Keskse laengu tähendus relativistlikus kvantmehaanikas

Stefan Groote, TÜFI, 05.03.2025

1 Sissejuhatuseks

Kvantmehaanikat kirjeldab füüsikalisi protsesse olekute ja nende peale mõjuvate operaatorite kaudu. Olekud saab mõista kui lineaarse vektorruumi, nn. Hilbertruumi elementidena. Lineaarsust saab kirja panda kujul

$$|\xi_1\psi_1+\xi_2\psi_2\rangle=\xi_1|\psi_1\rangle+\xi_2|\psi_2\rangle. \tag{1}$$

Olekute jaoks on defineeritud skalaarkorrutis $\langle\phi|\psi\rangle=\langle\psi|\phi\rangle^*$, mis on bilineaarne,

$$\begin{aligned}\langle\phi|\xi_1\psi_1+\xi_2\psi_2\rangle &= \xi_1\langle\phi|\psi_1\rangle+\xi_2\langle\phi|\psi_2\rangle,\\ \langle\eta_1\phi_1+\eta_2\phi_2|\psi\rangle &= \eta_1^*\langle\phi_1|\psi\rangle+\eta_2^*\langle\phi_2|\psi\rangle.\end{aligned} \tag{2}$$

Skalaarkorrutis defineerib norm $\langle\psi|\psi\rangle\geq 0$ ja on null ainult siis, kui $|\psi\rangle=|0\rangle$. Siiski ei määra skalaarkorrutis $|\psi\rangle$ olekut üheselt, sest $\langle\psi|\psi\rangle=1$ ei ole rahuldatud ainult oleksuga $|\psi\rangle$ vaid ka olekuga $|\psi'\rangle=\xi|\psi\rangle$, kus $|\xi|=1$. Olek seepärast ei moodusta mitte vektorit Hilbertruumis vaid kiir, s.t. vektorite ekvivalentsklassi. Operaatorid on kujutised, mis lähevad Hilbertruumist Hilbertruumi kahe kiire vahel. Operaatori A jaoks kehtib

$$|A\psi\rangle=A|\psi\rangle. \tag{3}$$

Kaasoperaator $A^\dagger$ on defineeritud võrrandiga

$$\langle\phi|A^\dagger|\phi\rangle=\langle\phi|A^\dagger\psi\rangle:=\langle A\phi|\psi\rangle=\langle\psi|A\phi\rangle^*=\langle\psi|A|\phi\rangle^*. \tag{4}$$

Operaatori A ooteväärtused on antud skalaarkorrutisega

$$\langle\psi|A|\psi\rangle \tag{5}$$

ja on reaalväärtustega ja seega füüsikalised, kui operaator A on hermiitiline, $A^\dagger=A$. Kui oleku $|\psi\rangle$ kujutis operaatori A kaudu on samas kiires, siis saame

$$A|\psi\rangle=a|\psi\rangle, \tag{6}$$

kus a on omaväärtus ja $|\psi\rangle$ on omaolek, mis on määrtud ainult kiirena.

Skalaarkorrutised on defineeritud samas ainult unitaarse operaatori mõjuni,

$$\langle\phi|U^\dagger U|\psi\rangle=\langle U\phi|U\psi\rangle=\langle\phi|\psi\rangle, \tag{7}$$

mis määrab Eugene Wigneri poolt 1930. aastatel leitud sümmeetria, mis on tänapäeval teatud kui sümmeetria faasiteisenduse all ja on otseselt seotud kalibratsiooniteisenduse ja selle invariantsusega. Unitaarsed operaatorid moodustavad rühma, mis on pidev ja parametriseeritav. Jälgin selles ettekannes, kuidas Steven Weinberg oma raamatu "The Quantum Theory of Fields" [1] teises peatükis arendab sellest loomulikul viisil Lie-algebrat.

2 Tavaline ja projektiivne esitus

Unitaarsed operaatorid saab mõista Lie-rühma esitustena. Weinberg kirjutab $U(T)$, kus T on rühma element ja U on homomorfism. Kuna aga olekut on määratud ainult kuni faasini, siis kehtib üldiselt

$$U(T_2)U(T_1)|\psi\rangle = e^{i\phi(T_2,T_1)}U(T_2T_1)|\psi\rangle. \tag{8}$$

Kehtib muidugi $\phi(T,1) = \phi(1,T) = 0$, kus 1 on ühiselement. Nurk ϕ saab sõltuda olekust, aga on lihtne näitada, et üldjuhul siiski ei sõltu. Selleks vaatame olekut $|\psi_A + \psi_B\rangle = |\psi_A\rangle + |\psi_B\rangle$ ja rakendame mõlemale poolele $U(T_2)U(T_1)$. Tulemus on

$$e^{i\phi_{AB}(T_2,T_1)}U(T_2T_2)|\psi_A + \psi_B\rangle = e^{i\phi_A(T_2,T_1)}|\psi_A\rangle + e^{i\phi_B(T_2,T_1)}|\psi_B\rangle, \tag{9}$$

mis sõltumatud olekud $|\psi_A\rangle$ ja $|\psi_B\rangle$ on võimalik ainult, kui faas ei sõltu olekust. Erand on see, kui ei ole võimalik koostada koondseisundit nt. seetõttu, et A ja B kirjeldavad täis- ja poolarvulisi olekuid. Seega kehtib operaatorisamasus

$$U(T_2)U(T_1) = e^{i\phi(T_2,T_1)}U(T_2T_1) \tag{10}$$

ja $U(T)$ nimetatakse *projektiivseks esituseks*, mida saab võrrelda tavalise esitusega, kus $\phi(T_2,T_1) = 0$. Projektiivse esituse jaoks peaks kehtima assitsiatiivsus

$$U(T_3)(U(T_2)U(T_1)) = (U(T_3)U(T_2))U(T_1),$$

millest järeldub

$$\phi(T_2,T_1) + \phi(T_3,T_2T_1) = \phi(T_3,T_2) + \phi(T_3T_2,T_1). \tag{11}$$

On lihtne näida, et $\phi(T_2,T_1) = \alpha(T_2T_1) - \alpha(T_2) - \alpha(T_1)$ rahuldab võrrandit (11). Mõistes olekute ruumi abeli rühmaks, nimemetakse niisugust lahendust kaks-kotsükliks. Kotsüklit saab eemaldada asendusega $\bar{U}(T) = e^{i\alpha(T)}U(T)$, millest tuleneb tavaline esitus kujuga $\bar{U}(T_2)\bar{U}(T_1) = \bar{U}(T_2T_1)$. (Seesmised) projektiivsed esitused on seetõttu defineeritud kuni kotsüklini.

2.1 Lie-rühmast Lie-algebrasse

Vaatame nüüd rühma esitust reaalväärtustega parameetrite θ^a kaudu, mis muudab rühma sidus Lie-rühmaks. Kehtib

$$T(\theta_2)T(\theta_1) = T(f(\theta_2,\theta_1)), \tag{12}$$

kus nii θ_1, θ_2 kui ka $f(\theta_2,\theta_1)$ võtavad parameetreid vektorina kokku. Ühiselement on parametriseeritud nullvektoriga, $1 = T(0)$, ja seega kehtib

$$f^a(\theta,0) = f^a(0,\theta) = \theta^a. \tag{13}$$

Arendades $f(\theta_2,\theta_1)$ ritta on siis selge, et rida ei saa sisaldada nulljärku ega θ_1 või θ_2 astmet ja seega algab kujul

$$f^a(\theta_2,\theta_1) = \theta_2^a + \theta_1^a + f^a_{bc}\theta_2^b\theta_1^c + \dots, \tag{14}$$

kus f^a_{bc} on taas reaalväärtustega kordajad. Parametriseeritud Lie-rühma elemendist $T(\theta)$ sõltuvat unitaarset operaatorit saab identsuseoperaatori ligidal arenda ritta,

$$U(T(\theta)) = 1 + it_a\theta^a - \frac{1}{2}t_{bc}\theta^b\theta^c + \ldots, \tag{15}$$

kus t_a on hermiitilised ja t_a, $t_{bc} = t_{cb}$, ... on parameetrist θ sõltumatud kordajad. Vaadates esialgselt tavalist esitust, kus $U(T(\theta_2))U(T(\theta_1)) = U(T(f(\theta_2, \theta_1)))$, peab seega kehtima

$$\begin{aligned} &\left(1 + it_a\theta_2^a - \frac{1}{2}t_{bc}\theta_2^b\theta_2^c + \ldots\right)\left(1 + it_a\theta_1^a - \frac{1}{2}t_{bc}\theta_1^b\theta_1^c + \ldots\right) = \\ &= 1 + it_a(\theta_2^a + \theta_1^a + f^a_{bc}\theta_2^b\theta_1^c + \ldots) - \frac{1}{2}t_{bc}(\theta_2^b + \theta_1^b + \ldots)(\theta_2^c + \theta_1^c + \ldots) + \ldots, \end{aligned} \tag{16}$$

millest järeldub esimeseks mittetriviaalseks seoseks

$$t_{bc} = t_b t_c + i f^a_{bc} t_a. \tag{17}$$

Kuna $t_{bc} = t_{cb}$ on sümmeetriline, saab järeldada

$$t_b t_c - t_c t_b =: [t_b, t_c] = iC^a_{bc} t_a, \tag{18}$$

kus $C^a_{bc} := -f^a_{bc} + f^a_{cb}$ on *kujutegurid*. Seos (18) püstitab *Lie-algebrat*.

2.2 Keskse laengu ilmumine

Projektiivse esituse jaoks on Lie-algebrasse naastmiseks vaja arendada faasi ritta. Samade argumentidega nagu ennegi algab rida segapanusega,

$$\phi(T(\theta_2), T(\theta_1)) = f_{ab}\theta_2^a\theta_1^b + \ldots, \tag{19}$$

ja projektiivse esituse samasuse (10) ritta arendades tuleb arvesse võtta eksponentsiaalfunktsiooniga. Tulemus on

$$[t_b, t_c] = iC^a_{bc} t_a + iC_{bc}1 \tag{20}$$

($C_{bc} := -f_{bc} + f_{cb}$), kus 1 on ühikelement, mis ei ole Lie-algebras aga kommuteerub kõikide Lie-algebra elementidega (ehk Lie-rühma moodustajatega) ja mida nimetatakse *keskseks laenguks*. Jacobi samasusest järeldub, et peab kehtima

$$C^a_{bc}C^e_{ad} + C^a_{cd}C^e_{ab} + C^a_{db}C^e_{ac} = 0 \quad \text{ja samuti} \quad C^a_{bc}C_{ad} + C^a_{cd}C_{ab} + C^a_{db}C_{ac} = 0. \tag{21}$$

Teine võrrand on ilmselt rahuldatud, kui $C_{bc} = C^a_{bc}\Delta t_a$. Sel korral saab moodustajad nihutada, $t_a \to \bar{t}_a := t_a + \Delta t_a$, et saada tavalist, ilma kesksete laengute Lie-algebrat, rahuldades $[\bar{t}_b, \bar{t}_c] = iC^a_{bc}\bar{t}_a$. Antud Lie-algebra võib või ei või omandada mittetriviaalset lahendust teise võrrandi jaoks. Kehtib teoreem, mida Weinberg tõestas. Ma ei näita seda tõestus siin üksikasjalikult vaid mainin, et on *kaks põhjust, mis võib tekkitada projektiivsust*:

1. *algebrailine põhjus*: keskseid laenguid ei saa eemaldada moodustajate nihega.

2. *topoloogiline põhjus*: Rühm ei ole ühelisidus.

3 Esimene näite: Poincaré algebra

Keskendun siin nagu Weinberg pigem näidetele. Esimene näide on Poincaré rühm, mis on teatud ka mittehomogeense Lorentzi rühma nime all. Moodustajad on impulss P^μ ja pöördimpulss $J^{\mu\nu}$ (esitatud kaldsümmeetrilise tensorina). Vaatame seda rühma esiteks algebrailise vaatenurga all.

3.1 Algebrailine vaatenurk

Võimalikute kesksete laengutega Poincaré algebra on antud süsteemiga

$$\begin{aligned}
i[P^\mu, P^\rho] &= C^{\mu,\rho}, \\
i[J^{\mu\nu}, P^\rho] &= P^\mu \eta^{\nu\rho} - P^\nu \eta^{\mu\rho} + C^{\mu\nu,\rho}, \\
i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] &= \eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho + C^{\mu,\rho\sigma}, \\
i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu} + C^{\mu\nu,\rho\sigma}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Kehtivad $C^{\mu,\rho} = -C^{\rho,\mu}$, $C^{\mu\nu,\rho} = -C^{\rho,\mu\nu}$ ja $C^{\mu\nu,\rho\sigma} = -C^{\rho\sigma,\mu\nu}$. Jacobi samasustest (esimene, ainult P sisaldav, on triviaalne)

$$\begin{aligned}
0 &= [J^{\mu\nu}, [P^\rho, P^\sigma]] + [P^\sigma, [J^{\mu\nu}, P^\rho]] + [P^\rho, [P^\sigma, J^{\mu\nu}]] \\
0 &= [J^{\kappa\lambda}, [J^{\mu\nu}, P^\rho]] + [P^\rho, [J^{\kappa\lambda}, J^{\mu\nu}]] + [J^{\mu\nu}, [P^\rho, J^{\kappa\lambda}]] \\
0 &= [J^{\kappa\lambda}, [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}]] + [J^{\rho\sigma}, [J^{\kappa\lambda}, J^{\mu\nu}]] + [J^{\mu\nu}, [J^{\rho\sigma}, J^{\kappa\lambda}]]
\end{aligned} \tag{23}$$

Järelduvad seosed kesksete laengute vahel,

$$\begin{aligned}
0 &= \eta^{\nu\rho} C^{\sigma,\mu} - \eta^{\mu\rho} C^{\sigma,\nu} - \eta^{\nu\sigma} C^{\rho,\mu} + \eta^{\mu\sigma} C^{\rho,\nu}, \\
0 &= \eta^{\nu\rho} C^{\kappa\lambda,\mu} - \eta^{\mu\rho} C^{\kappa\lambda,\nu} - \eta^{\mu\lambda} C^{\kappa\nu,\rho} + \eta^{\kappa\mu} C^{\lambda\nu,\rho} + \\
&\quad + \eta^{\kappa\nu} C^{\mu\lambda,\rho} - \eta^{\lambda\nu} C^{\mu\kappa,\rho} + \eta^{\rho\kappa} C^{\mu\nu,\lambda} - \eta^{\rho\lambda} C^{\mu\nu,\kappa}, \\
0 &= \eta^{\nu\rho} C^{\kappa\lambda,\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} C^{\kappa\lambda,\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} C^{\kappa\lambda,\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} C^{\kappa\lambda,\rho\mu} + \\
&\quad + \eta^{\lambda\mu} C^{\rho\sigma,\kappa\nu} - \eta^{\kappa\mu} C^{\rho\sigma,\lambda\nu} - \eta^{\nu\kappa} C^{\rho\sigma,\mu\lambda} + \eta^{\nu\lambda} C^{\rho\sigma,\mu\kappa} + \\
&\quad + \eta^{\sigma\kappa} C^{\mu\nu,\rho\lambda} - \eta^{\rho\kappa} C^{\mu\nu,\sigma\lambda} - \eta^{\lambda\rho} C^{\mu\nu,\kappa\sigma} + \eta^{\lambda\sigma} C^{\mu\nu,\kappa\rho}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Ahendades Minkowski meetrikaga $\eta_{\nu\rho}$, kus $\eta_{\nu\rho}\eta^{\mu\rho} = \delta^\mu_\nu$ ja $\eta_{\nu\rho}\eta^{\nu\rho} = 4$ on aegruumi mõõt, saame esimesest võrrandist $C^{\sigma,\mu} = 0$. Ahendades teist võrrandit sama meetrikaga, saame

$$C^{\kappa\lambda,\mu} = C^\kappa \eta^{\mu\lambda} - C^\lambda \eta^{\mu\kappa}, \quad C^\kappa := \frac{1}{3}\eta_{\rho\nu} C^{\kappa\nu,\rho} \tag{25}$$

ja ahendades kolmandat võrrandit taas $\eta_{\nu\rho}$-ga, saame

$$C^{\kappa\lambda,\mu\sigma} = \eta_{\lambda\mu} C^{\kappa\sigma} - \eta^{\kappa\mu} C^{\lambda\sigma} + \eta^{\sigma\kappa} C^{\lambda\mu} - \eta^{\lambda\sigma} C^{\kappa\mu}, \quad C^{\kappa\sigma} := \frac{1}{2}\eta_{\nu\rho} C^{\sigma\rho,\kappa\nu}. \tag{26}$$

Asendused $\bar{P}^\mu = P^\mu + C^\mu$ ja $\bar{J}^{\mu\nu} = J^{\mu\nu} + C^{\mu\nu}$ annavad tavalised Lie-algebra seosed, mis on kesksetest laengutest vabad,

$$\begin{aligned} i[\bar{P}^\mu, \bar{P}^\rho] &= 0, \\ i[\bar{J}^{\mu\nu}, \bar{P}^\rho] &= \bar{P}^\mu \eta^{\nu\rho} - \bar{P}^\nu \eta^{\mu\rho}, \\ i[\bar{P}^\mu, \bar{J}^{\rho\sigma}] &= \eta^{\mu\rho} \bar{P}^\sigma - \eta^{\mu\sigma} \bar{P}^\rho, \\ i[\bar{J}^{\mu\nu}, \bar{J}^{\rho\sigma}] &= \eta^{\nu\rho} \bar{J}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} \bar{J}^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} \bar{J}^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} \bar{J}^{\rho\mu}. \end{aligned} \tag{27}$$

3.2 Topoloogiline vaatenurk

On võimalik näidata, et Lorentzi rühm on isomorfne jagatisrühmaga $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$, kus $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ on kompleksarvuliste, lineaarsete 2×2 maatriksite rühm, mille determinant võrdub ühega, mida jagatakse selle maatriksi märgiga. Samas on $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ isomorpfne rühmaga $\mathbb{R}_3 \times S_3$, mis on ühelisidus. Jagades rühmaga $\mathbb{Z}_2$ saame $\mathbb{R}_3 \times S_3/\mathbb{Z}_2$, kus teine kordaja on neljamõõtmelise hüperkuuli pind, milles on samastatud vastaspunktid. Rühm ei ole ühelisidus vaid kahelisidus, mis tähendab, et teekond üle suletud joone on kokkutõmbav, kui läbib seda teekonna kaks korda. Sellest järeldub, et võimalik projektiivsus seisneb seoses

$$U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) = \pm U(\Lambda_2\Lambda_1). \tag{28}$$

Sama kehtib ka inhomogeense Lorentzi rühma ehk Poincaré rühma jaoks, mis on isomorfne rühmaga $\mathbb{R}_4 \times \mathbb{R}_3 \times S_3/\mathbb{Z}_2$. Samas: kui ei ole antud ühelisidus Lie-rühm, siis saab seda rühma alati laiendada, sel korral rühmale $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, mis on ühelisidus. Üldiselt kehtib, et kui rühm G ei ole ühelisidus, siis saab seda kirjutada kujul E/N, kus E on üleüldine katterühm ja N on katterühma E normaalne alamrühm, mis tähendab, et G tõlgendatakse kui rühma E kõrvalklassid N suhtes, mis on N normaalsuse pärast rühmaelemendid.

Selles kohas kohtub kaks mõistet, mis seletab ka keskse laengu nime. Tuleb välja, et Lie-rühmade kesklaiendus mittepideva rühma võrra on sama nagu katterühm. Kesklaiendus aga tähendab lühikest täpset jada

$$1 \to N \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} G \to 1, \tag{29}$$

kus inklusiooni $\iota : N \to E$ kujutis on rühma E kesk $Z(E)$. Kui antud lühikese täpse jada jaoks on olemas homomorpfism $s : G \to E$, mille liitfunktsioon jagatishomomorphismiga $\pi : E \to G$ on identsus rühmas G, $\pi \circ s = \mathrm{id}_G$, siis jada lõheneb. Kesklaienduse puhul tähendab see, et $E = N \times G$. Üldiselt aga lõheneb lühike täpne jada täpselt siis, kui $E = N \rtimes G$ on poolotsekorrutis. See võiks osutada huvitavaks.

3.3 Kokkuvõtteks

Laiendatud rühm E aga enam ei sisalda kesklaenguid. Tundub, et keskse laengu olemasolu ja sellega seotud ülalvaliku reegel (superselection rule) pool- ja täisarvuliste pöördimpulssolekute suhtes olid näilised. Enne, kui langetame otsustust, vaatame veel ühte näidet.

4 Teine näite: Galilei algebra

Galilei algebrat on võimalik määrata alustades Galilei teisendusest. Samas on Galilei teisendus Poincaré teisenduse mitterelativistlik piirjuht, nii et Galilei algebrat saab tuletada ka Poincaré algebrast. Erilist ja algebrat lõhustavat rolli mängib selles impulsi nelivektor, milles ajaline komponent skaleerib kiirusega teistmoodi kui ruumilised komponendid, mis on klaasikaliselt võrdelised kiirusega. Ajaline ehk nullkomponent on aga võrdne energiaga H, kui panda valgusekiiruse $c = 1$. Võrrandite süsteem (27) laguneb siis kolmvektorite ja skalaaride süsteemisse, kus kolmvektorid on impulss, pöördimpulss ja tõuge,

$$\vec{P} = (P^1, P^2, P^3)^T, \quad \vec{J} = (J^{23}, J^{31}, J^{12})^T, \quad \vec{K} = (J^{01}, J^{02}, J^{03})^T. \tag{30}$$

Poincaré algebra süsteem on siis kujul

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}J_k, \qquad [J_i, K_j] \;=\; i\epsilon_{ijk}K_k, \qquad [K_i, K_j] \;=\; -i\epsilon_{ijk}J_k, \\
[J_i, P_j] &= i\epsilon_{ijk}P_k, \qquad [K_i, P_j] \;=\; -i\delta_{ij}H, \\
[J_i, H] &= [P_i, H] \;=\; [H, H] \;=\; 0, \qquad [K_i, H] \;=\; -iP_i,
\end{aligned} \tag{31}$$

kus ülal- ja allindeksite vahet ei ole ja ϵ_{ijk} on täielik kaldsümmeetriline Levi-Civita tensor baasväärtusega $\epsilon_{123} = 1$. Piirjuhul $v \ll 1$ ei skaleeru pöördimpulsid, $J \sim 1$, aga impulsid $P \sim mv$ ja energia $H = M + W$, kus $M \sim m$ on massi osa ja $W \sim mv^2$ klassikaline energia, mis koosneb kineetilisest ja potentsiaalsest energiast. Piirjuhu rakendades saame

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}J_k, \qquad [J_i, K_j] \;=\; i\epsilon_{ijk}K_k, \qquad [K_i, K_j] \;=\; 0, \\
[J_i, P_j] &= i\epsilon_{ijk}P_k, \qquad [K_i, P_j] \;=\; -i\delta_{ij}M, \\
[J_i, W] &= [P_i, W] \;=\; 0, \qquad [K_i, W] \;=\; -iP_i, \\
[J_i, M] &= [P_i, M] \;=\; [K_i, M] \;=\; [W, M] \;=\; 0,
\end{aligned} \tag{32}$$

millest selgub $K \sim 1/v$. Piirjuht on teatud kui Inönü–Wigner ahendamist [2, 3]. Uurides projektiivsust vaatame üksikasjalikult nihe $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{a}$ ja Galilei „tõuge“ $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{v}t$ koosmõju, mis peaks olema $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{v}t + \vec{a}$. Operaatoridena Hilbertruumis aga kehtib

$$\exp(-i\vec{K} \cdot \vec{v}) \exp(-i\vec{P} \cdot a) = \exp(iM\vec{a} \cdot \vec{v}/2) \exp(-i(\vec{K} \cdot \vec{v} + \vec{P} \cdot \vec{a})). \tag{33}$$

See viitab sellele, et mass on Galilei rühma keksne laeng, mis paneb ülesse taas ülalvaliku reeglit, mille järgi ei saa kokku panda erinevate massidega olekud. Samas saab algebrat laiendada sellega, et võtta operaatori M algebrasse. Seega on, nagu Weinberg rõhtab, ülalvaliku reeglid nagu „punane heering“, mis viib tõelisest probleemist kaugemale, sest sümmeetriarühma saab alati laiendada nii, et ülalvaliku reegel laiendatud rühmas enam ei kehti. Minu isiklik arvamus on, et massi olemasolu saab mõista tekkituna tõuge ja nihe koostöös inertsmassina. Seda aga tuleks korralikult näidata.

5 Väljavaade

Kesksed laengud ilmuvad ka palju keerulisemates olukordades. Üks näide leidub alles hiljuti järelretsenseeritud artiklis [4], kus vaadeldatakse kovariantse faasiruumi formalismi Cauchy ääre- või pinnaprobleemi olukorras, kui aegruumi pinnad fluktueeruvad. Artikkel tegelikult käivitas uuendatud huvi keskesse laengusse. Muu hulgas tegeletakse artiklis pinnalaengutega ja näidetakse, et ka fluktueeruva pinna puhul on võimalik need saada integreerimise teel, kusjuures saanud laeng $Q(\xi) = -Q_N(\xi) + Q_R(\xi)$ sõltuvuses difeomorfismist ξ jaguneb kaheks, nimelt Noetheri laenguks ja referentslaenguks. Lõpuks jõutakse valemile (veidi teises kleidis, aga kasutades $Q_N|_R = Q_R$)

$$[Q_N(\xi_1), Q_N(\xi_2)] = Q_N([\xi_1, \xi_2]) + \mathcal{K}[\xi_1; \xi_2], \quad \mathcal{K}[\xi_1; \xi_2] := [Q_N(\xi_1), Q_N(\xi_2)]_R - Q_R([\xi_1, \xi_2]). \tag{34}$$

Minu keskne huvi keskse laengu ja Lie-rühma laienduse vastu aga on põhjendatud artikli [5] pärast ja selle artikli seostusest meie uurimissuunaga [6]. Kuigi peamine autor väidab, et siiani avalikustamata artikkel on nüüd vahepeal ilmunud [7], ei pea see väite vett, sest peensus, mis mind huvitab, on sellest avalikustatud artiklist ilmselt retsendi survel kadunud, nimelt väide, et paarsuse võrra laiendatud Poincaré rühm on ainus, millel ei ole ülemäärane esitusruum, ja vasak- ja parempidine otsesumma $(s, 0) \oplus (0, s)$ on üks võimalik esitusviis. See haakuks täpselt meie väidega, et maasitu osakese Poincaré rühm on kirjeldav vasak- ja paremkäeliste osade kaudu. Seda tuleks (üksik)asjalikumalt uurida.

Viited

[1] S. Weinberg, “The Quantum Theory of Fields,” Cambridge University Press, Cambridge, 1995

[2] E. Inönü, E. P. Wigner, “Representations of the Galilei Group,” Il Nuovo Cim. **IX** no.8 (1952) 705–718

[3] E. Inönü, E. P. Wigner, “On the contraction of groups and their representations,” Proc. Nat. Acad. Sci. USA **39** (1953) 510–524

[4] H. Adami, M. Golshani, M. M. Sheikh-Jabbari, V. Taghiloo and M. H. Vahidinia, “Covariant phase space formalism for fluctuating boundaries,” JHEP **09** (2024) 157

[5] T. Choi and S. Y. Cho, “Spin operators and representations of the Poincaré group,” [arXiv:1807.06425 [physics.gen-ph]].

[6] S. Groote and R. Saar, “A Solvable Algebra for Massless Fermions,” Symmetry **16** no.1 (2024) 97

[7] T. Choi and Y. D. Han, “Lorentz-covariant spin operator for spin 1/2 massive fields as a physical observable,” J. Korean Phys. Soc. **82** no.5 (2023) 448-454