Spinni operaator ja Poincaré rühma esitused

Stefan Groote, TÜFI, 12.03.2025

1 Sissejuhatuseks

Eelmises ettekandes mainisin oma huvi tuuma, mis on seotud sellega, kuidas mass võiks tekkida vasak- ja paremkäelistest olekutest keskse laenguna. Täna tegelen ühe huvitava artikliga, milles sellest on kaudselt juttu. Artikkel ise selles kujus ei ole avalikustatud ajakirjas, aga pakkub nii palju põnevaid vaatenurka, et tasub kaalutlemist. Lähtepunkt on kaua kestnud probleem kvantmehaanikas, nimelt õige spinnioperaatori defineerimine. Lie-rühmas lähtudes teame, et Poincaré rühmal on kaks Casimiri operaatorit, milles üks on mass, teine aga massiga seotud spinn. Viimast sõnastan niivõrd ettevaatlikult, sest siiani on püstitatud seitset(!) erinevat mudelit kirjeldamas seda spinni operaatorit, igaüks oma eelistuste ja puudustega (vt. ülevaadeartiklit [1]). Poincaré rühma teine Casimiri operaator on Pauli–Lubanski vektor ja paigalsüsteemis on see vektor tõesti esitatav Pauli maatriksitega, kuid liiguvas süsteemis ei ole sellel vektoril enam spinni kui pöördimpulsi omadusi, kuna moodustajad ei rahulda isegi $su(2)$ pöördimpulsi algebrat. Artikkel [2] võtab kõige põhjalikult uuritud analüüsi ette, mis on läbi viinud Bogolubovi, Logunovi ja Todorovi käsiraamatus [3] ja otsib (ja leiab!) väljapääsu, mida siin ettekandes käsitlen.

1.1 Bogolubovi skeem

Kuna spinni operaator ei saa olla Pauli–Lubanski vektor ise, võiks operaator olla mingi lineaarkombinatsioon, mille üheselt määramiseks panevad käsiraamatu [3] autorid püsti viis tingimust: spinni operaator …

1. … kommuteerub impulssoperaatoriga.
2. … on teljevektor.
3. … rahuldab algebrat $su(2)$.
4. … teisendub kolmkomponentides ruumiliste pöörete all vektorina.
5. … on paigalsüsteemis kolmkomponentide suhtes võrdne Pauli–Lubanski vektoriga.

Niimoodi määrtud spinni operaator on unikaalne, kuid ei ole Lorentzi teisenduse all kovariantne. Omas artiklis [2] eemaldavad Korea teadlased Choi ja Cho teist ja viiendat tingimust, mida nad õigupoolest vajalikuks ei pea. Selle asemel nõuavad, et spinni operaator oleks Lorentzi tensor. Sellest järeldavad autorid, et on tegelikult kaks spinni operaatorit, vasakkäeline ja paremkäeline, mis igaüks rahuldab muudetud tingimusi ja moodustavad Poincaré vasakkäelist ja paremkäelist esitust, ja paarsuse võrra laiendatud Poincaré rühmas saab füüsikalist spinni esitada nende otsesummana $(s, 0) \oplus (0, s)$, millel puudub üleliigseid vabadusjärke, nagu esinevad näiteks Rarita–Schwingeri kõrgema spinni olekutes (nt. [4]).

2 Choi ja Cho spinnioperaatori(te) tarindus

Tingimused, millest artikli [2] autorid lähtuvad, on

1. (väike rühm) S^k peab kommuteeruma impulsiga, $[S^k, P^\mu] = 0$.
2. (pöördimpulss) S^k peab rahuldama $su(2)$ algebrat, $[S^i, S^j] = i\epsilon_{ijk}S^k$.
3. (vektor) S^k peab käituma kolmemõõtmelise pöördimpulssvektorina, $[J^j, S^k] = i\epsilon_{jkl}S^l$, kus $J^j = \epsilon_{jkl}J^{kl}/2$ on ümber i-telje pöörete moodustaja.
4. (tensor) S^k peab teisenduma spinni (Hodge) duaaltensori $*S^{\mu\nu} := \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}S_{\rho\sigma}/2$ $k0$-komponendina, $S^k = *S^{k0} = \epsilon_{ijk}S^{ij}/2$, mille jaoks kehtib
$$[J^{\mu\nu}, *S^{k0}] = \eta^{\nu k} * S^{\mu 0} - \eta^{\mu k} * S^{\nu 0} - \eta^{0\mu} * S^{k\nu} + \eta^{0\nu} * S^{k\mu},$$
kus $J^{\mu\nu}$ on homogeense Lorentzi rühma moodustajad.

Olen jälginud nende arvutuskäiku, kuid ei esita siin seminaris selle käigu detaile. Lähtepunkt on Pauli–Lubanski pseudovektor („pseudo“ seetõttu, et ei ole Lorentzi kovariantne)

$$w_\mu := \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}p^\sigma. \tag{1}$$

Tarindades $S^k = a_{k,\mu}w^\mu$ saab kasutada, et $[J^{\kappa\lambda}, w^\mu] = i(w^\kappa\eta^{\lambda\mu} - w^\lambda\eta^{\kappa\mu})$. Lõpptulemus igatahes osutub kahekordseks (ja m on esialgus ainult vaba parameeter),

$$S^k_\pm = \frac{1}{m^2}(p^0w^k - p^kw^0) \pm \frac{i}{m^2}\epsilon_{klm}p^lw^m, \tag{2}$$

kus tavaliselt kreeka indeksid tähistavad nelimõõtmelise vektori, ladina indeksid aga kolmemõõtmelise vektori komponendid, kus aja- ehk 0-komponent on ära jäetud. Niisugune tulemus, mis kirjeldab vasakkäelist spinni S_- ja paremkäelist spinni S_+, ei ole üllatav seepärast, et neid saab tekkidada spinnvektori komponentidest $S^k = \hbar\sigma^k/2$ Lorentzi tõuge kaudu, kus σ^k on Pauli maatriksite abil koostatud spinni esitus kahekomponentilise (Weyli) spiinorile rakendamiseks. Vastavad tõuked kolmimpulsi $\vec{p}$ kaudu määratud suunas on $\vec{\zeta}(p)$, ja teisendused ise on $Q_\pm(\vec{p})$, kus

$$Q_\pm(p) = \exp\left(\pm\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\zeta}(p)\right), \qquad \vec{\zeta}(p) = \frac{\zeta\vec{p}}{|\vec{p}|}, \tag{3}$$

kus tormakus (ingl. k. *rapidity*) ζ määrab tõuke suurust. Ritta arendades saab näidata, et kehtib

$$S^k_\pm(p) = Q_\pm(p)S^kQ^{-1}_\pm(p), \tag{4}$$

kus tormakus on üheselt määrtud hüperboolsete funktsioonide kaudu,

$$\cosh\left(\frac{\zeta}{2}\right) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}}, \qquad \sinh\left(\frac{\zeta}{2}\right) = \sqrt{\frac{E - mc^2}{2mc^2}}. \tag{5}$$

2.1 Paarsuse esitus

Paarsus operaatorina mõjub erineval viisil neliimpulsile ja Pauli–Lubanski nelivektorile, ja sellest saame lihtsal viisil järeldada mõju spinnile,

$$\bar{p} := \mathcal{P}p = (p^0, -\vec{p}\,), \quad \bar{w} := \mathcal{P}w = (-w^0, \vec{w}\,), \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}S^k_\pm(p) = S^k_\pm(\bar{p}) = S^k_\mp(p), \tag{6}$$

mis omakorda näitab veenvalt, et spinnvektorid on seotud käelisusega, kuna järelikult

$$\mathcal{P}\psi_\pm(p) = \psi_\pm(\bar{p}) = \psi_\mp(p). \tag{7}$$

See on kooskõlas sellega, et $Q_\pm(p)$ teisendab paigalsüsteemi spinni seisundit ehk spiinorit $\psi_\pm(\hat{p})$, kus $\hat{p} = (mc, \vec{0}\,)$, liikuvasse süsteemi võrrandi $\psi_\pm(p) = Q_\pm(p)\psi_\pm(\hat{p})$ abil ja

$$Q_\pm(\bar{p}) = \exp\left(\pm\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\zeta}(\bar{p})\right) = \exp\left(\mp\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\zeta}(p)\right) = Q_\mp(p). \tag{8}$$

Kuna $\mathcal{P}\hat{p} = \hat{p}$, on selge, et paigalsüsteemis on spiinorid võrdsed, $\psi_\mp(\hat{p}) = \mathcal{P}\psi_\pm(\hat{p}) = \psi_\pm(\hat{p})$. Seda saab kasutada selleks, et tekkitada osakese ja antiosakese spiinoreid positiivse ja negatiivse energia spiinoritena, nagu seda on teinud Thaller [5]. Nagu teatud näiteks elektronõrgas teoorias, murrab mass paarsuse sümmeetriat. Sellepärast ei ole massiga osakese ja antiosakese spiinorid puhtad käelisuse spiinorid vaid vasakkäelisest ja paremkäelisest esitusest koostatud esituse $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ elemendid,[1]

$$\begin{aligned}
\psi^P(p) &= \begin{pmatrix} \psi_-(p) \\ \psi_+(p) \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{P}\psi^P(p) = \gamma^0\psi^P(p), \qquad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \\
\psi^{AP}(p) &= \begin{pmatrix} \psi_-(p) \\ -\psi_+(p) \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{P}\psi^{AP}(p) = -\gamma^0\psi^{AP}(p),
\end{aligned} \tag{9}$$

kus Diraci gammamaatriksite jaoks on kasutatud käeline esitus. Rakendades koondspiinoritele $\psi^{P/AP}(p)$ laiendatud tõukeoperaatori

$$Q(p) = \begin{pmatrix} Q_-(p) & 0 \\ 0 & Q_+(p) \end{pmatrix} \tag{10}$$

ning kasutades $Q_+(p)Q_-(p) = 1$ ja seetõttu $Q(p)Q(\bar{p}) = 1$ ehk $Q(\bar{p}) = Q^{-1}(p)$ on suhteliselt lihtne näidata, et paarsust saab esitada operaatorina $Q^{-2}(p)$, lähtuvalt sellest, et $\psi^{P/AP}(p) = Q(p)\psi^{P/AP}(\hat{p})$, $\mathcal{P}\psi^{P/AP}(\hat{p}) = \psi^{P/AP}(\hat{p})$ ja $\mathcal{P}Q(p)\mathcal{P} = Q(\bar{p})$. Sellepärast ongi

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\psi^{P/AP}(p) &= \mathcal{P}Q(p)\psi^{P/AP}(\hat{p}) = \mathcal{P}Q(p)\mathcal{P}\psi^{P/AP}(\hat{p}) = \\
&= Q^{-1}(p)\psi^{P/AP}(\hat{p}) = Q^{-2}(p)\psi^{P/AP}(p).
\end{aligned} \tag{11}$$

Viimaks on

$$Q^{-2}(p) = Q^2(\bar{p}) = \begin{pmatrix} Q^2_-(\bar{p}) & 0 \\ 0 & Q^2_+(\bar{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^2_+(p) & 0 \\ 0 & Q^2_-(p) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

[1] Erinen siin artiklist [2] seetõttu, et minu ülemine komponent on vasakkäeline spiinor $\psi_-(p)$.

2.2 Diraci võrrandi tuletamine

Siinkohal peaksime aru saama, et operaatoris $Q(p)$ või selle operaatori astmetes peidetud eksponentsiaalrida katkeb peale esimest järku, kuna $(\vec{\sigma}\cdot\vec{\zeta})(\vec{\sigma}\cdot\vec{\zeta}) = \zeta^2\mathbb{1}$ ja seepärast lihtsalt $\exp(\pm\sigma\cdot\vec{\zeta}) = \cosh\zeta \pm \sinh\zeta\hat{\sigma}$, kus $\hat{\sigma} := \vec{\sigma}\cdot\vec{\zeta}/\zeta$ ja üheseksmääramise (5) pärast

$$Q_{\pm}^2(p) = \exp(\pm\sigma\cdot\vec{\zeta}) = \cosh\zeta \pm \sinh\zeta\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\zeta}}{\zeta} = \frac{p^0 \pm \vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{mc}. \tag{13}$$

Sellest tuleneb, et

$$Q^{-2}(p) = \frac{1}{mc}\left(p^0\mathbb{1}_4 + \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} p^i\right). \tag{14}$$

Kasutades võrrandeid (9) and (11) saame

$$\begin{aligned} mc\gamma^0\psi^P(p) &= \left(p^0\mathbb{1}_4 + \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} p^i\right)\psi^P(p), \\ -mc\gamma^0\psi^{AP}(p) &= \left(p^0\mathbb{1}_4 + \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} p^i\right)\psi^{AP}(p) \end{aligned} \tag{15}$$

ja korrutades vasakult maatriksiga γ^0 lõpuks

$$\begin{aligned} mc\psi^P(p) &= (\gamma^0p^0 - \gamma^ip^i)\psi^P(p) = \gamma^\mu p_\mu\psi^P(p), \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \\ -mc\psi^{AP}(p) &= (\gamma^0p^0 - \gamma^ip^i)\psi^{AP}(p) = \gamma^\mu p_\mu\psi^{AP}(p) \end{aligned} \tag{16}$$

mis on kokku võttes osakese ja antiosakese Diraci võrrandid impulsiruumis.

2.3 Olekute tarindamine

Massi keskse laenguna mõistmiseks on jäänud oluliseks puudujäägiks, et jagatakse massiga. Siinkohal panen ette kaks aastat tagasi leitud ligipääsu. Selleks alustame olekust $|p,\lambda\rangle$, mis on sõnastatud impulsi p ja spiraalsuse λ kaudu ning rahuldab paigalsüsteemis

$$P|\hat{p},\hat{\lambda}\rangle = \hat{p}|\hat{p},\hat{\lambda}\rangle, \qquad S^3|\hat{p},\hat{\lambda}\rangle = \hat{\lambda}|\hat{p},\hat{\lambda}\rangle \tag{17}$$

(spiraalsus on traditsiooni järgi mõõdetud z-telje suunas, mis on vastav kvantiseerimistelg), kusjuures spinni operaator on paigalsüsteemis ikkagi üheselt $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$, kus märgitähistuse puudumine tähistab paigalsüsteemi. Tõugatud olek on antud kujul

$$|p,\lambda_{\pm}\rangle = |L_{\pm}(p)\hat{p},\lambda_{\pm}\rangle = Q_{\pm}(p)|\hat{p},\hat{\lambda}\rangle, \qquad Q_{\pm}(p) := e^{\pm\vec{S}\cdot\vec{\zeta}(p)}. \tag{18}$$

On selge, et kui defineerime $\vec{S}_{\pm}(p) = Q_{\pm}(p)\vec{S}Q_{\pm}^{-1}(p)$, siis on

$$S_{\pm}^3(p)|L_{\pm}(p)\hat{p},\lambda_{\pm}\rangle = Q_{\pm}(p)S^3|\hat{p},\hat{\lambda}\rangle = \hat{\lambda}Q_{\pm}(p)|\hat{p},\hat{\lambda}\rangle = \hat{\lambda}|L_{\pm}(p)\hat{p},\lambda_{\pm}\rangle, \tag{19}$$

nii et $S_{\pm}^3(p)|p,\lambda_{\pm}\rangle = \hat{\lambda}|p,\lambda_{\pm}\rangle$ ja spiraalsus on Lorentzi tõuke all jääv. Saame järgnevas ära jätta $\hat{\lambda}$ katuse ja $\lambda_{\pm}$ märgitähistuse, sest liikuvas süsteemis kehtib $\lambda_{\pm} = \hat{\lambda}$.

2.4 Teine võimalus Diraci võrrandi tuletamiseks

Võrranditest (9) järeldame, et

$$\pm\gamma^0\psi^{P/AP}(p) = \mathcal{P}\psi^{P/AP}(p) = Q^{-2}(p)\psi^{P/AP}(p) = \begin{pmatrix} Q_+^2(p) & 0 \\ 0 & Q_-^2(p) \end{pmatrix}\psi^{P/AP}(p). \quad (20)$$

Kehtib

$$Q_\pm^2(p) = \exp\left(\pm 2\vec{S}\cdot\vec{\zeta}(p)\right) = \cosh\zeta(p) \pm 2\vec{S}\cdot\hat{\zeta}(p)\sinh\zeta(p), \quad (21)$$

kus $\hat{\zeta}(p) = \vec{\zeta}(p)/\zeta(p)$, ja kasutades

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (22)$$

saame

$$\pm\gamma^0\psi^{P/AP}(p) = \left(\cosh\zeta(p) - 2\gamma_5\vec{S}\cdot\hat{\zeta}(p)\sinh\zeta(p)\right)\psi^{P/AP}(p). \quad (23)$$

Korrutades vasakult maatriksiga γ^0 ning kasutades definitsioonina

$$\vec{\gamma} := 2\gamma^0\gamma_5\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

jõuame võrrandile

$$\left(\gamma^0\cosh\zeta(p) - \vec{\gamma}\cdot\hat{\zeta}(p)\sinh\zeta(p) \mp 1\right)\psi^{P/AP}(p) = 0. \quad (25)$$

Puhtalt matemaatilist võrrandit saab seostada füüsikaga, pannes

$$\hat{\zeta}(p)\sinh\zeta(p) = a\frac{\vec{p}}{|\vec{p}\,|}, \qquad \cosh\zeta(p) = a\frac{E/c}{|\vec{p}\,|}, \quad (26)$$

millest järeldub $\cosh^2\zeta - \sinh^2\zeta = 1$ pärast $a = \sinh\zeta$, siis $|\vec{p}\,|\cosh\zeta = (E/c)\sinh\zeta$ ning

$$e^\zeta = \frac{E + |\vec{p}\,|c}{\sqrt{E^2 - \vec{p}^{\,2}c^2}}, \qquad e^{-\zeta} = \frac{E - |\vec{p}\,|c}{\sqrt{E^2 - \vec{p}^{\,2}c^2}}, \qquad a = \frac{|\vec{p}\,|c}{\sqrt{E^2 - \vec{p}^{\,2}c^2}} \quad (27)$$

ja lõpuks

$$\left(\gamma^\mu p_\mu \pm \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - \vec{p}^{\,2}c^2}\right)\psi^{P/AP}(p) = 0, \quad (28)$$

mis on taas Diraci võrrand, kusjuures „mass“ $\sqrt{E^2 - \vec{p}^{\,2}c^2}/c^2$ on antud kahe kinemaatiliselt mõõdetava suuruste E ja $\vec{p}$ kaudu. Võime öelda, et mass on antud hüperboolsuse kaudu, s.t. kõrvalekalde valguskoonuse kinemaatikast, kus võrrand on mandunud.

3 Kokkuvõtteks

Kuigi massimõiste kõrvalekaldena valguskoonusest ja Diraci võrrandi tuletamine spinniolekutest on saavutatud, on endiselt ohus, kuidas teekond rühmateoreetiliselt kulgneb. Tundub, et „füüsika“ tekkib ainult nende spinnolekute vastastikmõjus. Nii on artikli [2] autorid rõhutanud, et nende poolt tuletatud spinni operaatorid pole unitaarsed ega teljevektorid. Alles rakendades osakese või antiosakese kirjeldatavale olekule tekkivad vaadeldavad, mis omandavad mõlemad omadused. Väide on endiselt püsti, et kahe, paarsusteisenduse kaudu seotud homogeensete Lorentzi teisenduste koostöös tekkib inhomogeenne Lorentzi teisendus, mille inhomogeenne osa, s.t. nihed, sündivad tõugete vastastikmõjust.

Viited

[1] H. Bauke, S. Ahrens, C. H. Keitel and R. Grobe, "Relativistic spin operators in various electromagnetic environments," Phys. Rev. A **89** no.5 (2014) 052101

[2] T. Choi and S. Y. Cho, "Spin operators and representations of the Poincaré group," arXiv:1807.06425 [physics.gen-ph]

[3] N. N. Bogolubov, A. A. Logunov and I. T. Todorov, "General Principles of Quantum Field Theory," W. A. Benjamin, Kluwer, Dordrecht (1990)

[4] P. Gallagher, „Kommentaare interaktsioonide toomisest Poincaré algebrasse ja lainefunktsioonide katmisest“, magistritöö, Tartu, 2020

[5] B. Thaller, "The Dirac Equation," Springer Verlag, New York, 1992