Nullmass kui algebraline Boreli struktuur

Rein Saar, Stefan Groote

TÜ Füüsika Instituut

14.05.2025

Aegruumi sümmeetria rühmas, Lorentzi rühmas $\mathrm{SO}(1,3)$ on neli punkti kinnitavat alamrühma, nende hulgas ajasarnased translatsioonid $\mathrm{SO}(3)$ ja valgussarnased $\mathrm{SO}(2) \times \mathbb{R}^2$. Osutub aga, et valgussarnaste translatsioonide alamrühmana on otstarbekam kasutada joont kinnitavat alamrühma, mis ongi Boreli alamrühm ja mis genereerib õiged polarisatsioonid (helicity) massita osakestele.

Inertne mass

Johannes Kepler
(1571–1630)

Inertia, 1620

sir Isaac Newton
(1643–1727)

vis inertiae, 1687

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Leonhard Euler
(1707–1783)

Mechanica, 1760

$$F = ma$$

. . . keha mass on möödetud jõu kaudu,
mis on vajalik selleks, et anda kehale kiirendust.

Suhteline mass

Max Planck (1858–1947) 1900, tõestus 1907, Einstein 1905: Erirelatiivsusteooria energia–impulsivektor $(p^\mu) = (E/c, \vec{p})$ määrab massi $m^2c^4 = E^2 - \vec{p}^2c^2$ kaudu (siit kumab Einsteini $E = mc^2$)

On teadusmõiste ajalugu imeline juhtum, et valemi $E = mc^2$ Einsteini enda tuletamine, avalikustatud oma "Annalen der Physik" artiklis, on põhimõtteliselt eksitav. Suurte kiiruste juures EI OLE *mass inertne (Planck, 1906):*

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \;\Rightarrow\; \vec{F} - (\vec{F}\vec{\beta})\vec{\beta} = m\gamma\vec{a},$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Välja mass

James Clerk Maxwell
(1831–1879)
(Biot'–Savarti, Laplace'i, Gaußi, Faraday uurimistööde põhjal)

$$\operatorname{div} F_\varepsilon = 0, \quad i\varepsilon \frac{\partial \vec{F}_\varepsilon}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{F}_\varepsilon$$

$$\vec{F}_\varepsilon = \vec{E} + \varepsilon i \vec{B}, \; \varepsilon = \pm$$

(1860 või 1865)

Elektromagnetväli $\rightarrow$
Kvantelektrodünaamika (KED)
quantum – photon – particle
Väli $\rightarrow$ Osake

Massi EI OLE $\rightarrow m = 0$.

Kalibratsioonivälja massid on tekkitatud spontaanse sümmeetriamurdmise teel.
Brouti–Englerti–Higgsi mehanismi tulemus on massiga BEH-boson $m_{BEH} = 126\,\mathrm{GeV}$ (mitte BSH-boson).

$$1\,\mathrm{GeV} = 1.73 \cdot 10^{-27}\mathrm{kg}$$

Lorentzi teisendus

Hendrik Antoon Lorentz
(1853–1928)

Lorentzi teisendused

$$
\begin{aligned}
x' &= \gamma(x - vt) \\
y' &= y \qquad x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \\
z' &= z \qquad (x' = Lx) \\
t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)
\end{aligned}
$$

$$
\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
$$

Maxwelli võrrandit (füüs. reaalsus) $\rightarrow$ rühmastruktuur (mat. reaalsus)

Klaas Landsman and Kirti Singh,
"Is mathematics a game?"
[arXiv.org/abs/2311.12478]
füüsikalise reaalsuse mõiste

Edward A. Murphy jr. vastulause:
"Kui matemaatika teoreemid on seotud reaalsusega, pole need tõestavad. Kui on tõestavad, pole nad seotud reaalsusega."

Veidi ajaloost

- Woldemar Voigt, John Francis FitzGerald, Joseph Lamor, ...
  Lorentzi kontraktsioon: liikuv keha tõmbub kokku
  Lorentzi dilatatsioon: liikuva keha aeg muutub aeglasemaks
- 1904 Hendrik Antoon Lorentz:
  Maxwelli võrrandid on muutumatu Lorentzi teistenduste all
- 1905 Henri Poincaré (math, 1854–1912)
  Lorentzi rühm = Lorentzi teisendus + ruumipööred

$$\mathrm{SO}_0(1,3) = \mathrm{SO}(3) \circ \mathrm{SO}_0(1,1) \circ \exp \mathbb{R}^2$$

- Émile Borel, Llewellyn Thomas, Eugene Wigner, ...

$$L_1 L_2 = L_{12} R, \qquad R \in \mathrm{SO}(3)$$

Kalibratsioon

Elektromagnetvälja Lagrange'i tihedus on invariantne kalibratsiooni teistenduste all:

esimest liiki teisendus
$\phi(x) \to e^{i\theta(x)}\phi(x)$ (faasiteisendus)

kompaktne faasirühm $\mathrm{U}(1)$

teist liiki teisendus
$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x)$

MITTE lokaalselt kompaktne rühm liitmise suhtes (Gleasoni teoreem)

Asendus $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$ on kalibratsiooniprintsiip. Protsess $\theta \to \theta(x)$ on rühma $\mathrm{U}(1)$ kalibreerimine.

- 1929 Hermann Weyl: "Elektromagnetväli ja selle välja vastastikmõju ainega on tulemus aine Lagrange'i tiheduse kalibreerimisest $\mathrm{U}(1)$ suhtes." (NB: Lagrange'i tihedus!)

Elementaarosakeste standardmudel

Tasases aegruumis asuva väljateooria jaoks on Weyli kalibratsioonimõiste kasutatud kirjeldamas tugevat ja nõrka vastastikmõju, üldistades $\mathrm{U}(1)$ teistele kompaktsetele Lierühmadele.

- Mittekompaktne elektronõrk aegruum

$$\mathbb{D}(2) = \mathrm{SO}_0(1,1) \times (\mathrm{SO}_0(1,3)/\,\mathrm{SO}(3))$$

- Elektronõrk standardmudel

$$\mathrm{U}(2) = \mathrm{U}(1) \circ \mathrm{SU}(2)$$

(hüperlaengu rühm (EM) $\circ$ isospinni rühm (Nõrk)).

Nõrga vastastikmõju sümmeetriad sundivad aineosakesed olema ilma massita (sest massipanused rikkuksid paarsuse).

Elementaarosakeste standardmudel (jätk)

- Tugev vastastikmõju $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(3)$ (isospinni rühm $\times$ värvirühm)
- Standardmudeli kalibratsioonirühm

$$\underbrace{\mathrm{U}(1)}_{\text{charge}} \times \underbrace{\mathrm{SU}(2)}_{\text{isospinn}} \times \underbrace{\mathrm{SU}(3)}_{\text{värv}} / (\mathbb{1}(2) \times \mathbb{1}(3))$$

- Kaks kordajat siserühmas $\mathrm{U}(\mathbb{1}_6) \circ (\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(3))$ ei ole otseselt, vaid keskselt seotud. Kõik komponendid on kompaktsed.
- Kalibratsiooni invariantne Lagrange'i tihedus ei sisalda massipanust

$$(m^2)_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$$

ja seepärast on kalibratsioonväljad esialgselt ilma massita (vt. aga juba mainitud BEH-mehanismi kohta)

Matemaatiline raamistik

Peaaegu sobiv faktorruumide G/H käsitemaks on indutseeritud esituste teooria, nagu Eugene Paul Wigner (1902–1995) kasutas seda vabade osakeste jaoks.

- alamrühm $H \subset G$
- sümmeetriarühma G struktuur
- sümmeetria määrab dünaamika:
  "Aegruum ütleb ainele, kuidas liikuda ja aine ütleb aegruumile, kuidas kõverduda." (John Archibald Wheeler)

Erirelatiivsuse sümmeetria

$$\mathrm{Lor}_{1,3} \equiv \mathrm{SO}_0(1,3) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}_\mathbb{R})$$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}_\mathbb{R})$ on rühma $\mathrm{SO}_0(1,3)$ kahekordne kate. Homomorfism $D : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \ni g \mapsto Dg \in \mathrm{Lor}_{1,3}$ on antud isomorfismi

$$\hat{\sigma} : \mathbb{E}_{1,3} \ni p^\mu \mapsto \sigma_\mu p^\mu = \hat{\sigma}(p) = \hat{\sigma}(p)^\dagger \in M_2(\mathbb{C})$$

kaudu, nii et järgnev diagramm on kommuteeruv:

$$\begin{array}{rccc}
\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \ni g\colon & \hat{\sigma}(p) & \longrightarrow & g\hat{\sigma}(p)g^\dagger \\
D\downarrow & \downarrow \hat{\sigma}^{-1} & & \hat{\sigma}^{-1}\downarrow \\
\mathrm{Lor}_{1,3} \ni D_g\colon & p & \longrightarrow & D_g(p) = \hat{\sigma}^{-1}(g\hat{\sigma}(p)g^\dagger)
\end{array}$$

s.t. $g\hat{\sigma}(p)g^\dagger = \hat{\sigma}(D_g p)$.

Tasakaalustusrühm

$\mathrm{Lor}_{1,3}$ mõiub Minkowski ruumile $\mathbb{E}_{1,3}$

$$\mathrm{Lor}_{1,3} \ni \Lambda : \mathbb{E}_{1,3} \ni p \mapsto \Lambda p \in \mathbb{E}_{1,3}$$

$H \subset \mathrm{Lor}_{1,3}$ kinnine alamrühm $\Rightarrow$
G/H reaalväärtustega analüütiline muutkond.

FG_p isotroopia või punkti p tasakaalustusrühm (stabilisaator)

- $FG_p = \{g \in G : gp = p\}$
- $F\,\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})_p = \{g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) : g\hat{\sigma}(p)g^\dagger = \hat{\sigma}(p)\}$
- or $F\,\mathrm{Lor}_{1,3}(p) = \{\Lambda \in \mathrm{Lor}_{1,3} : \Lambda p = p\}$

Wigneri väikesed rühmad

Wigneri klassifikatsiooni järgi on kolm mittetriviaalset tasakaalustusrühma:

- $q^2 > 0$: $\mathrm{SO}(3) \sim \mathrm{SU}(2)$, standardvektor $q = (1,0,0,0)$
- $q^2 < 0$: $SO_0(1,2) \sim \mathrm{SU}(1,1) \sim \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$
- $q^2 = 0$, $q \neq 0$: $E(2) = \mathrm{SO}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ $(q = (1,0,0,1))$

vastavate muutkondadega:

- $q^2 > 0$: $\mathrm{SO}_0(1,3)/\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathrm{SU}(2) \cong Y^3$ ajasarnane (energiasarnane) hüperboloid massipinnal
- $q^2 < 0$: $\mathrm{SO}_0(1,3)/\mathrm{SO}_0(1,2) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathrm{SU}(1,1) \cong Y^{1,2}$ ruumisarnane (impulsisarnane) hüperboloid
- $q^2 = 0$: $\mathrm{SO}_0(1,3)/E(2) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathrm{SO}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ tulevikku sihitud valguskoonus

Chevalley

$E(2) = \mathrm{SO}(2) \ltimes \mathbb{R}^2 \subset \mathrm{Lor}_{1,3}$ on mittemaksimaalne mittekompaktne seotud lahenduv alamrühm.

Aga miks mitte **maksimaalne** mittekompaktne seotud lahenduv alamrühm, s.t. miks mitte Boreli alamrühm Bor?

Chevalley teoreem

Olgu G lineaarne algebrailine rühm ja $H \subset G$ kinnine algebrailine alamrühm. Siis on olemas ratsionaalne esitus $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ ja ühemõõtmeline alamruum $L \subset V$, nii et

$$H = \{g \in G : \phi(g)L = L\}.$$

Vastupidi, kui $\ell \in L$ on vektor, mis paneb üles H-püsivat joon V-s, siis $\phi(g)\ell = \chi(g)\ell$ defineerib alamrühma *iseloomu* χ.

Lie–Kolchin

Valgusesarnase vektor $q = (1,0,0,1)$ puhul on iseloomustav võrrand $Bq = \chi(B)q$, $B \in \mathrm{Lor}_{1,3}$ iseloomuga $\chi \in X(\mathrm{Bor}_{1,3})$.

Lie–Kolchin teoreem

Olgu G seotud algebrailine linearne lahenduv rühm ja olgu (ϕ, V) rühma G esitus. Siis on olemas iseloomud $\chi_i \in X(G)$ ja lipp

$$V = V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_n \supset V_{n+1} = \{0\},$$

mille jaoks $(\phi(g) - \chi_i(g))V_i \subset V_{i+1}$ $\forall g \in G$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Võttes $i = n$ jõuame iseloomustava võrrandini $\phi(g)V_n = \chi_n(g)V_n$, mis määrab joont $V_n \subset V$. Seega: igal lahenduval rühmal on ühine ühemõõtmeline alamruum $L \subset V$.

Borel

Teoreem

Olgu G seotud lineaarne algebrailine rühm. Siis

1. G sisaldab Boreli alamrühma B
2. kõik teised Boreli alamrühmad on konjugeeritud B-ga
3. homogeenne ruum G/B on projektiivne teisend (*variety*)
4. $G = \bigcup_{g \in G} gBg^{-1}$

- $m \neq 0$: maksimaalne seotud kompaktne ja lihtne alamrühm (punkti kinnitav alamrühm $\mathrm{SO}(3)$)
- $m = 0$: maksimaalne seotud mittekompaktne ja lahenduv alamrühm (joont kinnitav alamrühm $\mathrm{Bor}_{1,3}$)

See on *matemaatiline* erinevus $m \neq 0$ ja $m = 0$ vahel.

Definitsiooni järgi on algebrailise rühma G Boreli alamrühm maksimaalne seotud ja lahenduv alamrühm.

Lie algebra ehk lineariseerimine

Boreli alamrühm on esitatav poolotsekorrutisena,

$$\mathrm{Bor}_{1,3} = (\mathrm{Bor}_{1,3})_u \rtimes \mathrm{Tor}_{1,3} \subset \mathrm{Lor}_{1,3}$$

kus $\mathrm{Tor}_{1,3} = \mathrm{SO}_0(1,1) \times \mathrm{SO}(2)$ on $\mathrm{Lor}_{1,3}$ maksimaalne toor ning $(\mathrm{Bor}_{1,3})_u$ on Boreli alamrühma unipotentne radikaal.

Lineariseerimine $\mathrm{Bor}_{1,3} \to \log \mathrm{Bor}_{1,3} \equiv \mathrm{bor}_{1,3} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{b_\mu\}_0^3$ viib Boreli alamalgebrale $\mathrm{bor}_{1,3} = (\mathrm{bor}_{1,3})_u \rtimes \mathrm{tor}_{1,3}$,

$$[b_0, b_a] = b_a, \quad [b_3, b_a] = -\epsilon_{3ab} b_b$$

kus $b_0 = e_{03}$, $b_3 = e_{21}$ ja $b_a = e_{0a} + e_{3a}$, $a = 1, 2$. Lahendades omaväärtusprobleemi ja teisendades Chevalley baasi (h, e, f) ehk $\{b_0, b_1, b_2, b_3\} \to \{t_0, t_+; u_0, u_-\}$ saame

$$[t_0, t_+] = t_+, \quad [u_0, u_-] = -u_-, \quad [t, u] = 0,$$

s.t. $\mathrm{bor}_{1,3} \cong \mathrm{sol}_2(e) \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_2 \otimes \mathrm{sol}_2(f) =: \mathrm{sol}_2(e) \boxplus \mathrm{sol}_2(f)$.

Boreli vastand

On olemas ainulaadne Boreli alamrühm $\widetilde{\mathrm{Bor}}_{1,3} \subset \mathrm{Lor}_{13}$, mida nimetame Boreli vastandit, nii et

$$\mathrm{Bor}_{1,3} \cap \widetilde{\mathrm{Bor}}_{1,3} = \mathrm{Tor}_{1,3} = \mathrm{SO}_0(1,1) \times \mathrm{SO}(2)$$

ja $\mathrm{Lor}_{1,3} = \mathrm{Bor}_{1,3} \cup \widetilde{\mathrm{Bor}}_{1,3}$. Lineariseerimine $\log \widetilde{\mathrm{Bor}}_{1,3} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{k_\mu\}_0^3$ annab

$$[k_0, k_a] = k_a, \quad [k_3, k_a] = -\epsilon_{3ab} k_b$$

kus $k_0 = -e_{03}$, $k_3 = e_{21}$ ja $k_a = -e_{0a} + e_{3a}$, $a = 1, 2$, nii et $\mathrm{lor}_{1,3} = (\widetilde{\mathrm{bor}}_{1,3})_u \oplus (\mathrm{bor}_{1,3})_u \oplus \mathrm{tor}_{1,3}$. Koos teise baasiga saame

$$[b_0, k_a] = -k_a, \qquad [b_3, k_a] = -\eta_{1a} k_2 + \eta_{2a} k_1,$$
$$[b_a, k_b] = 2\eta_{ab} b_0 - 2\epsilon_{ab3} b_3.$$

Laiendus

Lemma

Kui $e_{\mu\nu} = -e_{\nu\mu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ on defineeritud kui

$$
\begin{aligned}
e_{01} &= e_2 \boxplus (-e_2) & \qquad e_{31} &= e_1 \boxplus e_1 \\
e_{02} &= -i(e_1 \boxplus (-e_1)) & \qquad e_{32} &= -i(e_2 \boxplus e_2) \\
e_{03} &= e_3 \boxplus (-e_3) & \qquad e_{21} &= -i(e_3 \boxplus e_3)
\end{aligned}
$$

(Kroneckeri summa $\boxplus$ on defineeritud juba enne), kus $\{e_k\}_1^3$ on algebra $\mathrm{sl}(2, \mathbb{R})$ elemendid, $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_3, e_1] = e_2$ ja $[e_3, e_2] = e_1$, siis $e_{\mu\nu}$ moodustavad Lorentzi algebra $\mathrm{lor}_{1,3}$, kus

$$[e_{\mu\nu}, e_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\rho} e_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} e_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma} e_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} e_{\mu\sigma},$$

s.t. Lorentzi algebra sl-struktuuri.

Jagatis G/H

Kui G on algebrailine rühm ja H on kinnine alamrühm, siis sile projektsioon $\pi : G \to G/H$ rühmast kõrvalklassi omandab kohalikut sobivat lõiget γ, mis teeb diagrammi

$$\begin{array}{rcl} \gamma{:}G/H & \rightarrow & G \\ \mathrm{id}_{G/H}\searrow & & \downarrow\pi \\ & & G/H \end{array} \qquad \pi\circ\gamma=\mathrm{id}_{G/H}$$

kommuteeruvaks. Üks näite on Cartani lahutus

$$\begin{array}{rccccc} \log G = \mathfrak{g} = & \mathfrak{g} \bmod \log K & \oplus & \log K \\ & \text{noncompact} & & \text{compact} \\ \exp\downarrow & \downarrow\exp & & \downarrow\exp \\ G = & \exp(\mathfrak{g} \bmod \log K) & \times & K \end{array}$$

Lõike erinevad valikud annavad erinevaid kõrvalklassi esindajaid. Boreli alamrühma $B \subset G$ puhul on G/B suurim homogeenne ruum, mis on projektiivne teisend. Boreli alamrühmal on G/B-s kinnispunkt.

Esimene tüüp

Kompaktse SO-tüüpi parametriseerimise

$$\mathrm{lor}_{1,3} \ni -\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}e^{\mu\nu} = e_{12}(\vec{\omega}) + \mathrm{bor}_{1,3}$$

puhul on $e_{12}(\vec{\omega}) := \omega_1 e_{31} + \omega_2 e_{32}$ kompaktne. Cartani–Killingi korrutis on negatiivne,

$$(e_{12}(\vec{\omega}), e_{12}(\vec{\omega})) = -2(\omega_1^2 + \omega_2^2) =: -2\omega^2 < 0$$

s.t. kõrvalklassiesitus on kompaktne. Samas

$$(\exp e_{12}(\vec{\omega}), \exp e_{12}(\vec{\omega})) = 4\cos^2\omega > 0.$$

Ümberparametriseerimise $x_i = (\sin\omega/\omega)\omega_i$ $(i = 1, 2)$ kaudu ja lisades $x_3 = \cos\omega$ saame $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, s.t. tulemus on kahemõõtmeline kuulipind.

Esimene tüüp (jätk)

Iwasawa lahutust rakendades saame

$$\begin{aligned} \mathrm{Lor}_{1,3} &= \mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}_0(1,1) \times \exp \mathbb{R}^2 \\ &\cong (\mathrm{SO}(3)/\,\mathrm{SO}(2)) \times \mathrm{SO}(2) \times \underbrace{\mathrm{SO}_0(1,1) \times \exp \mathbb{R}^2}_{\mathrm{Bor}_{1,3}} \end{aligned}$$

ehk

$$\mathrm{Lor}_{1,3}\,/\,\mathrm{Bor}_{1,3} = \mathrm{SO}(3)/\,\mathrm{SO}(2) = \Omega^2.$$

Selle parametriseerimise projektiivsed koordinaadid on

$$-\infty < z_a = \frac{x_a}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}} = \frac{x_a}{x_3} < \infty, \qquad a = 1, 2.$$

Teine tüüp

$\mathrm{SO}_{1,2}$-parametriseerimise

$$\mathrm{so}_{1,3} \ni -\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}e^{\mu\nu} = \sum_{a=1}^{2}\vartheta_a e_{0a} + \mathrm{bor}_{1,3}$$

puhul saame Cartani–Killingi korrutise jaoks positiivset tulemust

$$\left(\sum_a \vartheta_a e_{0a}, \sum_b \vartheta_b e_{0b}\right) = 2(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2) =: 2\vartheta^2 > 0.$$

Reparametriseerimine $x_a = (\sinh\vartheta/\vartheta)\vartheta_a$, $a = 1, 2$ ja baasi täiendus $x_0 = \cosh\vartheta$ annab $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$. Sellepärast on kõrvalklassi esindajad mittekompaktse ühepinnalise hüperboloidi pinnal, $Y^2 = \mathrm{SO}_0(1,2)/\,\mathrm{SO}(2)$, ja projektiivsed koordinaadid on

$$-1 < \zeta_a = \frac{x_a}{\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}} < 1, \quad a = 1, 2.$$

Kolmas tüüp

Boreli lahutusega $\mathrm{lor}_{1,3} = \widetilde{\mathrm{bor}}_{1,3} \cup \mathrm{bor}_{1,3}$ seotud on kolmas (ja meile kõige huvitavam) tüüp. Tuletame meelde, et kehtib

$$\mathrm{lor}_{1,3} = (\widetilde{\mathrm{bor}}_{1,3})_u \oplus ((\mathrm{bor}_{1,3})_u \rtimes \mathrm{tor}_{1,3}),$$

kus $(\mathrm{bor}_{1,3})_u$ ja $(\widetilde{\mathrm{bor}}_{1,3})_u$ on unipotentsete radikaalide $(\mathrm{Bor}_{1,3})_u$ ja $(\widetilde{\mathrm{Bor}}_{1,3})_u$ algebrad ning $\mathrm{tor}_{1,3} = \log(\mathrm{SO}_0(1,1) \times \mathrm{SO}(2))$.

$$\mathrm{lor}_{1,3} \ni -\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}e^{\mu\nu} = k_{12}(\vec{\kappa}) + \mathrm{bor}_{1,3}$$

annab sel korral Cartani–Killingi korrutist $(k_{12}(\vec{\kappa}), k_{12}(\vec{\kappa})) \equiv 0$. See on laheduvuse teine laiendus. Rühma kõrvalklasside esindajate jaoks saame $(\exp k_{12}(\vec{\kappa}), \exp k_{12}(\vec{\kappa})) = 4$. Reparametriseerimine $x = \kappa_1$, $y = \kappa_2$ ning $t = \frac{1}{2}\kappa^2$ annab $2t - (x^2 + y^2) = 0$, nii et reaalsed parameetrid (t, x, y) kirjeldavad elliptilise paraboloidi pinda.

Esinemised

Lie algebrad ei ole esitatud füüsikas üldjuhul abstraktsete algebratena vaid esinemiste kaudu. Matemaatiliste käepärasuse pärast on mõistlik kaaluda kompleksarvude korpuses asuvate vektorruumide esinemised. Reaalväärtustega algebra $\mathfrak{g}$ saab komplekseerida holomorfilise laienduse teel,

$$\begin{array}{ccc} \text{reaalväärtusega } \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \hat{D}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}), \end{array}$$

$\hat{D}(x+iy) = D(x) + iD(y)$. Kuna Lorentzi algebra on $\mathrm{so}_4(\mathbb{C})$ reaalne vorm, saab kompleksset esinemist $T^{(k,l)}$, $k, l = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ samastada $\mathrm{so}_4(\mathbb{C})$ ja selle su_2-struktuuriga.

Kompleksesinemiste su_2-struktuur

$$\begin{aligned} \mathrm{lor}_{1,3} &= \mathrm{so}(1,3) \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{lor}_{1,3} = \mathrm{so}_4(\mathbb{C}) \\ &= \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_R \mathrm{su}(2) \oplus \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{su}(2) \end{aligned}$$

vastab siis esinemisele

$$\{e_{\mu\nu}\}_0^3 \xrightarrow[\text{unitaarne nipp}]{\text{Weyli}} \left\{ \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\epsilon_{pnq} e_{nq} \pm i e_{0p} \right) \right\}_1^3$$

$$\xrightarrow[\text{kujutis}]{\text{lõhenemis-}} \{D_p = m_p \boxplus m_p,\ B_p = -i(m_p \boxplus (-m_p))\}_1^3$$

$$\xrightarrow{T^{(k,l)}} \Big\{ T^{(k,l)}(D_p) = D^{(k)}(m_p) \boxplus D^{(l)}(m_p), \quad T^{(k,l)}(B_p) = -i\left(D^{(k)}(m_p) \boxplus (-D^{(l)}(m_p)) \right) \Big\}_1^3$$

$\{m_p\}_1^3$ moodustavad su_2 algebrat ja $D^{(k)}$ on su_2 ühised esinemised.

Kompleksesinemiste $\mathrm{sl}_2(\mathbb{R})$-struktuur

Iga lõplikumõõtmeline taandumatu $\mathrm{lor}_{1,3}$ esitus määratud paari (k, l) jaoks on isomorfne $T^{(k,l)}$-iga. Kuid Lorentzi rühm ei ole kompaktne. Seepärast on mõistlik defineerida $\mathrm{sl}_2(\mathbb{R})$ esitusi, kuna $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ on lihtsaim mittekompaktne rühm. Ülal mainitud lemma pärast ja sl_2-lahutuse

$$\mathrm{lor}_{1,3} \cong \mathrm{sl}_2(e) \boxplus \mathrm{sl}_2(f)$$

kaudu on see lihtne teha:

$$\begin{aligned}
\pi^{(k,l)}(e_{01}) &= \pi^{(k)}(e_2) \boxplus \left(-\pi^{(l)}(e_2)\right) \\
\pi^{(k,l)}(e_{31}) &= \pi^{(k)}(e_1) \boxplus \pi^{(l)}(e_1) \\
\pi^{(k,l)}(e_{21}) &= -i\left(\pi^{(k)}(e_3) \boxplus \pi^{(l)}(e_3)\right)
\end{aligned}$$

kus $\pi^{(k)}$, $k = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ on $\mathrm{sl}_2(\mathbb{R})$ standardesitus.

Teoreem

Teoreem

Olgu $2k \in \mathbb{N}$ ja (π, V) lihtne $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ esitud mõõduga $2k+1$.

1. Mingi k jaoks on π ekvivalentne esitusega $\pi^{(k)}$
2. $\pi^{(k)}(h)$ omaväärtused on $\{-2k, -2k-2, \ldots, 2k\} = \mathrm{Spec}\,\pi^{(k)}(h)$
3. Kui $0 \neq v \in V$ rahuldab $\pi^{(k)}(e)v = 0$, siis $\pi^{(k)}(h)v = 2kv$, s.t. esitustel $\pi^{(k)}(h)$ ja $\pi^{(k)}(e)$ on ühine omavektor $|k, k\rangle$.
4. Kui $0 \neq v \in V$ rahuldab $\pi^{(k)}(f)v = 0$, siis $\pi^{(k)}(h)v = -2kv$, s.t. esitustel $\pi^{(k)}(h)$ ja $\pi^{(k)}(f)$ on ühine omavektor $|k, -k\rangle$.

Punktid 3 ja 4 defineerivad esituse $\pi^{(k,l)}$ omavektorid, mis on $\mathrm{bor}_{1,3}$ spiraalsuse olekud $\mathrm{sol}_2(e) \boxplus \mathrm{sol}_2(f)$.

Spiraalsuse olekud

$\mathrm{bor}_{1,3}$-olekud komponendis $\mathrm{sol}_2(e)$:

$$\begin{aligned} \pi^{(k,l)}(t_0) &= \frac{1}{2}\pi^{(k)}(h) \otimes \mathbb{1}_{2l+1} \\ \pi^{(k,l)}(t_+) &= i\pi^{(k)}(e) \otimes \mathbb{1}_{2l+1} \end{aligned}$$

$\mathrm{bor}_{1,3}$-olekud komponendis $\mathrm{sol}_2(f)$:

$$\begin{aligned} \pi^{(k,l)}(u_0) &= \mathbb{1}_{2k+1} \otimes \frac{1}{2}\pi^{(l)}(k) \\ \pi^{(k,l)}(u_-) &= \mathbb{1}_{2k+1} \otimes i\pi^{(l)}(f) \end{aligned}$$

Weinbergi ansatzi järgi on olulised:

1. esitus (k,k) (Majorana)
2. esitus $(k,0) \oplus (0,k)$ (Dirac)

Majorana

Ilma massita osakesel spiraalsusega $\lambda = 2k$ on $n = 4k$ spiraalsuse olekut:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{sol}_2(e) & 2k \text{ olekut } |k,k;k,-k+p\rangle,\ \ p = 1,2,\ldots,2k, \\ \mathrm{sol}_2(f) & 2k \text{ olekut } |k,k;k-p,-k\rangle,\ \ p = 1,2,\ldots,2k. \end{array}$$

Eriti tähtis on siin esitus $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, mis kirjeldab ilma maasita footonit spiraalsusega 1 ja kahe spiraalsuse olekutega

$$|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle, \quad |\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle.$$

Dirac

Esituse $(k, 0)$ jaoks on $\mathrm{sol}_2(e)$ osas ainult üks omavektor $|k, 0; k, 0\rangle$, vastavalt t_0 omavektorile $\lambda = k$ ($\mathrm{sol}_2(f)$ on triviaalne). $k = \frac{1}{2}$ puhul on $t_0 = \frac{1}{2}h$ ja $t_+ = ie$ ning $\mathrm{bor}_{1,3}(\frac{1}{2}, 0)$ fundamentaalesitus saab väljendatud kujul

$$b_0 = \frac{1}{2}h,\ \ b_1 = e,\ \ b_2 = -ie,\ \ b_3 = -\frac{1}{2}ih.$$

Esituse $(0, k)$ jaoks on $\mathrm{sol}_2(f)$ osas ainult üks omavektor $|k, 0; -k, 0\rangle$, vastavalt u_0 omavektorile $\lambda = -k$ ($\mathrm{sol}_2(a)$ on triviaalne). $k = \frac{1}{2}$ puhul on $u_0 = -\frac{1}{2}h$ ja $u_- = -if$ ning $\mathrm{bor}_{1,3}(0, \frac{1}{2})$ fundamentaalesitus saab väljendatud kujul

$$b_0 = -\frac{1}{2}h,\ \ b_1 = -f,\ \ b_2 = if,\ \ b_3 = \frac{1}{2}ih.$$

Kokkuvõtteks

Kui on antud puhas kiraalsuse (spinni) olek osakese jaoks, siis selle osakese mass on null ja tasakaalustusrühm (stabilisaator) on joont kinnitav rühm, s.t. Boreli alamrühm. Sellepärast vähemalt elektromagnetvälja jaoks määrab sümmeetria dünaamikat.