

Operaadid ja nende rakendused

MITTEFORMAALNE SISSEJUHATUS: OPERATSIOONIDE TOIME

Algebraalne struktuur koosneb tüüpiliselt hulgast X , koos mingite tehete, nagu liitmine, korrutamine või ümberskaleerimine:

$$X^2 \xrightarrow{+} X, \quad X^2 \xrightarrow{*} X, \quad X \xrightarrow{\lambda \cdot -} X, \quad \text{kus } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sama tüüpi algebraliste struktuuride jaoks võime taaskasutada samu sümboleid tehete jaoks, isegi kui vaatame tehteid erinevate hulkade X , Y , Z , ... peal.

Võime asjale läheneda nii, et meie tehted (või vähemalt tehtesümbolid) elavad iseseisvat elu mingis puhtalt formaalse iseloomuga operatsioonide kogumis P .

Näiteks, kui vaatame hulka $\mathbb{R}$ koos meile tuttava algebraalse struktuuriga, saame, et on toime $P \circ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mis võtab argumendiks operatsiooni, nagu $+$ $\in P$, ja sisendite jada, nagu $\mathbf{x} = (2, 4)$, ning annab vastuseks väärtuse, mis saadakse operatsiooni $+$ argumentidele $(2, 4)$ rakendamisel, ehk

$$+ \cdot \mathbf{x} = + \cdot (2, 4) = 2 + 4 = 6.$$

OPERAAD ON OPERATSIOONIDELE NAGU RÜHM ON SÜMMEETRIATELE

Kuna me saame operatsioone aarsuse (ehk argumentide arvu) järgi eristada, tähistagu iga $n \in \mathbb{N}$ korral $P(n)$ vaadeldavate n -aarsete operatsioonide hulka.

Saame vaadata hulkade perel $(P(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tehet $\circ$, mis kombineerib operatsioone uuteks operatsioonideks.

Näiteks, kui meil on operatsioonid $*, + \in P(2)$, saame nende abil konstrueerida uue operatsiooni

$$* \circ (+, +) \in P(4),$$

mis peaks argumentidele rakenduma järgmiselt:

$$(* \circ (+, +)) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2) * (x_3 + x_4).$$

Sellist operatsioonide kombineerimist kutsutakse **komponeerimiseks** ning see annab operatsioonide kogumil algebralise struktuuri.

Operaadi mõiste eesmärk ongi taolise algebralise struktuuri abstraktselt käsitlemine.

Seda samas mõttes, nagu rühma mõiste eesmärk on sümmeetriate hulga algebralise struktuuri abstraktselt käsitlemine.

LINEAARSETE FUNKTSIOONIDE KOMPONEERIMINE

Kui X, Y, Z on lineaarsed ruumid (s.t. vektorruumid) ja

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

on lineaarsed kujutused, saame vaadata f ja g **kompositsiooni**

$$X \xrightarrow{g \circ f} Z,$$

mis on jällegi lineaarne kujutus.

Tehte $\circ$ algebralisi omadusi tunneme hästi:

- ▶ *assotsiatiivsus*: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$,
- ▶ *tehte suhtes neutraalsed elemendid*: $f \circ \text{id}_X = f = \text{id}_Y \circ f$.

Lineaarteisendused fikseeritud vektorruumil V , s.t. lineaarkujutused $V \rightarrow V$, moodustavad monoidi $(\text{End}(V), \circ, \text{id}_V)$, mida kutsutakse vektorruumi V endomorfismide monoidiks.

Varsti vaatame vektorruumi V endomorfismide operaadi $\text{End}(V)$, mille sees endomorfismide monoid elab ühe osana.

MULTILINEAARSETE FUNKTSIOONIDE KOMPONEERIMINE

Peamine vahe operaadide ja monoidide vahel on see, et operatsioonid võtavad üldjuhul rohkem kui ühe argumendi.

Monoidid vastavad sellistele operaadidele, kus on ainult unaarsed operatsioonid.

Kui on antud mitme muutuja funktsioonid

$$X^n \xrightarrow{f} X \quad \text{ning} \quad X^m \xrightarrow{g} X,$$

on nende üheks funktsiooniks kombineerimiseks mitu võimalust.

Näiteks võib vaadata funktsiooni

$$X^{n+m-1} \rightarrow X, \quad (x_1, \dots, x_n, y_2, \dots, y_m) \mapsto g(f(x_1, \dots, x_n), y_2, \dots, y_m),$$

mille saame suunates f väljundi g esimesse sisendisse.

Seega tuleb ka algebraline struktuur, mis sellist kombineerimisoperatsiooni abstraktselt kirjeldab, tehniliselt keerulisem.

OPERATSIOONIDE TÄHISTUSED JA ILLUSTRATIIVNE ESITAMINE

Operaadi puhul, selle asemel, et panna tehet kirja kujul

$$x_1 + (x_2 + x_3),$$

võib selle panna kirja ka kujul

$$- + (- + -),$$

kuna seda operatsiooni arvukolmikule (x, y, z) rakendades pane-me arvud lihtsalt kolmikus esinevas järjekorras lünkadesse, s.t.

$$(- + (- + -))(x, y, z) = x + (y + z).$$

Kolmiku esimene element x läheb alati avaldises kõige esimesse positsiooni ja ei saa kunagi mujale sattuda.

Operatsioone on kasulik ette kujutada diagrammidena.

OPERATSIOONIDE TÄHISTUSED JA ILLUSTRATIIVNE ESITAMINE

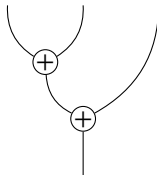
BINAARSET LIITMISOPERATRIOONI + ILLUSTRERIV DIAGRAMM

Näiteks avaldis $- + -$ esitub diagrammina, kus

- ▶ kaks ülesse jooksvat joont illustreerivad operatsiooni kahte sisendit ning
- ▶ alla jooksev joon illustreerib operatsiooni väljundit.



Ühe operatsiooni väljundi teise operatsiooni sisendisse suunamist saab kenasti diagrammiga esitada. Näiteks operatsiooni saame $(- + -) + -$ esitada järgmise diagrammina:



Tehet $\circ$ kasutades oleks selle operatsiooni kuju $+ \circ (+, \text{id})$.

OPERAADI DEFINITSIOON

Enne, kui läheme täpse operaadi definitsiooni juurde, vaatame läbi mõned seal esinevad tähistused ja mõisted.

- ▶ $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ on naturaalarvude hulk, mis on kasutuses operatsioonide aarsustena;
- ▶ iga $n \in \mathbb{N}$ korral on antud hulk $P(n)$, mille elemente kutsetakse ka operaadi P aarusega n (ehk n -aarseteks) **operatsioonideks**;
- ▶ kõik hulgad $P(n)$ on seotud omavahel tehtega $\circ$, mida kutsetakse **komponeerimiseks**, ning mida kasutades saame etteantud operatsioonidest uusi operatsioone konstrueerida;
- ▶ tehe $\circ$ võtab vasakult ühe argumendi g ja paremalt g aarusele vastava arvu argumente $f_1, \dots, f_n$;
- ▶ tehte $\circ$ argumentidele rakendamisel saadud operatsiooni tähistame $g \circ (f_1, \dots, f_n)$, aga kui $n = 1$, siis ka $g \circ f$.

OPERAADI DEFINITSIOON

DEFINITSIOON: OPERAAD

Operaadiks nimetatakse hulkade peret $P = (P(n))_{n \in \mathbb{N}}$, millel on defineeritud assotsiatiivne ja ühikuga komponeerimise tehe, s.t. iga $n, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ jaoks üks fikseeritud kujutus

$$P(n) \times P(k_1) \times \dots \times P(k_n) \xrightarrow{\circ} P(k_1 + \dots + k_n),$$

$$(g, f_1, \dots, f_n) \mapsto g \circ (f_1, \dots, f_n)$$

ning fikseeritud unaarne **ühikoperatsioon** $\text{id} \in P(1)$, mis peavad rahuldama

- ▶ *ühikoperatsiooni neutraalsust*: $f \circ (\text{id}, \dots, \text{id}) = f = \text{id} \circ f$;
- ▶ *ja assotsiatiivsust*:

$$h \circ (g_1 \circ (f_1^1, \dots, f_{k_1}^1), \dots, g_n \circ (f_1^n, \dots, f_{k_n}^n))$$

$$= (h \circ (g_1, \dots, g_n)) \circ (f_1^1, f_2^1, \dots, f_{k_n-1}^n, f_{k_n}^n),$$

või lühidalt: $h \circ (g_i \circ (f_j^i)) = (h \circ (g_i)) \circ (f_j^i).$

NÄIDE: ENDOMORFISMIDE OPERAADID

HULGA X ENDOMORFISMIDE OPERAAD $\text{End}(X)$

Olgu X suvaline hulk. Hulga X endomorfismide operaad on $\text{End}(X) = (\text{End}(X)(n))_{n \in \mathbb{N}}$, kus

$$\text{End}(X)(n) := \{f: X^n \rightarrow X\}$$

koosneb kõikidest n -muutuja teisendustest hulgal X .

VEKTORRUUMI V ENDOMORFISMIDE OPERAAD $\text{End}(V)$

Kui V on vektorruum, siis $\text{End}(V) = (\text{End}(V)(n))_{n \in \mathbb{N}}$, kus

$$\text{End}(V)(n) := \{f: V^n \rightarrow V \mid f \text{ on multilineaarne}\}$$

koosneb kõikidest n -muutuja multilineaarsetest teisendustest vektorruumil V .

OPERAADIDE MORFISMID

DEFINITSIOON: OPERAADIDE MORFISM

Olgu $P = (P(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ja $Q = (Q(n))_{n \in \mathbb{N}}$ operaadid.

Siis operaadide morfism $\varphi: P \rightarrow Q$ on funktsioonide pere

$$\varphi = (\varphi_n: P(n) \rightarrow Q(n))_{n \in \mathbb{N}},$$

mis on kooskõlas operaadide struktuuriga, ehk see

- ▶ säilitab ühikoperatsioone, s.t. $\varphi_1(\text{id}) = \text{id}$, ning
- ▶ kommuteerub komponeerimise operatsiooniga, s.t. kui $g \in P(n)$ ja $f_i \in P(k_i)$, siis

$$\varphi_{k_1 + \dots + k_n}(g \circ (f_1, \dots, f_n)) = \varphi_n(g) \circ (\varphi_{k_1}(f_1), \dots, \varphi_{k_n}(f_n)),$$

või lühidalt,

$$\varphi(g \circ (f_1, \dots, f_n)) = \varphi(g) \circ (\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_n)).$$

OPERAADI TOIME

DEFINITSIOON: OPERAADI TOIME HULGAL

Operaadi P **toime hulgal** X on operaadide morfism

$$P \rightarrow \text{End}(X) .$$

S.t. operaadi P toime hulgal X annab meile iga $n \in \mathbb{N}$ korral kujutuse

$$P(n) \rightarrow \{\text{funktsioonid } X^n \rightarrow X\} ,$$

mis realiseerib iga operatsiooni hulgas $P(n)$ mingi konkreetse n -arse tehena $X^n \rightarrow X$.

Toime võib teisiti ümber kirjutada funktsioonide perena

$$(P(n) \times X^n \rightarrow X)_{n \in \mathbb{N}} .$$

DEFINITSIOON: OPERAADI TOIME VEKTORRUUMIL

Operaadi P **toime vektorruumil** V on operaadide morfism

$$P \rightarrow \text{End}(V) .$$

MONOIDI TOIMED OPERAADI TOIMETENA

OPERAADI UNAARSETE OPERATSIOONIDE MONOID

Operaadi P komponeerimistehe annab hulga $P(1)$ monoidi struktuuri. Seega iga operaadi sees elab unaarsete operatsioonide monoid.

Kehtib ka vastupidine väide, ehk iga monoidi saab vaadata operaadina, mis koosneb ainult unaarsetest operatsioonidest.

MONOID OPERAADINA

Kui M on monoid, saame defineerida operaadi $\hat{M}$, kus

$$\hat{M}(1) := M \quad \text{ning} \quad \hat{M}(n) := \emptyset, \quad \text{kui } n \neq 1.$$

Komponeerimine on antud monoidi korrutamise poolt.

Võib panna tähele, et operaadi $\hat{M}$ toime hulgal X on sisuliselt sama asi, kui monoidi M toime hulgal X .

ASSOTSIIATIIVSET OPERATSIOON KIRJELDAV OPERAAD **Assoc**

Eelnevalt vaatasime monoide operaadidena, aga saame vaadata monoide ka teatud operaadi toimetena.

Defineerime operaadi **Assoc**, mis kirjeldab monoidide teooriat selles mõttes, et meil on üks-ühene vastavus

$$\{\mathbf{Assoc} \text{ toimed hulgal } X\} \leftrightarrow \{\text{monoidi struktuurid hulgal } X\}.$$

Defineerime iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\mathbf{Assoc}(n) := \{*\}^n$$

ühe-elementilise hulga unikaalse elemendiga $*$. Siis jääb perel $(\mathbf{Assoc}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ operaadi struktuuri defineerimiseks parajasti üks võimalus elementide vähesuse tõttu. S.t. ainus võimalus on defineerida

$$*^n \circ (*^{k_1}, \dots, *^{k_n}) = *^{k_1 + \dots + k_n}.$$

ASSOTSIIATIVSET OPERATSIOON KIRJELDAV OPERAAD **Assoc**

Toimele $\varphi: \mathbf{Assoc} \rightarrow \text{End}(X)$ vastava kujutuse

$$\varphi_n: \{*\}^n \rightarrow \{f: X^n \rightarrow X\}$$

välja valitud funktsiooni

$$\mu^n := \varphi_n(*^n): X^n \rightarrow X$$

interpreteerime n -aarse korrutamistehtena hulgal X .

Muuhulgas, juhul $n = 2$ saame binaarse tehte $\mu^2: X^2 \rightarrow X$ ja juhul $n = 0$ saame konstantse tehte $\mu^0: X^0 \rightarrow X$, mis vastavad monoidi esitusele binaarse tehte ja ühikelemendi kaudu.

Binaarne tehe μ^2 on assotsiatiivne, kuna operaadi **Assoc** sees kehtib

$$\begin{aligned} *^2 \circ (*^2, \text{id}) &= *^2 \circ (*^2, *^1) \\ &= *^{2+1} = *^3 = *^{1+2} \\ &= *^2 \circ (*^1, *^2) \\ &= *^2 \circ (\text{id}, *^2). \end{aligned}$$

ASSOTSIIATIIVSET OPERATSIOON KIRJELDAV OPERAAD **Assoc**

Operaadis **Assoc** kehtivat võrdust

$$*^2 \circ (*^2, \text{id}) = *^2 \circ (\text{id}, *^2)$$

võib tõlgendada abstraktse operatsiooni $*^2$ assotsiatiivsusena.

Eelnev samasus teiseneb morfismiga $\varphi: \mathbf{Assoc} \rightarrow \mathbf{End}(X)$ operaadis $\mathbf{End}(X)$ kehtivaks võrduseks

$$\mu^2 \circ (\mu^2, \text{id}) = \mu^2 \circ (\text{id}, \mu^2).$$

Eelnev võrdus aga tähendab täpselt tehte μ^2 assotsiatiivsust

$$\forall x, y, z \in X. \quad \mu^2(\mu^2(x, y), z) = \mu^2(x, \mu^2(y, z)).$$

Arvutus:

$$\begin{aligned} \mu^2(\mu^2(x, y), z) &= (\mu^2 \circ (\mu^2, \text{id}))(x, y, z) \\ &= (\mu^2 \circ (\text{id}, \mu^2))(x, y, z) \\ &= \mu^2(x, \mu^2(y, z)). \end{aligned}$$

OPERAADID TEOORIATENA

Monoidide kohta käinud arutelu kehtib üldisemalt operaadide jaoks.

Täpsemalt, kuna operaadide morfism säilitab samasusi ja komponeerimist, kehtib järgnev oluline fakt toime $P \rightarrow \text{End}(X)$ korral ning ka toime $P \rightarrow \text{End}(V)$ korral.

OPERAADIDE MORFISMID SÄILITAVAD SAMASUSI

Operaadi sees kehtivad samasused operatsioonide vahel teisenevad konkreetseteks samasusteks tehte vahel.

See tähendab, et me saame operaadide abil defineerida algebralisi struktuure, konstrueerides abstraktsetest operatsioonidest operaadi ning nõudes operaadi sees operatsioonide vahel soovitud võrduste kehtimist.

OPERAADID TEOORIATENA

Üks viis operaade tõlgendada on teatud tüüpi teooriana, mis kirjeldab algebralise struktuuri *operatsioone* ning *samasusi*.

Sellest vaatepunktist lähtuvalt kasutatakse tihti järgnevat terminoloogiat.

DEFINITSIOON: OPERAADI ALGEBRAD

Operaadi P toimeid kutsutakse ka **P -algebrateks**.

Operaadi **Assoc** toime vektorruumil V on operaadide morfism

$$\varphi: \mathbf{Assoc} \rightarrow \text{End}(V)$$

ning varustab vektorruumi V assotsiatiivse multilineaarse tehtega, millel on ühikelement.

Seega, operaadi **Assoc** toime $\mathbb{K}$ -vektorruumil V on sama asi, kui $\mathbb{K}$ -algebra struktuur vektorruumil V .

LIE OPERAAD?

Kuidas näeks välja operaad **Lie**, nii et **Lie**-algebrad oleksid täpselt Lie algebrad?

Esmalt, me tahaksime, et operaadis oleks binaarne operatsioon $[-, -] \in \mathbf{Lie}(2)$, mis rahuldaks Jacobi samasust

$$[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$$

iga kord, kui oleme operatsioon $[-, -]$ mingil vektorruumil V toime $\mathbf{Lie} \rightarrow \text{End}(V)$ kaudu tehtena tõlgendanud.

PROBLEEM

Selleks oleks tarvis, et me sõnastaksime Jacobi samasuse operaadi **Lie** sees kehtiva samasusena. See pole aga võimalik, kuna meil pole operaadi elementide peal liitmisoperatsiooni, mis kujutuks vektorruumi liitmiseks, nagu Jacobi samasuses.

Lahendus: *lineaarsed operaadid*, ehk eeldame, et $P(n)$ on vektorruumid ja eeldame komponeerimiselt multilineaarsust.

LINEAARSE OPERAADI DEFINITSIOON

Lineaarne operaad = operaad + vektorruumi struktuur + multilineaarsus.

DEFINITSIOON: LINEAARNE OPERAAD

Lineaarseks operaadiks nimetatakse vektorruumide peret $P = (P(n))_{n \in \mathbb{N}}$, mis omab operaadi struktuuri ning rahuldab kõiki operaadi aksioome, kusjuures iga $n, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ korral peab olema kujutus

$$P(n) \times P(k_1) \times \dots \times P(k_n) \xrightarrow{\circ} P(k_1 + \dots + k_n), \\ (g, f_1, \dots, f_n) \mapsto g \circ (f_1, \dots, f_n)$$

multilineaarne.

Iga lineaarne operaad on küll lineaarse struktuuri unustamisel ka operaad, aga üldiselt nõuame lineaarsete operaadidega tegeledes morfismidelt ja toimetelt lisaks lineaarse struktuuriga kooskõlas olemist.

LINEAARSETE OPERAADIDE NÄITED

MITTE-NÄIDE: HULGA ENDOMORFISMIDE OPERAAD

Hulga X endomorfismide operaad $\text{End}(X)$ **ei ole** lineaarne, kuna hulgad

$$\text{End}(X)(n) := \{f: X^n \rightarrow X\}$$

ei kanna kanoonilisel viisil vektorruumi struktuuri.

NÄIDE: VEKTORRUUMI ENDOMORFISMIDE OPERAAD

Operaad $\text{End}(V)$ on lineaarne, kui vaatame hulki

$$\text{End}(V)(n) := \{f: V^n \rightarrow V \mid f \text{ on multilineaarne}\}$$

punktiviisilise liitmise ja skalaarkorrutamise suhtes vektorruumidena.

LINEAARSE OPERAADI TOIME VEKTORRUUMIL

DEFINITSIOON: OPERAADIDE MORFISM

Olgu $P = (P(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ja $Q = (Q(n))_{n \in \mathbb{N}}$ lineaarsed operaadid.

Siis lineaarsete operaadide morfism $\varphi: P \rightarrow Q$ on operaadide morfism $(\varphi_n: P(n) \rightarrow Q(n))_{n \in \mathbb{N}}$, mille korral on lisaks nõutud, et funktsioonid φ_n on lineaarsed.

DEFINITSIOON: LINEAARSE OPERAADI TOIME VEKTORRUUMIL

Lineaarse operaadi P (**lineaarne**) **toime vektorruumil** V on lineaarsete operaadide morfism

$$P \rightarrow \text{End}(V).$$

Paneme tähele, et üldjuhul ei ole mõistlik vaadata lineaarse operaadi mitte-lineaarseid toimeid, nii et lineaarse operaadi *toime* all mõleme alati *lineaarset toimet*.

Näiteks ei vaata me lineaarse operaadi toimet hulgal, kuna $\text{End}(X)$ ei ole lineaarne operaad.

$\mathbb{K}$ -ALGEBRAD LINEAARSE OPERAADI TOIMETENA

Iga operaadi P saab teha lineaarseks operaadiks $\mathbb{K}[P]$, kus defineerime vektorruumid

$$(\mathbb{K}[P])(n) := \mathbb{K}[P(n)]$$

vabade $\mathbb{K}$ -vektorruumidena hulkadel $P(n)$.

Operaadi P toimed vektorruumil V on üks-üheses vastavuses lineaarse operaadi $\mathbb{K}[P]$ toimetega vektorruumil V .

Seega, kui on selge, et töötame lineaarses kontekstis, võime lineaarse operaadi $\mathbb{K}[P]$ toimeid kutsuda ka P -algebrateks.

ASSOTSIATIIVSED ALGEBRAD LINEAARSETE TOIMETENA

Näiteks lineaarse operaadi $\mathbb{K}[\mathbf{Assoc}]$ puhul saame

$$\mathbb{K}[\mathbf{Assoc}](n) = \mathbb{K}$$

iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Siis $\mathbb{K}[\mathbf{Assoc}]$ toimed on parajasti $\mathbb{K}$ -algebrad.

LIE OPERAAD?

Oleme nüüd lähemal Jacobi samasuse operaadi sees sõnastamisele, aga üks takistus on veel. Avaldise

$$[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x]$$

operaadi kontekstis esitamiseks peaksime kasutama operatsiooni $[[-, -], -]$ kolm korda, aga selle sisendeid permuteerima.

PROBLEEM

Operaadi sees pole operatsiooni sisendite permuteerimine võimalik.

Sama probleem tuleb ette, kui püüaksime defineerida operaadi **Assoc** analoogi *kommutatiivse* tehte jaoks, nii et algebrad oleksid kommutatiivsed monoidid.

Lahendus: *sümmeetrilised operaadid*, kus saame sümmeetrilise rühma toime abil operatsioonide sisendeid permuteerida.

SÜMMEETRIATE OPERAAD

Esmalt defineerime *sümmeetriate operaadi* Σ (mis on operaad tavalises mõttes). Operaadi Σ komponeerimistehe tuleb hiljem ette sümmeetrilise operaadi definitsiooni juures.

Sümmeetriate operaad on operaad Σ , kus $\Sigma(n) = \Sigma_n$ on sümmeetriline rühm hulgal $\underline{n} := \{1, \dots, n\}$.

Sümmeetriate operaadi komponeerimise operatsioon on

$$\begin{aligned}\Sigma(n) \times \Sigma(k_1) \times \dots \times \Sigma(k_n) &\rightarrow \Sigma(k_1 + \dots + k_n) \\ (\sigma, \rho_1, \dots, \rho_n) &\mapsto \sigma \circ (\rho_1, \dots, \rho_n),\end{aligned}$$

kus $\sigma \circ (\rho_1, \dots, \rho_n)$ on bijektsioon hulgal

$$\underline{k_1 + \dots + k_n} = \{1, 2, \dots, k_1 + \dots + k_n\},$$

mis paneb esmalt kõik permutatsioonid $\rho_1, \dots, \rho_n$ kõrvuti ning seejärel permuteerib väljundeid σ järgi.

SÜMMEETRIATE OPERAAD

Permutatsiooni $\sigma \circ (\rho_1, \dots, \rho_n)$ käitumist võib illustreerida pildiga

$$\begin{array}{ccccccc}
 \underline{k_1} & & \underline{k_2} & & \dots & & \underline{k_n} \\
 \downarrow \rho_1 & & \downarrow \rho_2 & & & & \downarrow \rho_n \\
 \underline{k_1} & & \underline{k_2} & & \dots & & \underline{k_n} \\
 & & & & \sigma & & \\
 \underline{k_{\sigma^{-1}(1)}} & & \underline{k_{\sigma^{-1}(2)}} & & \dots & & \underline{k_{\sigma^{-1}(n)}} .
 \end{array}$$

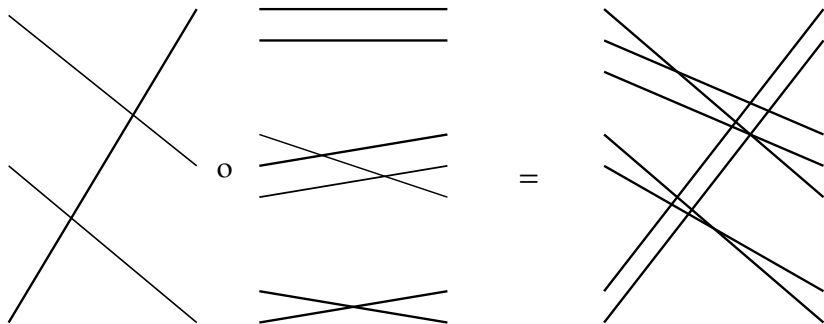
Hulk $\underline{k_1} + \dots + \underline{k_n}$ jaotub (bijektsiooni täpsuseni) lõikumatuteks blokkideks $\underline{k_1}, \dots, \underline{k_n}$.

Bloki $\underline{k_i}$ sees rakendame permutatsiooni ρ_i ning seejärel permuteerime väljunditeks olevad blokid σ järgi.

Järgneval slaidil on konkreetsem illustratsioon.

SÜMMEETRIATE OPERAAD

Kompositsiooni $\sigma \circ \begin{pmatrix} \rho_1, \\ \rho_2, \\ \rho_3 \end{pmatrix}$ illustratsioon.



Diagramm¹: sisendid paremal, väljundid vasakul

¹[Ladislav the Posthumous at English Wikipedia, CC BY-SA 3.0](#), via Wikimedia Commons

SÜMMEETRILISED OPERAADID

DEFINITSIOON:

Sümmeetriline operaad (ehk Σ -**operaad**) on operaad P , millel on lisaks iga $n \in \mathbb{N}$ korral fikseeritud sümmeetrilise rühma Σ_n toime hulgal $P(n)$, s.t. kujutus

$$P(n) \times \Sigma_n \rightarrow P(n), \quad (f, \sigma) \mapsto f \cdot \sigma,$$

mis rahuldab iga $f \in P(n)$ ja $\sigma, \rho \in \Sigma_n$ korral tingimusi

$$(f \cdot \sigma) \cdot \rho = f \cdot (\sigma \cdot \rho) \quad \text{ning} \quad f \cdot 1_{\Sigma_n} = f.$$

Lisaks peavad olema need toimed kooskõlalised operaadi P struktuuriga, ehk

$$(g \cdot \sigma) \circ (f_{\sigma(1)} \cdot \rho_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(n)} \cdot \rho_{\sigma(n)}) = (g \circ (f_1, \dots, f_n)) \cdot (\sigma \circ (\rho_1, \dots, \rho_n)).$$

Lineaarse sümmeetrilise operaadi definitsioonis on nõutud lisaks iga $\sigma \in \Sigma_n$ korral kujutuse $- \cdot \sigma: P(n) \rightarrow P(n)$ lineaarsust.

NÄIDE: ENDOMORFISMIDE OPERAADID

HULGA X ENDOMORFISMIDE OPERAAD $\text{End}(X)$

Tuletame meelde, et hulga X endomorfismide operaadi $\text{End}(X) = (\text{End}(X)(n))_{n \in \mathbb{N}}$ puhul

$$\text{End}(X)(n) := \{f: X^n \rightarrow X\}.$$

See operaad sümmeetriline, kui defineerime $f: X^n \rightarrow X$ ja $\sigma \in \Sigma_n$ korral $f \cdot \sigma: X^n \rightarrow X$ funktsioonina

$$(f \cdot \sigma)(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}),$$

ehk permuteerime funktsiooni f argumente σ järgi.

Vektorruumi V endomorfismide operaad $\text{End}(V)$ on lineaarne sümmeetriline operaad analoogilisel viisil.

SÜMMEETRILISTE OPERAADIDE NÄITED

Kui soovime rõhutada, et meie operaadil ei ole sümmeetrilise operaadi struktuuri, võib selleks kasutada näiteks mõisteid

- ▶ **mitte-sümmeetriline operaad** või
- ▶ **planaarne operaad**.

$\text{End}(X)$ ja $\text{End}(V)$ on sümmeetrilised operaadid.

Leidub aga matemaatilisi objekte A , mille korral $\text{End}(A)$ on operaad, aga ei ole sümmeetriline operaad.

Sellise objekti A peal ei saa me sümmeetrilise operaadi toimeid vaadata, aga planaarse operaadi toimed on siiski võimalikud.

Sümmeetriliste operaadide morfism $\varphi: P \rightarrow Q$ peab olema kooskõlas Σ_n toimetega, ehk peab kehtima

$$\varphi(f \cdot \sigma) = \varphi(f) \cdot \sigma$$

iga $f \in P(n)$ ja $\sigma \in \Sigma_n$ korral.

SÜMMEETRILISUS VÕIMALDAB VÄLJENDADA KOMMUTATIIVSUST

Kui P on sümmeetriline operaad, saame operatsiooni $* \in P(2)$ kommutatiivsust kirjeldava võrduse

$$x * y = y * x$$

kirja panna operaadi P sees hulgas $P(2)$ tingimusena

$$* = * \cdot \sigma,$$

kus $\sigma = (1\ 2) \in \Sigma_2$ esindab formaalselt operatsiooni esimese ja teise argumendi ära vahetamist.

Sümmeetrilise operaadi P toime hulgal X on sümmeetriliste operaadide morfism $P \rightarrow \text{End}(X)$.

Seega $\varphi: P \rightarrow \text{End}(X)$ korral saame eeldusel $* = * \cdot \sigma$ arvutada

$$\varphi(*) (x, y) = \varphi(* \cdot \sigma) (x, y) = (\varphi(*) \cdot \sigma) (x, y) = \varphi(*) (y, x),$$

ehk $\varphi(*) : X^2 \rightarrow X$ on kommutatiivne tehe.

LIE OPERAAD

Lineaarne sümmeetriline operaad omab viimaks piisavalt struktuuri, et saaks sõnastada Jacobi samasuse

$$[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0.$$

LIE OPERAAD

Lineaarne sümmeetriline operaad **Lie** on vabalt moodustatud ühe binaarse operatsiooni $[-, -]$ poolt, modulo tingimused

- (anti-sümmeetrilisus)

$$[-, -] \cdot \sigma = -[-, -],$$

kus $\sigma = (1\ 2) \in \Sigma_2$;

- (Jacobi samasus)

$$[[-, -], -] + [[-, -], -] \cdot \sigma + [[-, -], -] \cdot \sigma^2 = 0,$$

kus $\sigma = (1\ 2\ 3) \in \Sigma_3$.

Lie-algebrad on parajasti Lie algebrad.

LIINIDE KLEEPIMISE ASSOTSIATIIVSUS

DEFINITSIOON: *LIIN PUNKTIDE VAHEL*

Olgu X topoloogiline ruum. Pidevat funktsiooni $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ kutsutakse (pidevaks) **liiniks** punktist $\alpha(0)$ punkti $\alpha(1)$.

Kui α on liin punktist x punkti y (s.t. $\alpha(0) = x$ ja $\alpha(1) = y$), kirjutame ka $x \xrightarrow{\alpha} y$.

Kui meil on antud liinid $x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow{\beta} z$, tunduks loomulik kombineerida need üheks liiniks $x \xrightarrow{\alpha * \beta} z$.

Kuidas aga $\alpha * \beta$ funktsioonina $[0, 1] \rightarrow X$ defineerida?

Näiteks:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{kui } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \beta(2t - 1), & \text{kui } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Selle definitsiooni puhul kahjuks $(\alpha * \beta) * \gamma \neq \alpha * (\beta * \gamma)$.

Assotsiatiivsus kehtib küll homotoopia täpsuseni, aga vaatame lähenemist, mis kasutab homotoopiate asemel operaade.

LIINIDE KLEEPIMISE ASSOTSIATIIVSUS

Et definitsiooni

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{kui } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \beta(2t - 1), & \text{kui } t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

analooge rohkemate intervallide kleepimiseks saaks lihtsamalt kirja panna, toome sisse järgmise tähistuse.

Iga kinnise intervalli $[a, b]$ korral, kus $a < b$, saame vaadata homöomorfismi

$$\theta_a^b: [a, b] \rightarrow [0, 1], \quad t \mapsto \frac{t - a}{b - a}.$$

Nüüd saame kirjutada

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(\theta_0^{1/2}(t)), & \text{kui } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \beta(\theta_{1/2}^1(t)), & \text{kui } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

PROBLEEM LIINIDE KLEEPIMISEGA

Olgu antud liinid $x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow{\beta} z \xrightarrow{\gamma} w$ ruumis X .

Liini $\alpha * \beta * \gamma: [0, 1] \rightarrow X$ võiks defineerida järgmiselt:

$$(\alpha * \beta * \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(\theta_0^{1/3}(t)), & \text{kui } t \in [0, \frac{1}{3}]; \\ \beta(\theta_{1/3}^{2/3}(t)), & \text{kui } t \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]; \\ \gamma(\theta_{2/3}^{1/3}(t)), & \text{kui } t \in (\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Samas, kui kasutame binaarse tehte definitsiooni

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(\theta_0^{1/2}(t)), & \text{kui } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \beta(\theta_{1/2}^{1/2}(t)), & \text{kui } t \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

saame

$$((\alpha * \beta) * \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(\theta_0^{1/4}(t)), & \text{kui } t \in [0, \frac{1}{4}]; \\ \beta(\theta_{1/4}^{1/2}(t)), & \text{kui } t \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; \\ \gamma(\theta_{1/2}^{1/2}(t)), & \text{kui } t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

ning

$$(\alpha * (\beta * \gamma))(t) = \begin{cases} \alpha(\theta_0^{1/2}(t)), & \text{kui } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \beta(\theta_{1/2}^{3/4}(t)), & \text{kui } t \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]; \\ \gamma(\theta_{3/4}^{1/4}(t)), & \text{kui } t \in (\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

LAHENDUSE IDEE: LUBAME KÕIKI LÕIGU TÜKELDUSI

VALIKU VÄLTIMISE PRINTSIIP

Kui ühte kanoonilist valikut ei leidu, saame valiku tegemist vältida tehes/lubades kõik võimalikud valikud.

Defineerime operaadi P , mis kontrollib meie liinide kleppimise operatsiooni, s.t. kui on antud liinid

$$x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow{\beta} z \xrightarrow{\gamma} w,$$

saame need kombineerida üheks liiniks suvalise kombineerimis-operatsiooni $\omega \in P(3)$ abil nii, et

$$\omega \cdot (\alpha, \beta, \gamma)$$

on mingi liin $x \rightarrow w$.

Idee on see, et ω kirjeldab, millisel intervalli $[0, 1]$ osal käitub liin $\omega \cdot (\alpha, \beta, \gamma)$ nagu α , millisel nagu β ja millisel nagu γ .

LAHENDUSE IDEE: LUBAME KÕIKI LÕIGU TÜKELDUSI

Kasutame jällegi homöomorfisme

$$\theta_a^b: [a, b] \rightarrow [0, 1], \quad t \mapsto \frac{t - a}{b - a}.$$

Kui fikseerime arvud $a_1, a_2 \in [0, 1]$, nii et $0 < a_1 < a_2 < 1$, määravad need $[0, 1]$ sees kolm alamlõiku: $[0, a_1]$, $[a_1, a_2]$ ja $[a_2, 1]$.

Tähistades sellist arvude a_1, a_2 valikut sümboliga ω , saame olukorras $x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow{\beta} z \xrightarrow{\gamma} w$, defineerida liini

$$\omega \cdot (\alpha, \beta, \gamma) := \begin{cases} \alpha(\theta_0^{a_1}(t)), & \text{kui } t \in [0, a_1] \\ \beta(\theta_{a_1}^{a_2}(t)), & \text{kui } t \in [a_1, a_2] \\ \gamma(\theta_{a_2}^1(t)), & \text{kui } t \in [a_2, 1] \end{cases}$$

punktist x punkti w .

Üldistame selle nüüd n liini kleppimiseks.

LÕIGU TÜKELDUSTE OPERAAD

Defineerime operaadi **Part**, kus element $\omega \in \mathbf{Part}(n)$ vastab lõigu $[0, 1]$ tükeldusele n alamlõiguks $[a_{i-1}, a_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$, kus

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1.$$

Kui on antud tükeldus $\omega \in \mathbf{Part}(n)$ ja tükeldused $\nu_i \in \mathbf{Part}(k_i)$ iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral, saame defineerida tükelduse

$$\omega \circ (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbf{Part}(k_1 + \dots + k_n),$$

kui võtame tükelduse ω ja peenendame seda, tükeldades $[a_{i-1}, a_i]$ iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral vastavalt tükeldusele ν_i .

Võib panna tähele, et **Part** on topoloogiline operaad, selles mõttes, et iga $\mathbf{Part}(n)$ on vaadeldav loomulikult viisil topoloogilise ruumina nii, et komponeerimine on pidev.

Tükeldus $\omega \in \mathbf{Part}(n)$ võimaldab meil, nagu eelnevalt, kleepida liinide jada

$$x_0 \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \xrightarrow{\alpha_2} x_2 \xrightarrow{\alpha_3} \dots \xrightarrow{\alpha_n} x_n$$

kokku üheks liiniks $\omega \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ punktist x_0 punkti x_n .

OPERAADI KONTROLLITUD KLEEPIMINE

Nõnda operaadi **Part** abil liine komponeerides ei ole me küll tavalises mõttes assotsiatiivsed, aga **Part** kontekstis saame kenasti järke pidada liinide kleepimise üle.

Näiteks, kui $\omega \in P(2)$ on tükeldus $0 < \frac{1}{2} < 1$ ja on antud liinid

$$x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow{\beta} z \xrightarrow{\gamma} w,$$

saame neid kleepida kaks korda operatsiooni ω rakendades: esmalt $\omega \cdot (\alpha, \beta): x \rightarrow z$ ja seejärel

$$\omega \cdot (\omega \cdot (\alpha, \beta), \gamma): x \rightarrow w.$$

Nüüd saame aga arvutada **Part** komponeerimist kasutades

$$\omega \cdot (\omega \cdot (\alpha, \beta), \gamma) = (\omega \circ (\omega, \text{id}))(\alpha, \beta, \gamma),$$

kus $\omega \circ (\omega, \text{id})$ on tükeldus $0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 0$.

Kuna $\omega \circ (\omega, \text{id}) \in \mathbf{Part}(3)$ elab meie masinavärgis, siis teatud mõttes saame, et kleepimine on kenasti kontrolli all.