15.9)$$

Asendades esimese võrrandi teise võrrandisse ja kirjutades saadud võrrandi x suhtes ruutvõrrandi kujul, saame

$$k^2x^2 + 2(km - p)x + m^2 = 0. \quad (15.10)$$

Arvutame selle võrrandi diskriminandi

$$\mathfrak{D} = (km - p)^2 - k^2m^2 = p^2 - 2kmp. \quad (15.11)$$

Diskriminant on null parajasti siis, kui kehtib tingimus

$$p = 2km. \quad (15.12)$$

Lause 13. Sirge $y = kx + m$ on parabooli $y^2 = 2px$ puutuja parajasti siis, kui $p = 2km$.

Leitud tingimusest järeldub, et juhul, kui $y = kx + m$ on parabooli puutuja võrrand, ei saa sirge tõus k ega vabaliige m olla null, st $k \neq 0, m \neq 0$. Lisaks peavad fokaalparameetri p positiivsuse tõttu sirge tõus k ja vabaliige m puutuja võrrandis olema sama märgiga. Parabooli $y^2 = 2px$ puutuja võrrand antud sirge tõusu k korral on kujul

$$y = kx + \frac{p}{2k} \quad (15.13)$$

ja see puutuja puutub parabooli punktis

$$P\left(\frac{p}{2k^2}, \frac{p}{k}\right). \quad (15.14)$$

Sirgete perre võrranditega $y = kx + m$ ei kuulu ordinaatteljega paralleelsed sirged. Kuid sel juhul, nagu näitab parabooli kuju kanoonilises koordinaadisüsteemis, on meil üks puutuja, milleks on ordinaattelg ise ja mis puutub parabooli selle tipus.

Leiame parabooli puutuja võrrandi juhul, kui puutepunkt $P(x_0, y_0)$ on antud. Siis

$$x_0 = \frac{p}{2k^2}, \quad y_0 = \frac{p}{k}.$$

Korrutades puutuja võrrandi (15.13) mõlemad pooled arvuga p/k , saame

$$\frac{p}{k}y = px + p\frac{p}{2k^2},$$

ehk

$$y_0y = p(x + x_0). \quad (15.15)$$

Näide 4. Olgu antud ellipsi ja parabooli kanoonilised võrrandid

$$\frac{x^2}{3} + y^2 = 1, \quad y^2 = 2x.$$

Leida ellipsi ja parabooli ühispuutujate võrrandid.

Olgu antud ellipsi ja parabooli ühispuutuja võrrand kujul $y = kx + m$. Teame, et ellipsi korral peab kehtima tingimus $m^2 = k^2 a^2 + b^2$, kus a, b on ellipsi poolteljed. Kuna $a = \sqrt{3}, b = 1$ on see tingimus kujul $m^2 = 3k^2 + 1$. Parabooli korral peab kehtima tingimus $p = 2km$, mis antud juhul on kujul $2km = 1$ ($p = 1$). Kuna otsitav puutuja on samaaegselt nii ellipsi kui ka parabooli puutuja, peavad mõlemad eespool toodud tingimused kehtima samaaegselt. Seega saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} m^2 = 3k^2 + 1, \\ mk = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Avaldades teisest võrrandist m muutuja k kaudu ja asendades saadud avaldise esimesse võrrandisse, saame

$$\frac{1}{4k^2} = 3k^2 + 1 \Rightarrow 12k^4 + 4k^2 - 1 = 0.$$

Seda võrrandit lahendades leiame

$$k^2 = \frac{-2 \pm 4}{12}.$$

Ilmselt sobib meile ainult üks lahend $k^2 = 1/6$ ehk

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Siis

$$m = \frac{1}{2k} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Lõplikult saame kahe ühispuutuja võrrandid

$$x - \sqrt{6}y + 3 = 0, \quad x + \sqrt{6}y + 3 = 0.$$

16 Puutujate võrrandid

Selles paragrahvis käsitleme teist järku joone puutuja küsimust. Saame ellipsi, hüperbooli ja parabooli puutuja võrrandid.

16.1 Funktsiooni graafiku puutuja

Puutuja kõverale tasandil on sirge. Seetõttu meenutame, et sirge tasandil võib olla määratud üldvõrrandi, parameetrilise võrrandi või kanoonilise võrrandi abil. Need võrrandid on järgmised:

$$Ax + By + C = 0, \quad (\text{sirge üldvõrrand}), \quad (16.1)$$

$$x = s_1 t + x_0, \quad y = s_2 t + y_0, \quad (\text{sirge parameetriline võrrand}), \quad (16.2)$$

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2}, \quad (\text{sirge kanooniline võrrand}). \quad (16.3)$$

Vektor, mis on moodustatud sirge üldvõrrandi kordajatest $\vec{N} = (A, B)$, on sirge normaalvektor. Vektor $\vec{s} = (s_1, s_2)$ on sirge sihivektor ning punkt $P(x_0, y_0)$ asub sirgel. Muutuja t nimetatakse kõvera parameetriks ja see võib võtta mistahes reaalarvulisi väärtusi.

Tuletame meelde, et funktsiooni $y = y(x)$ graafikuks nimetatakse tasandi punktihulka $(x, y(x))$. Kui funktsioon $y = y(x)$ on punktis $x = x_0$ diferentseeruv, siis funktsiooni $y = y(x)$ graafiku puutuja võrrand punktis $x = x_0$ on

$$y - y_0 = y'(x)|_{x=x_0} (x - x_0). \quad (16.4)$$

16.2 Parametriseeritud joone puutuja

Kõver tasandil võib olla antud parameetrilise võrrandiga

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)),$$

kus t on kõvera parameeter, $x(t), y(t)$ on muutujast t sõltuvad funktsioonid, mille määramispiirkond on $I \subset \mathbb{R}$, kus I on kas lõik, poollõik või vahemik. Tavaliselt eeldatakse, et need funktsioonid on diferentseeruvad, st parameetri suvalise väärtuse t korral eksisteerivad tuletised $x'(t), y'(t)$ ja need on pidevad t funktsioonid. Funktsioonid $x(t), y(t)$ määravad kujutuse $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Kujutust α nimetatakse *parametriseeritud jooneks* tasandil.

Ellipsi, hüperbooli ja parabooli parameetrilised võrrandid on järgmised:

$$\mathbf{e}(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad I = [0, 2\pi), \quad (\text{ellips pooltelgedega } a, b), \quad (16.5)$$

$$\mathbf{h}(t) = (a \cosh t, b \sinh t), \quad I = \mathbb{R}, \quad (\text{hüperbooli parem haru}), \quad (16.6)$$

$$\mathbf{p}(t) = \left(\frac{t^2}{2p}, t\right), \quad I = \mathbb{R}, \quad (\text{parabool}). \quad (16.7)$$

Olgu tasandil kõver, mis on antud parameetrilise võrrandiga $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, kus $t \in I \subset \mathbb{R}$. Vaatleme kõvera puutuja küsimust, kui puutepunktiks on kõvera punkt $P(x_0, y_0)$, kus $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ ja $t_0 \in I$. Eeldame, et parameetri väärtuse $t = t_0$ korral on funktsiooni $x(t)$ tuletis nullist erinev, st $x'(t)|_{t=t_0} \neq 0$. Kuna funktsioon $x(t)$ on pidevalt diferentseeruv, siis pöördfunktsiooni teoreemi kohaselt leidub punkti t_0 ümbrus $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, kus δ on positiivne reaalarv, nii et selles ümbruses on funktsioon $x(t)$ pööratav, st eksisteerib pöördfunktsioon, mida tähistame $t = t(x)$. Lisaks avaldub pöördfunktsiooni tuletis algse funktsiooni tuletise kaudu järgmiselt:

$$t'(x) = \frac{1}{x'(t)} \Big|_{t=t(x)}. \quad (16.8)$$

Asendame pöördfunktsiooni $t = t(x)$ kõvera parameetrilisse võrrandisse $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Kasutades pöördfunktsiooni omadust $x(t(x)) \equiv x$, saame tasandi punktihulga $(x, y(t(x)))$. Ühest küljest on see kõvera $\alpha(t)$ punktihulk, sest oleme tegelikult teinud kõvera ümberparameetriseerimise, st läinud üle parameetrilt t parameetrile x . Ilmselt jääb kõvera punktihulk ümberparameetriseerimisel samaks. Teisest küljest on punktihulk $(x, y(t(x)))$ funktsiooni $y = y(t(x))$ graafik. Seega on kõvera $\alpha(t)$ puutuja võrrand punktis $P(x_0, y_0)$ kujul (16.4), st

$$y - y_0 = y'(t(x))|_{x=x_0}(x - x_0). \quad (16.9)$$

Kuna funktsioon $y = (t(x))$ on liitfunktsioon, avaldub selle tuletis muutuja x järgi järgmiselt:

$$\frac{dy(t(x))}{dx} = \frac{dy(t)}{dt} \frac{dt(x)}{dx}. \quad (16.10)$$

Kasutades pöördfunktsiooni tuletise valemit (16.8) ja asendades (16.10) parema poole puutuja võrrandisse (16.9), saame puutuja võrrandi kujul

$$\frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{x - x_0}{x'(t_0)}, \quad y'(t_0) = \frac{dy}{dt} \Big|_{t=t_0}, \quad x'(t_0) = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_0}. \quad (16.11)$$

Võrreldes saadud võrrandit sirge kanoonilise võrrandiga (16.3), jõuame järeldusele, et vektor $x'(t_0), y'(t_0)$ on kõvera $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ puutuja suunavektor punktis $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$.

Definitsioon 38. Olgu antud parameetriline kõver $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Vektorit $\vec{\alpha}'(t) = (x'(t), y'(t))$ nimetatakse kõvera α puutujavektoriks ehk kiirusvektoriks punktis $\alpha(t)$.

Valemist (16.11) järeldub, et parameetrilise kõvera kiirusvektor on selle kõvera puutuja suunavektor. Seega, kui leiame diferentseerimise teel parameetrilise kõvera kiirusvektori mingis punktis, saame kirjutada selle kõvera puutuja võrrandi ühes eespool toodud kujus (16.1), (16.2), (16.3).

16.3 Ellipsi puutuja

Kasutades parameetrilise kõvera kiirusvektori mõistet, tuletame üldise võrrandi ellipsi puutujale mingis selle punktis. Olgu antud ellipsi kanooniline võrrand

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Selle ellipsi parameetriline võrrand on

$$\mathbf{e}(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Olgu

$$x_0 = a \cos t_0, \quad y_0 = b \sin t_0 \quad (16.12)$$

mõne ellipsi punkti koordinaadid. Leiame ellipsi puutuja üldvõrrandi selles punktis. Arvutades tuletised selles punktis, saame ellipsi kiirusvektori

$$\vec{\mathbf{e}}'(t_0) = (-a \sin t_0, b \cos t_0).$$

Kasutades valemeid (16.12), saame

$$\sin t_0 = \frac{y_0}{b}, \quad \cos t_0 = \frac{x_0}{a}.$$

Asendades need väärtused kiirusvektori valemisse, saame

$$\vec{\mathbf{e}}'(t_0) = \left(-\frac{ay_0}{b}, \frac{bx_0}{a}\right). \quad (16.13)$$

Et koostada puutuja üldvõrrand, on meil vaja puutuja normaalvektorit, s.t. vektorit, mis on kiirusvektoriga risti. Saame puutuja normaalvektori, kui vahetame kiirusvektori koordinaadid omavahel ja korrutame ühe neist arvuga -1 . Tähistame ellipsi puutuja normaalvektorit punktis, mis vastab parameetri väärtusele $t = t_0$, kujul $\vec{N}(t_0)$. Siis

$$\vec{N}(t_0) = \left(\frac{bx_0}{a}, \frac{ay_0}{b}\right).$$

Sellest järeldub, et ellipsi puutuja üldvõrrand punktis $P(x_0, y_0)$ on

$$\frac{bx_0}{a}(x - x_0) + \frac{ay_0}{b}(y - y_0) = 0.$$

Jagades võrrandi mõlemad pooled arvuga ab ja avades sulud, saame

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 0.$$

Kuna punkt $P(x_0, y_0)$ asub ellipsil, siis rahuldavad selle koordinaadid ellipsi kanoonilist võrrandit:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Asendades selle võrduse eelmisse võrrandisse, saame ellipsi puutuja üldvõrrandi:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \quad (16.14)$$

Teoreem 37. *Olgu ellips antud kanoonilise võrrandiga*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Olgu $P(x_0, y_0)$ ellipsi punkt. Siis on ellipsi puutuja võrrand punktis $P(x_0, y_0)$ kujul

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

16.4 Hüperbooli puutuja

Vaatleme nüüd hüperbooli puutuja küsimust mingis tema punktis. Olgu hüperbool antud kanoonilise võrrandiga

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Olgu $P(x_0, y_0)$ hüperbooli parempoolse haru punkt. Märgime, et samad arvutused vasakpoolse haru korral viivad samale tulemusele. Kuna $P(x_0, y_0)$ on hüperbooli punkt, siis selle koordinaadid rahuldavad hüperbooli võrrandit, st kehtib võrdsus

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \quad (16.15)$$

Et leida hüperbooli kiirusvektor punktis $P(x_0, y_0)$, kasutame hüperbooli parempoolse haru parametrizeerimist

$$\mathbf{h}(t) = (a \cosh t, b \sinh t).$$

Olgu punktile $P(x_0, y_0)$ vastav parameetri väärtus $t = t_0$, st

$$x_0 = a \cosh t_0, \quad y_0 = b \sinh t_0.$$

Siis on kiirusvektor punktis $t = t_0$ kujul

$$\vec{\mathbf{h}}'(t_0) = (a \sinh t_0, b \cosh t_0).$$

Avaldades kiirusvektori koordinaadid punkti $P(x_0, y_0)$ koordinaatide kaudu, saame

$$\vec{h}'(t_0) = \left(\frac{ay_0}{b}, \frac{bx_0}{a}\right).$$

Normaalvektori saame, kui vahetame kiirusvektori koordinaadid ja korrutame ühe neist arvuga -1 . Seega on normaalvektor kujul

$$\vec{N}(t_0) = \left(-\frac{bx_0}{a}, \frac{ay_0}{b}\right).$$

Järelikult on hüperbooli puutuja võrrand punktis $P(x_0, y_0)$

$$-\frac{bx_0}{a}(x - x_0) + \frac{ay_0}{b}(y - y_0) = 0.$$

Jagades mõlemad pooled arvuga $-ab$ ja avades sulud, saame võrrandi kujul

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}.$$

Arvestades, et kehtib võrdsus (16.15), saame lõplikult

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

Teoreem 38. *Olgu hüperbool antud oma kanoonilise võrrandiga*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Olgu $P(x_0, y_0)$ hüperbooli punkt. Siis on hüperbooli puutuja võrrand punktis $P(x_0, y_0)$ kujul

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

16.5 Parabooli puutuja

Järgmiseks tuletame parabooli puutuja võrrandi, kui parabool on antud kanoonilise võrrandiga $y^2 = 2px$. Parabooli puutuja võrrandi leidmiseks kasutame parabooli parametrilist võrrandit

$$\mathbf{p}(t) = \left(\frac{t^2}{2p}, t\right), t \in \mathbb{R}.$$

Olgu $P(x_0, y_0)$, kus $x_0 = \frac{t_0^2}{2p}$, $y_0 = t_0$, parabooli punkt. Leiame parabooli kiirusvektori

$$\vec{p}'(t_0) = \left(\frac{t_0}{p}, 1\right).$$

Siis on puutuja normaalvektor kujul

$$\vec{N}(t_0) = (-1, \frac{y_0}{p}).$$

Parabooli puutuja võrrand on

$$(-1)(x - x_0) + \frac{y_0}{p}(y - y_0) = 0.$$

Avades sulud ja arvestades, et $y_0^2 = 2px_0$, saame puutuja võrrandi kujul

$$y_0y = p(x + x_0).$$

Teoreem 39. *Olgu parabool antud kanoonilise võrrandiga $y^2 = 2px$ ja $P(x_0, y_0)$ parabooli punkt. Siis on parabooli puutuja võrrand punktis $P(x_0, y_0)$ kujul*

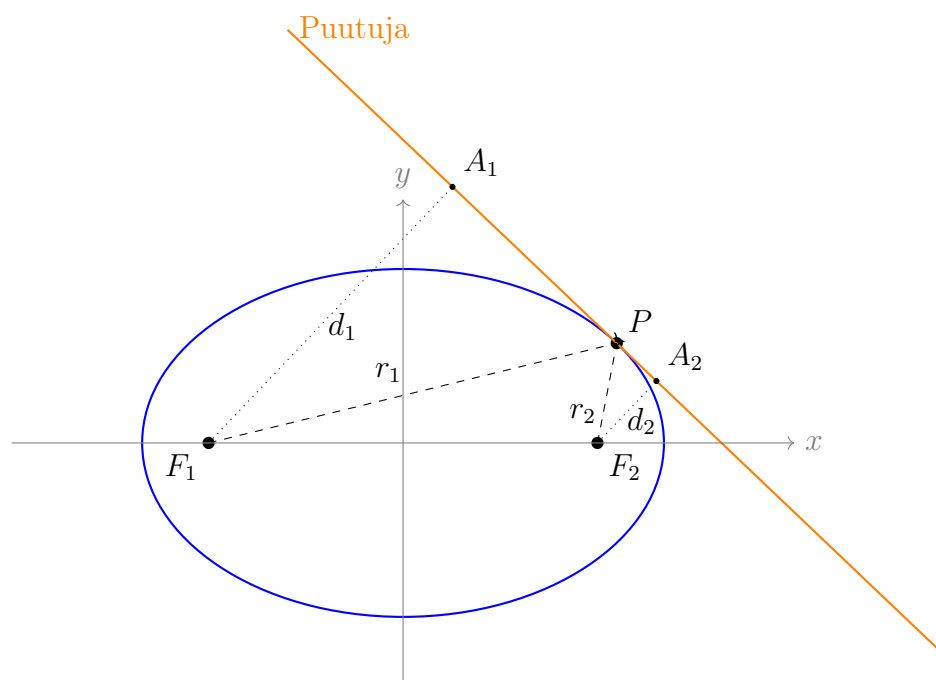
$$y_0y = p(x + x_0).$$

17 Puutujate geomeetrilised omadused

Selles paragrahvis tõestame olulisi ellipsi, hüperbooli ja parabooli puutujate omadusi. Neid omadusi kasutatakse tehnikas ja arhitektuuris.

17.1 Ellipsi puutuja omadus

Teoreem 40. *Ellipsi puutuja mistahes punktis moodustab võrdsed nurgad ellipsi fokaalraadiustega.*



Joonis 42: $\angle F_1PA_1 = \angle F_2PA_2$

Tõestus. Olgu antud ellips, selle fookused F_1, F_2 , ellipsi punkt P ning selle fokaalraadiused, mida tähistame r_1 (vasak fokaalraadius F_1P) ja r_2 (parem fokaalraadius F_2P). Punktis P tõmbame ellipsile puutuja. Selle moodustatud nurka vasaku fokaalraadiusega tähistame ϕ_1 ning parema fokaalraadiusega ϕ_2 . Seega $\phi_1 = \angle F_1PA_1, \phi_2 = \angle F_2PA_2$. Vaja on tõestada, et $\phi_1 = \phi_2$.

Joonisel näeme, et nurgad ϕ_1 ja ϕ_2 on teravnurgad ning see väide kehtib iga ellipsi punkti P korral. Seetõttu, kui näitame, et $\sin \phi_1 = \sin \phi_2$, järeldub sellest nurkade võrdsus $\phi_1 = \phi_2$.

Tõmbame fookustest F_1, F_2 ristsirged ellipsi puutujale ja tähistame ristsirgete ja puutuja lõikepunkte vastavalt A_1, A_2 . Olgu $d_1 = |F_1 A_1|, d_2 = |F_2 A_2|$, st d_1, d_2 on vastavalt fookuste F_1, F_2 kaugused puutujast. Siis

$$\sin \phi_1 = \frac{d_1}{r_1}, \quad \sin \phi_2 = \frac{d_2}{r_2}. \quad (17.1)$$

Et arvutada fookuste kaugused puutujast, seame ellipsile kanoonilise koordinaadisüsteemi. Selles koordinaadisüsteemis on ellipsi fookustel F_1, F_2 koordinaadid $(-c, 0), (c, 0)$. Olgu (x_0, y_0) ellipsi punkti P koordinaadid kanoonilises koordinaadisüsteemis. Siis ellipsi puutuja punktis P võrrand on kujul

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Kirjutame selle sirge üldvõrrandi kujul

$$b^2 x_0 x + a^2 y_0 y - a^2 b^2 = 0.$$

Siis vasaku fookuse $F_1(-c, 0)$ kaugus puutujast avaldub järgmiselt:

$$d_1 = \frac{|-b^2 c x_0 - a^2 b^2|}{Q_1} = \frac{|b^2 c x_0 + a^2 b^2|}{Q},$$

kus $Q = \sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}$. Avaldise lugejas teisendame järgmiselt:

$$b^2 c x_0 + a^2 b^2 = b^2 a \frac{c}{a} x_0 + a^2 b^2 = ab^2 \varepsilon x_0 + a^2 b^2 = ab^2 (a + \varepsilon x).$$

Arvestades ellipsi vasaku fokaalraadiuse valemit $r_1 = a + \varepsilon x$, saame

$$d_1 = \frac{ab^2 r_1}{Q}. \quad (17.2)$$

Eelmises valemis jätsime absoluutväärtuse märgi ära, sest korrutis $ab^2 r_1$ on positiivne arv. Sarnased arvutused parema fookuse jaoks annavad:

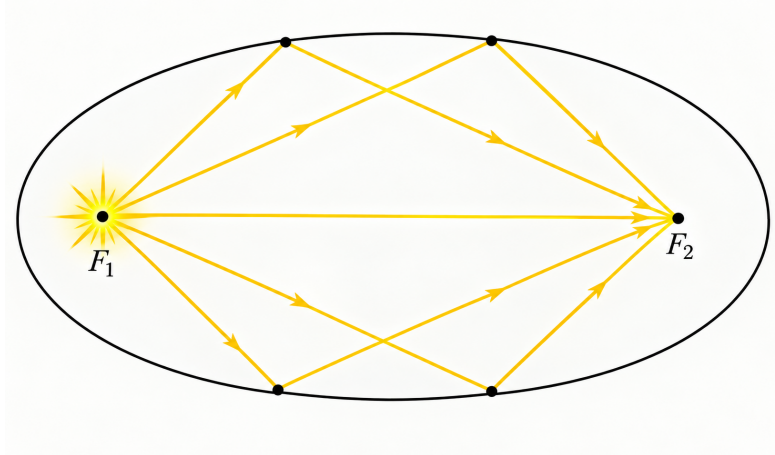
$$d_2 = \frac{ab^2 r_2}{Q}. \quad (17.3)$$

Asendades saadud kaugused d_1, d_2 valemisse (17.1), saame

$$\sin \phi_1 = \frac{ab^2}{Q}, \quad \sin \phi_2 = \frac{ab^2}{Q},$$

ehk $\sin \phi_1 = \sin \phi_2$. Seega on teoreem tõestatud. □

Huvitav on märkida, et ellipsi puutuja tõestatud omadust kasutavad insenerid tehnilistes konstruktsioonides. Oletame, et meil on ellips. Selle fookused asuvad ellipsi sümmeetriateljel. Pöörame ellipsi ümber selle sümmeetriatelje. Saame niinimetatud pöördpinna. Sel juhul nimetatakse seda pöördellipsoidiks. Oletame, et pöördellipsoidi pind on valmistatud valgust peegeldavast materjalist. Asetame valgusallika pöördellipsoidi ühte fookusesse, näiteks ellipsi fookusesse F_1 , ja jälgime, kuidas valgusallikaga kiirgav valgus hakkab levima. Oletame, et valguskiir liigub mööda sirget F_1P , kus P on pöördellipsoidi punkt. Valguskiir peegeldub punktis P . Kuidas see edasi levib? Tuntud optikaseaduse kohaselt on langemisnurk võrdne peegeldumisnurgaga. Ellipsi puutuja tõestatud omadusest järeldub aga, et pärast peegeldumist levib valguskiir mööda punkti P parempoolset fokaalraadiust, st mööda sirget PF_2 , ja jõuab parempoolsesse fookusesse F_2 . Seega kogunevad kõik vasakpoolsest fookusest kiirguvad valguskiired pärast pöördellipsoidi pinnalt peegeldumist parempoolses fookuses, mis suurendab oluliselt valguse intensiivsust parempoolses fookuses.

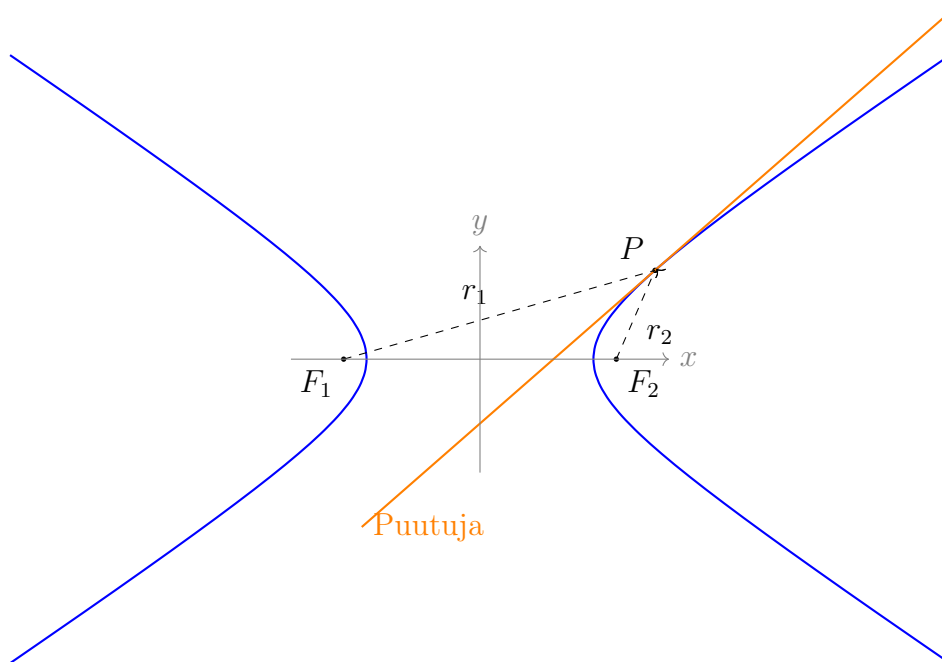


Joonis 43: Ellipsi peegeldusomadus

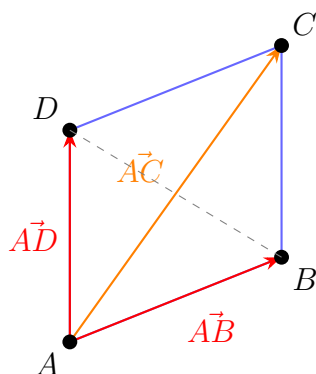
17.2 Hüperbooli puutuja omadus

Teoreem 41. *Hüperbooli mistahes punkti puutuja on selle punkti fokaalraadiuste vahelise nurga nurgapoolitaja.*

Tõestus. Olgu antud hüperbool, mille fookused on tähistatud F_1, F_2 . Olgu P hüperbooli parema haru punkt ja r_1, r_2 selle punkti fokaalraadiused. Tõmbame läbi punkti P hüperboolile puutuja. Teoreem väidab, et puutuja on nurga $\angle F_1PF_2$ nurgapoolitaja.



Joonis 44: Puutuja punktis P on nurga $\angle F_1PF_2$ nurgapoolitaja.



Joonis 45: Romb ja vektorid $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ ning diagonaal $\vec{AC}$.

Meie tõestus põhineb järgmisel geomeetrilisel väitel: rombi diagonaalid on rombi sisemiste nurkade nurgapoolitajad. Olgu rombi tipud A, B, C, D . Siis kehtib vektorvõrrand $\vec{AD} + \vec{AB} = \vec{AC}$ (vt joonis 45). Järelikult on vektorite $\vec{AD}$ ja $\vec{AB}$ summa nurgapoolitaja sihivektor $\vec{AC}$.

Tõestuse skeem on järgmine. Moodustame vektorid $\vec{PF_1}$, $\vec{PF_2}$. Vektorid $\vec{PF_1}$ ja $\vec{PF_2}$ teisendame samasuunalisteks ühikvektoriteks, jagades nende koordinaadid vastavate vektorite pikkustega. Tuletame meelde, et nende pikkused saame arvuta-

da hüperbooli fokaalraadiuste valemite abil. Seejärel liidame saadud ühikvektorid, tulemuseks olev vektor on nurga $\angle F_1 P F_2$ nurgapoolitaja sihivektor. Seejärel näitame, et see vektor on kollineaarne puutuja sihivektoriga. Sellest järeldub teoreemi väide. Tõepoolest, nurgapoolitaja ja puutuja läbivad punkti P ja nende sihivektorid on kollineaarsed. Järelikult puutuja ühtib nurgapoolitajaga.

Varustame tasandit antud hüperbooli kanoonilise koordinaadisüsteemiga. Olgu (x_0, y_0) punkti P koordinaadid. Siis fookuste koordinaadid on $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ ja

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PF_1} &= (-c - x_0, -y_0), & \overrightarrow{PF_2} &= (c - x_0, -y_0), \\ |\overrightarrow{PF_1}| &= \varepsilon x_0 + a, & |\overrightarrow{PF_2}| &= \varepsilon x_0 - a.\end{aligned}\quad (17.4)$$

Vastavad samasuunalised ühikvektorid on

$$\vec{e}_1 = \left(\frac{-c - x_0}{\varepsilon x_0 + a}, \frac{-y_0}{\varepsilon x_0 + a} \right), \quad \vec{e}_2 = \left(\frac{c - x_0}{\varepsilon x_0 - a}, \frac{-y_0}{\varepsilon x_0 - a} \right). \quad (17.5)$$

Teisendame vektori $\vec{e}_1$ koordinaadid järgmiselt:

$$\begin{aligned}\frac{-c - x_0}{\varepsilon x_0 + a} &= \frac{(-c - x_0)(\varepsilon x_0 - a)}{(\varepsilon x_0 + a)(\varepsilon x_0 - a)} = \frac{-c\varepsilon x_0 + ac - \varepsilon x_0^2 + ax_0}{\varepsilon^2 x_0^2 - a^2}, \\ \frac{-y_0}{\varepsilon x_0 + a} &= \frac{(-y_0)(\varepsilon x_0 - a)}{(\varepsilon x_0 + a)(\varepsilon x_0 - a)} = \frac{-\varepsilon x_0 y_0 + ay_0}{\varepsilon^2 x_0^2 - a^2}.\end{aligned}$$

Sarnaselt teisendame teise vektori $\vec{e}_2$ koordinaadid kujule

$$\begin{aligned}\frac{c - x_0}{\varepsilon x_0 - a} &= \frac{(c - x_0)(\varepsilon x_0 + a)}{(\varepsilon x_0 - a)(\varepsilon x_0 + a)} = \frac{c\varepsilon x_0 + ac - \varepsilon x_0^2 - ax_0}{\varepsilon^2 x_0^2 - a^2}, \\ \frac{-y_0}{\varepsilon x_0 - a} &= \frac{(-y_0)(\varepsilon x_0 + a)}{(\varepsilon x_0 - a)(\varepsilon x_0 + a)} = \frac{-\varepsilon x_0 y_0 - ay_0}{\varepsilon^2 x_0^2 - a^2}.\end{aligned}$$

Vektorite summa koordinaadid on

$$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \left(\frac{2(ac - \varepsilon x_0^2)}{\varepsilon^2 x_0^2 - a^2}, \frac{-2\varepsilon x_0 y_0}{\varepsilon^2 x_0^2 - a^2} \right).$$

Nüüd tuleb näidata, et saadud vektor on kollineaarne hüperbooli puutuja sihivektoriga punktis $P(x_0, y_0)$, st vektoriga

$$\vec{s} = \left(\frac{y_0}{b^2}, \frac{x_0}{a^2} \right). \quad (17.6)$$

Seega peame näitama, et korrutades vektori $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ sobiva nullist erineva arvuga, saame vektori $\vec{s}$. Kõigepealt korrutame vektori $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ arvuga $(\varepsilon^2 x_0^2 - a^2)/2$. Saame vektori

$$\frac{\varepsilon^2 x_0^2 - a^2}{2} (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = (ac - \varepsilon x_0^2, -\varepsilon x_0 y_0). \quad (17.7)$$

Seejärel teisendame saadud vektori esimese koordinaadi järgmiselt:

$$\begin{aligned} ac - \varepsilon x_0^2 &= \varepsilon a^2 - \varepsilon x_0^2 = \varepsilon(a^2 - x_0^2) = \varepsilon(a^2 - a^2(1 + \frac{y_0^2}{b^2})) \\ &= -\frac{\varepsilon a^2 y_0^2}{b^2}. \end{aligned} \quad (17.8)$$

Seega vektor (17.7) on võrdne vektoriga

$$\left(-\frac{\varepsilon a^2 y_0^2}{b^2}, -\varepsilon x_0 y_0 \right). \quad (17.9)$$

Eeldades, et $y_0 \neq 0$, korrutame vektori (17.9) arvuga

$$-\frac{1}{\varepsilon a^2 y_0},$$

ja saame vektori $\vec{s}$ (17.6). Järelikult nurgapoolitaja sihivektor on kollineaarne puutuja sihivektoriga ja sellega teoreem on tõestatud. Viimasel teisendusel jätsime välja punkti, kus $y_0 = 0$. Ilmselgelt on see hüperbooli parema haru tipp. Tipp-punktis fokaalraadiuste vaheline nurk on sirgnurk ja puutuja on risti abtssisteljega, st see on sirgnurga nurgapoolitaja. Seega kehtib teoreemi väide ka selles punktis. $\square$

17.3 Parabooli puutuja omadus

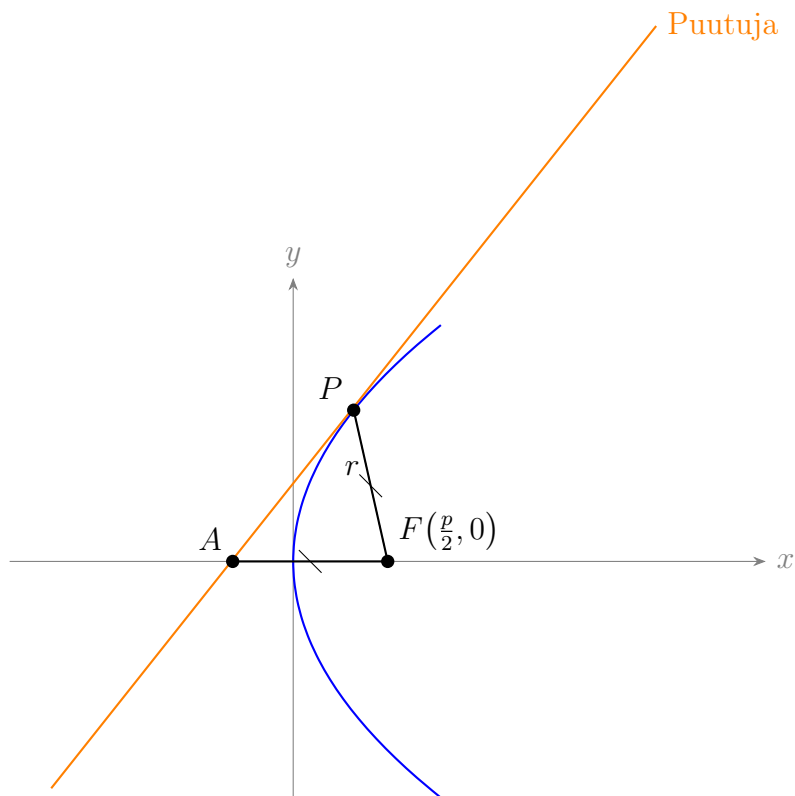
Teoreem 42. *Olgu tasandil antud parabool fookusega F . Olgu P parabooli suvaline punkt. Tõmbame paraboolile puutuja punktis P ja tähistame selle lõikepunkti parabooli sümmeetriateljega tähega A . Siis $|AF| = |FP|$, st kolmnurk $\triangle AFP$ on võrdhaarne.*

Tõestus. Varustame tasandit antud parabooli kanoonilise koordinaadisüsteemiga. Siis on parabooli võrrand kujul $y^2 = 2px$, kus p on parabooli fokaalparameeter. Olgu (x_0, y_0) punkti P koordinaadid. Parabooli fookus on $F(p/2, 0)$. Parabooli puutuja võrrand punktis $P(x_0, y_0)$ on kanoonilises koordinaadisüsteemis kujul

$$y_0 y = p(x + x_0).$$

Leiame punkti A koordinaadid, st puutuja ja x -telje lõikepunkti koordinaadid. Selles punktis on $y = 0$, ning puutuja võrrandist saame $x = -x_0$. Seega on $A(-x_0, 0)$. Sellest järeldub, et $|AF| = x_0 + p/2$. Arvutame nüüd lõigu PF pikkuse

$$\begin{aligned} |PF| &= \sqrt{(x_0 - \frac{p}{2})^2 + y_0^2} = \sqrt{x_0^2 - px_0 + \frac{p^2}{4} + 2px} \\ &= \sqrt{x_0^2 + px_0 + \frac{p^2}{4}} = x_0 + \frac{p}{2}. \end{aligned} \quad (17.10)$$



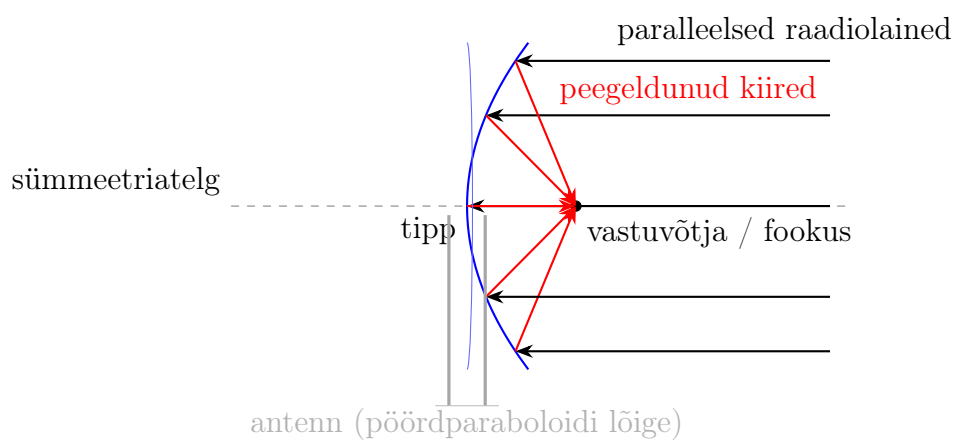
Joonis 46: Puutuja paraboolile $y^2 = 2px$ punktis P lõikab sümmeetriatelge punktis A ; $\triangle AFP$ on võrdhaarne ($|AF| = |PF|$).

Seega $|AF| = |PF|$ ning kolmnurk $\triangle AFP$ on võrdhaarne. Sellest jäeldub ka nurkade võrdsus

$$\angle PAF = \angle APF.$$

□

Insenerid kasutavad antennide loomisel parabooli puutuja omadust. Pöörates parabooli ümber selle sümmeetriatelje, saame pinna, mida nimetatakse pöördparaboloidiks. Antenn on pöördparaboloidi kujuga ja signaalide vastuvõtja, näiteks raadiosignaalide vastuvõtja, asetatakse selle pöördparaboloidi fookusesse. Kui raadiosignaalide allikas on väga kaugel kosmoses, näiteks teises galaktikas, võib eeldada, et raadiosignaalid liiguvad sirgjooneliselt paralleelselt pöördparaboloidi sümmeetriateljega. Pöördparaboloidi pinnalt peegeldudes koondavad need parabooli tõestatud puutuja omaduse tõttu pöördparaboloidi fookusesse ja jõuavad signaalide vastuvõtjasse. Asjaolu, et raadiosignaalid koondavad fookusesse, võimendab oluliselt kosmosest tulevaid signaale.



Joonis 47: Pöördparaboloidi tööpõhimõte: paremalt tulevad paralleelsed raadiolained peegelduvad pöördparaboloidi pinnalt ja koonduvad fookusesse, kus paikneb vastuvõtja.